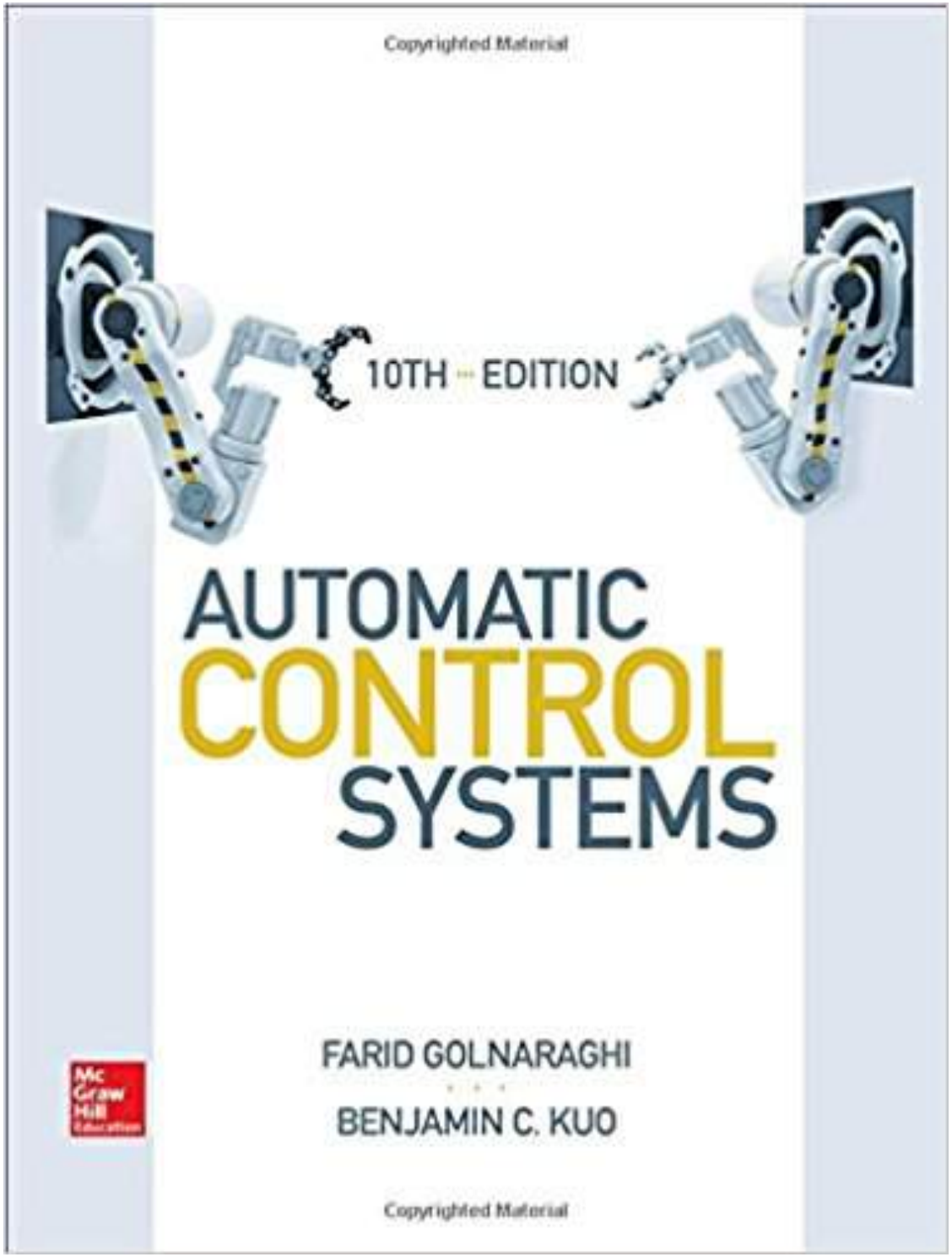
자동제어 (Automatic Control) 11장 제어시스템 설계

김동한

경희대학교
Kyung Hee University



이 단원을 공부하면

1. 시간 영역과 주파수 영역에서 간단한 제어 시스템을 설계할 수 있다.
2. 간단한 제어 시스템에 비례, 미분, 적분, 리드, 지연과 같은 다양한 제어기를 추가할 수 있다.
3. MATLAB을 사용하여 제어 시스템의 성능을 시간 영역과 주파수 영역에서 조사할 수 있다.
4. MATLAB SISO 디자인 툴을 사용해서 시스템 디자인을 빠르게 할 수 있다.

11-1 INTRODUCTION

We now utilize all the foundations and analyses that we have provided in the preceding chapters in the ultimate goal of design of control systems. Starting with the controlled process such as that shown by the block diagram in Fig. 11-1, control system design involves the following three steps:

1. 시스템이 무엇을 하고 어떻게 할 것인가를 결정한다(설계사양).
2. 제어기나 보상기를 제어공정에 어떻게 연결할 것인가에 관련하여 그 배치 방안을 결정한다.
3. 설계목표를 달성하기 위해 제어기의 파라미터 값들을 결정한다.

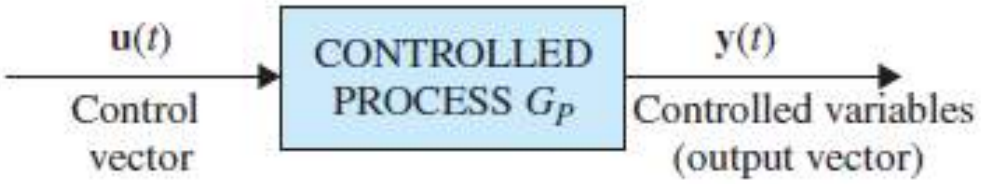


Figure 11-1 Controlled process.

11-1-1 Design Specifications

시스템이 무엇을 할 것이고 이를 어떻게 수행할 것인가를 기술하는 데 설계사양을 종종 이용한다. 이러한 사양은 응용에 따라 다르며, 대개 상대안정도, 정상상태의 정확도(오차), 과도응답 및 주파수응답 특성 등을 포함한다. 경우에 따라 파라미터 변화에 따른 민감도(강인성 또는 외란 제거) 등의 추가적 사양을 고려하기도 한다. 선형제어시스템의 설계는 시간영역이나 주파수영역에서 이루어진다. 예를 들면 정상상태 정확도는 계단입력, 램프입력 및 포물선입력 등에 대하여 사양이 주어지며, 어떤 특정한 요구조건을 충족시키는 설계는 시간영역에서 처리하는 것이 용이하다. 최대오버슈트, 상승시간 및 정정시간 등의 경우는 모두 단위계단입력에 의해 정의되므로 시간영역 설계에 이용된다. 상대안정도는 이득여유, 위상여유 및 첨두공진치와 같은 항으로 측정한다. 이것들은 전형적인 주파수영역의 사양이며, Bode 선도, 극좌표선도, 위상이득선도 및 Nichols 도표의 도구와 연계해야 한다.

전형적인 2차 시스템은 시간영역과 주파수영역의 사양 사이에 간단한 해석적 연관성이 있음을 확인한 바 있다. 그러나 고차 시스템의 경우는 시간영역과 주파수영역 사이의 상관관계를 찾기가 어렵다. 앞에서 지적한 바와 같이 제어시스템의 해석과 설계는 동일한 문제를 해결하는 데 여러 가지 다른 방법 중에서 최적의 방법을 선택하는 과정이다.

따라서 설계를 시간영역이나 주파수영역 중에서 어느 것을 선택하느냐는 설계자의 취향에 의해 결정된다. 그러나 대부분의 경우 최대오버슈트, 상승시간 및 정정시간과 같은 시간영역의 사양을 시스템의 성능에 대한 최종 척도로 사용한다. 경험이 없는 설계자는 이득여유와 위상여유, 첨두공진치 등과 같은 주파수영역의 사양들과 실제 시스템의 성능 사이의 물리적 관계를 이해하기 어렵다. 예를 들면 20 dB의 이득여유가 10% 이하의 최대오버슈트를 보장하는가? 설계자에게는 최대오버슈트가 5% 이하이고 정정시간이 0.01초 이하인 사양을 제시하는 것이 더 적절하다. 예를 들어 608의 위상여유와 1.1 이하의 첨두공진치가 시스템의 성능에 어떤 결과를 가져오는가? 라는 질문 등은 불분명하다.

1. 역사적으로 선형제어시스템의 설계는 Bode 선도, Nyquist 선도, 위상이득선도 및 Nichols 도표 등과 같은 다양한 도해적인 도구를 사용하여 개발되었으며 이들은 모두 주파수영역에서 수행되었다. 이러한 도구들의 장점은 정교한 도면을 그리지 않고 근사적인 방법으로 도면들이 작성될 수 있다는 점이다. 그러므로 설계자는 이득여유, 위상여유, 첨두공진치 등과 같은 주파수영역의 사양을 사용하여 설계를 수행할 수 있다. 고차 시스템이라도 특별한 문제가 발생하지 않는다. 특정 제어기의 경우 주파수영역의 설계과정을 이용하여 시행착오의 수고를 최소화할 수 있다.
2. 상승시간, 지연시간, 정정시간 및 최대오버슈트 등의 성능사양을 이용하는 시간영역의 설계는 2차 시스템 또는 2차로 근사화할 수 있는 시스템에 대해서만 해석적으로 가능하다. 2차보다 높은 차수의 시스템에 대해서 시간영역의 사양을 이용하는 일반적인 설계과정을 확립하기는 어렵다.

제어기의 구조

Figure 11-2

Various controller configurations in c ontrol-system compensation.

(a) Series or cascade compensation.

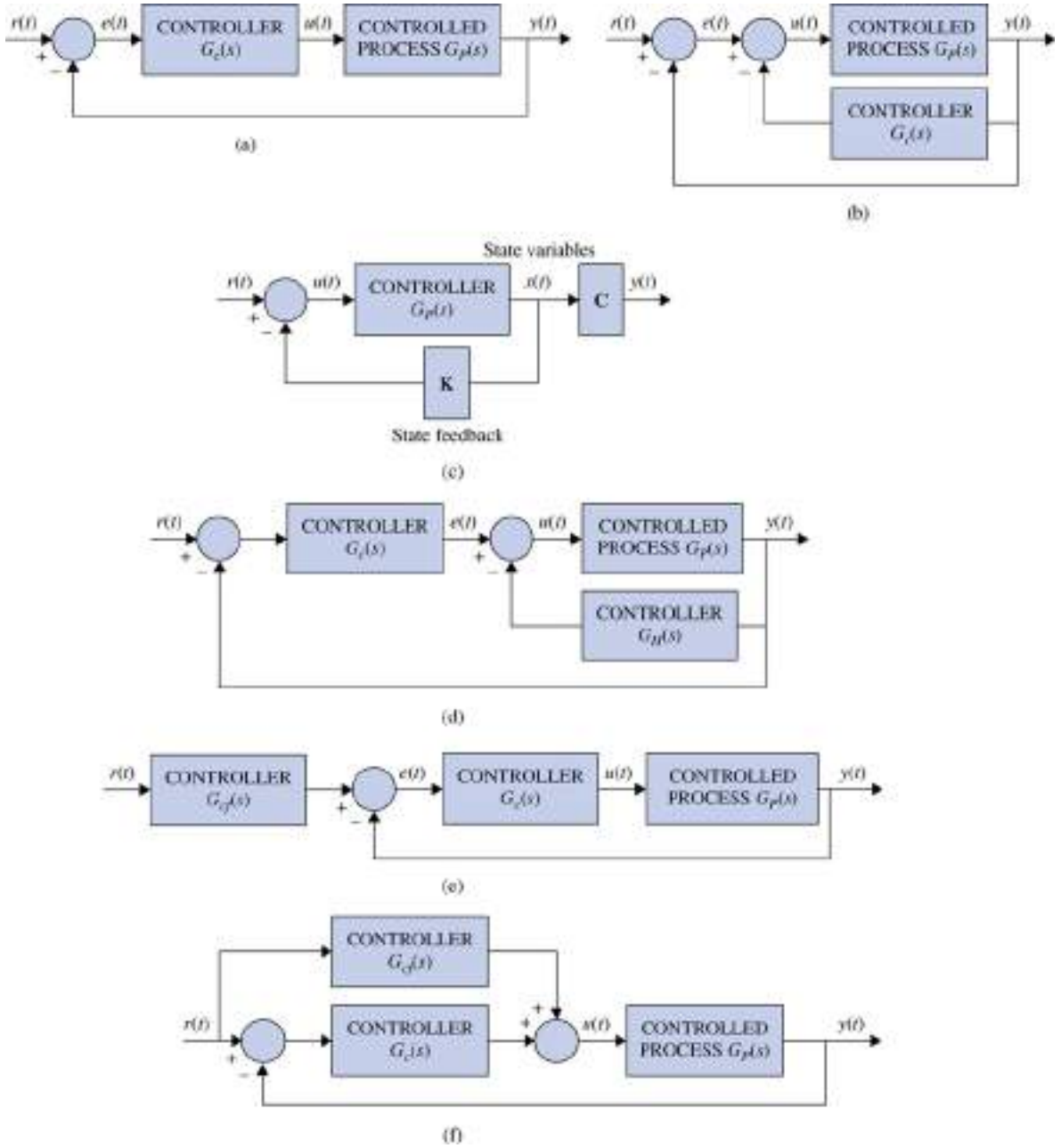
(b) Feedback compensation.

(c) State-feedback control.

(d) Series-feedback compensation (t wo degrees of freedom).

(e) Forward compensation with series compensation (two degrees of freedo m).

(f) Feedforward compensation (two d egrees of freedom).



제어시스템 설계방법은 소위 고정배치설계(fixed configuration design)에 의존하는데, 여기서 설계자는 우선 전체 설계 시스템의 기본 구성을 결정하고 또한 제어대상과 비교하여 제어기가 위치해야 할 위치를 결정한다. 그 다음 문제는 제어기의 요소를 설계하는 것이다. 대부분의 제어효과는 시스템 성능 특성의 수정이나 보상과 관련되므로 고정배치에 의한 일반적인 설계 역시 보상(compensation)이라 한다.

직렬(종속)보상: 그림 11-2(a)는 제어기를 제어공정에 직렬로 배열하여 이용하는 가장 일반적인 시스템 구조를 나타내며, 이런 배열을 직렬 또는 종속보상이라 한다.

- 피드백보상: 그림 11-2(b)는 제어기가 국부피드백 경로에 위치하는 것을 나타내며, 이런 형태를 피드백 보상이라 부른다.
- 상태피드백보상: 그림 9-2(c)는 일정한 실수이득을 갖는 상태변수를 피드백하여 제어신호를 발생시키는 시스템을 보여 주며, 이런 형태를 상태피드백이라 한다. 상태피드백 제어의 문제는 고차 시스템에서 다수의 상태변수들 때문에 피드백을 위한 상태변수들을

측정하기 위해 다수의 센서가 필요한 점이다. 따라서 실제적으로 상태피드백 제어를 구축하는 데는 고비용이 요구되거나 비현실적이다. 저차 시스템의 경우에도 때에 따라 측정이 어려운 출력의 상태변수들을 생성하기 위한 관측기나 추정기가 필요하다.

그림 11-2(a), (b) 및 (c)의 보상형태는 제어기의 변할 수 있는 파라미터가 한 개 이상이라도, 각 시스템은 모두 한 개의 제어기만 존재하는 1자유도(one degree of freedom)를 가지고 있다. 1자유도인 제어기의 단점은 실현될 수 있는 평가 함수가 제약을 받는 것이다. 예를 들어 어떤 시스템을 일정량의 상대 안정도를 갖도록 설계한다면, 이 시스템은 파라미터 변화에 대하여 부족한 감도를 갖는다. 또는 특성방정식 근을 일정량의 상대적인 감쇠를 갖도록 선택한다면, 계단응답의 최대오버슈트는 폐루프 전달함수의 영점 때문에 커질 수 있다. 그림 11-2(d), (e) 및 (f)에서 보여 주는 보상형태는 모두 2자유도를 갖는다.

- 직렬피드백보상: 그림 11-2(d)는 직렬제어기와 피드백제어기를 갖는 직렬피드백보상을 보여 준다.
- 전향보상: 그림 11-2(e)와 (f)는 소위 전향보상을 나타낸다. 그림 11-2(e)에서 전향제어기 Gcf(s)가 폐루프시스템에 직렬로 연결되어 있으며, 이때 폐루프시스템은 전방경로에 제어기 Gc(s)를 갖고 있다. 그림 11-2(f)에서는 전향제어기 Gcf(s)가 전방경로에 병렬로 설치되어 있다. 전향 보상의 핵심은 제어기 Gcf(s)가 시스템의 루프 내에 있지 않기 때문에, 원래의 시스템 특성방정식의 근에 영향을 미치지 않는 점이다. 폐루프 전달함수 극과 영점을 추가하든지 상쇄되도록 Gcf(s)의 극과 영점을 선택해도 좋다.

설계의 기본원리

설계자는 제어기 구조를 결정한 후, 모든 설계사양을 만족하는 제어기 소자의 값을 갖는 제어기 형태를 선택해야 한다. 앞 장에서 설명한 해석적 도구를 이용하여 각각의 파라미터들이 설계사양과 최종적으로 시스템의 성능에 어떻게 영향을 주는가를 결정하는 것이다.
일반적으로 설계 목적을 위한 지침으로 이용할 수 있도록 시간영역 특성과 주파수영역 특성을 다음과 같이 요약하는 것은 매우 유용하다.

1. 폐루프 전달함수의 공액복소극들은 계단응답이 부족감쇠가 되도록 한다. 시스템의 모든 극이 실수이면 계단응답은 초과감쇠이다. 그러나 폐루프 전달함수의 영점들은 시스템이 초과감쇠일 경우에도 오버슈트의 원인이 되기도 한다.
2. 시스템의 응답은 s-평면의 원점에 가장 가까운 극에 의해 결정된다. 왼쪽으로 멀어질수록 이러한 극들에 의한 과도응답은 빨리 감쇠한다.
3. 시스템의 지배극들이 s-평면에서 왼쪽으로 멀어질수록, 응답이 빨라지고 대역폭이 더욱 넓어진다.

4. 시스템의 지배극들이 s-평면에서 왼쪽으로 멀어질수록, 비용이 증가하고 그 내부 신호는 커진다. 이를 해석적으로 근거를 제시할 수 있지만, 망치로 힘을 주어 못을 박으면 더 빨리 못을 박을 수 있지만 더 많은 에너지가 요구되는 원리를 통해서 설명할 수 있다. 마찬가지로 스포츠용 자동차는 더 빨리 가속할 수 있으나, 일반차량보다 더 많은 연료를 소모하게 된다.
5. 전달함수의 한 극과 영점이 거의 상쇄될 정도로 근접한 경우, 이 극에 대한 시스템 응답은 작은 진폭을 가진다.
6. 시간영역 사양과 주파수영역 사양은 서로 약간의 연관성이 있다. 상승시간과 대역폭은 반비례한다. 높은 위상여유 및 이득여유와 낮은 첨두공진치는 감쇠를 증가시킨다.

11-2 DESIGN WITH THE PD CONTROLLER

지금까지 논의한 모든 제어시스템 예제에서 사용된 제어기는 대개 일정한 이득 K를 갖는 간단한 증폭기였다. 이런 형태의 제어기는 비례제어(proportional control)로 알려져 있다. 이는 제어기 출력신호가 제어기 입력에 비례하기 때문이다.

제어기는 비례연산뿐 아니라 입력신호의 미분과 적분을 이용할 수 있다. 따라서 일반적인 연속치 제어기는 가산기(가산 또는 감산), 증폭기, 감쇠기, 미분기 및 적분기 등과 같은 요소들을 포함하는 장치라고 생각할 수 있다. 설계자의 역할은 이런 요소 중에서 어떤 것을 이용할 것인가, 어떤 비율로 또 어떻게 접속할 것인가를 결정하는 것이다. 실제로 가장 널리 이용되는 제어기는 PID 제어기이며, 이때 P, I, D는 각각 비례, 적분 및 미분을 뜻한다. PID 제어기의 적분과 미분 요소들은 성능과 관련하여 각각의 의미를 가지고 있으며, 이들의 적용은 이 요소들의 기본적 특성에 대한 이해를 필요로 한다. 이제 제어기를 이해하기 위해 먼저 제어기의 PD 부분을 생각해 보자.

11-2 DESIGN WITH THE PD CONTROLLER

PD control adds a simple zero at $s=-K_P/K_D$ to the forward-path transfer function.

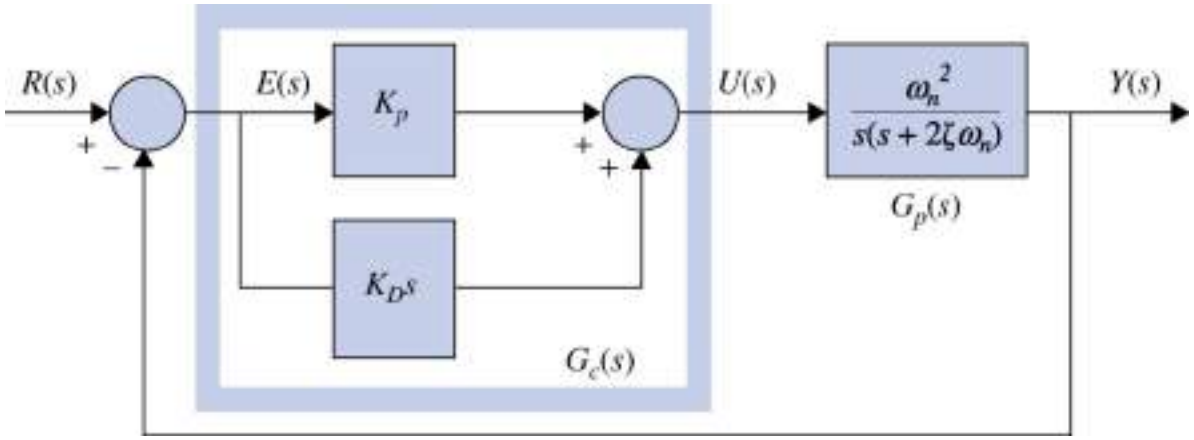


Figure 11-3 Control system with PD controller.

$$G_p(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \qquad (11\text{-}1)$$

$$G_c(s)=K_P+K_D s \qquad (11\text{-}2)$$

$$u(t)=K_P e(t)+K_D\frac{de(t)}{dt} \qquad (11\text{-}3)$$

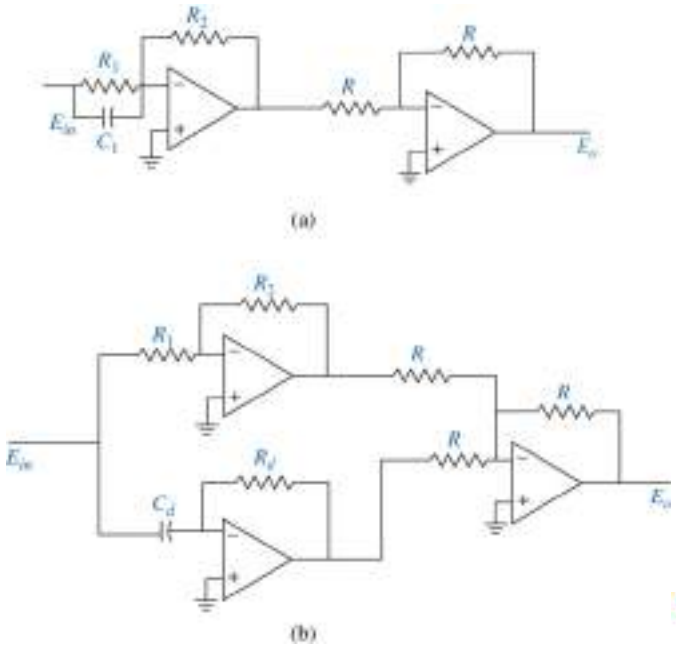


Figure 11-4 Op-amp circuit realization of the PD controller.

Comparing Eq. (11-2) with Eq. (11-4), we have

$$K_P=R_2/R_1 \quad K_D=R_2C_1 \qquad (11\text{-}5)$$

The transfer function of the circuit in Fig. 11-4*b* is

$$\frac{E_o(s)}{E_{in}(s)}=\frac{R_2}{R_1}+R_dC_ds \qquad (11\text{-}6)$$

Comparing Eq. (11-2) with Eq. (11-6), we have

$$K_P=R_2/R_1 \quad K_D=R_dC_d \qquad (11\text{-}7)$$

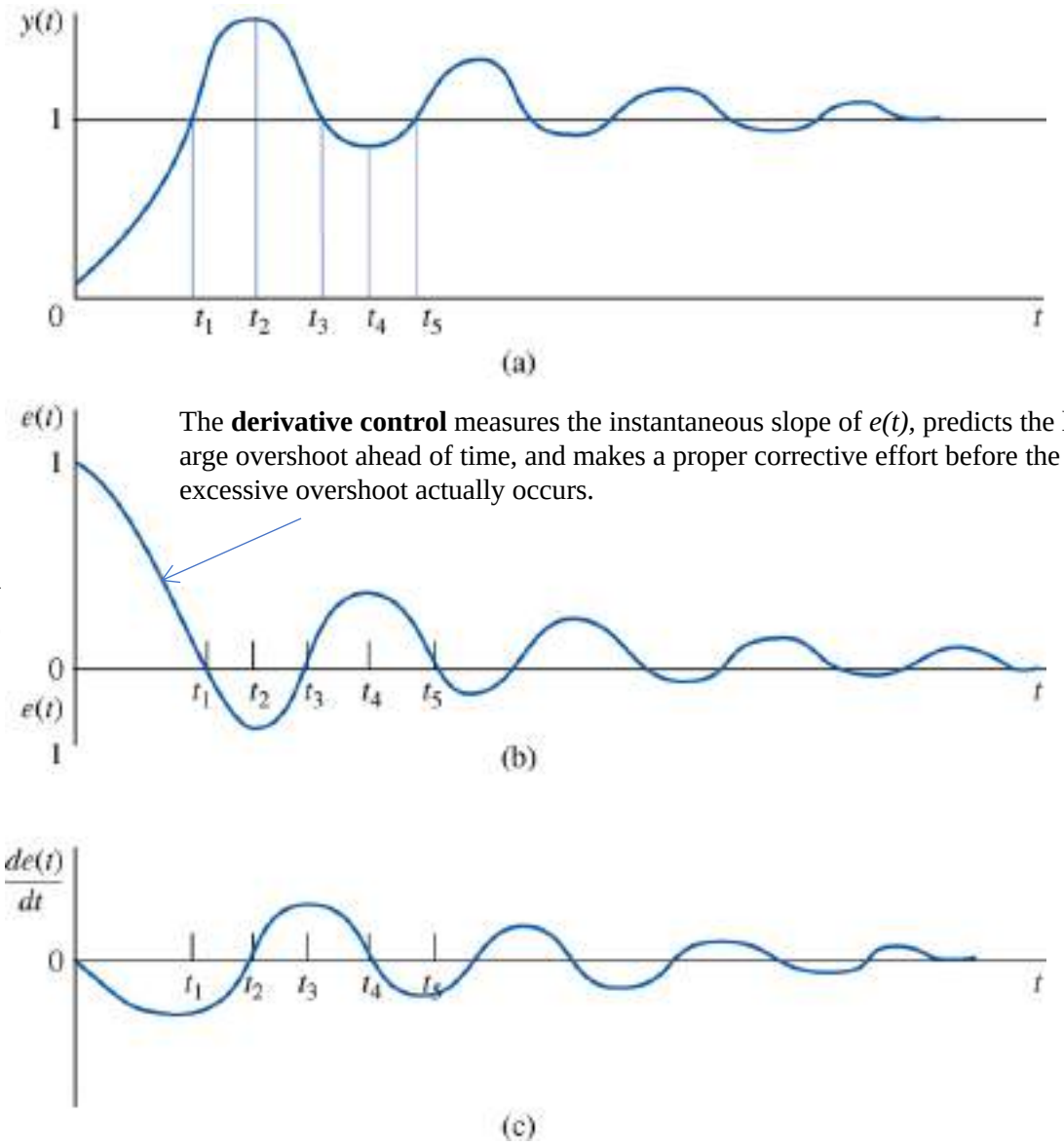
PD is essentially an anticipatory con trol that by knowing the slope, the co ntroller can anticipate direction of the error and use it to better control the pr ocess.

For $0<t<t_1$, $de(t)=dt$ is negative; this will reduce the original torque develop ed due to $e(t)$ alone.

2. For $t_1<t<t_2$, both $e(t)$ and $de(t)=dt$ a re negative, which means that the nega tive retarding torque developed will be greater than that with only proportiona l control.

3. For $t_2<t<t_3$, $e(t)$ and $de(t)=dt$ have opposite signs. Thus, the negative torq ue that originally contributes to the un dershoot is reduced also.

PD control adds a simple zero at $s=-K_p/K_D$ to the forward-path transfer function.



The **derivative control** measures the instantaneous slope of *e(t)*, predicts the l arge overshoot ahead of time, and makes a proper corrective effort before the excessive overshoot actually occurs.

Figure 11-5 Waveforms of $y(t)$, $e(t)$, and $de(t)/dt$, showing the effect of derivative control. (a) Unit-step response. (b) Error signal. (c) Time rate of change of the error signal.

- PD는 본질적으로 예측제어이다.

- 미분 또는 PD 제어는 오차가 시간에 따라 변할 때만정상상태오차에 영향을 미친다.

- 미분제어를 다른 면에서 살펴보면 $de(t)/dt$ 는 $e(t)$의 기울기를 나타내므로, PD 제어가 본질적으로 예측제어이다. 즉 기울기를 알고 있으므로, 제어기는 오차의 방향을 예측하고 이를 공정제어에 사용한다. 일반적으로 선형시스템에서 계단입력에 따른 $e(t)$ 또는 $y(t)$의 기울기가 크다면 높은 오버슈트가 발생한다. 미분제어는 $e(t)$의 순간적인 기울기를 측정하고 미리 과도한 오버슈트를 예측하며, 실제로 과도한 오버슈트가 일어나기 전에 적절한 교정노력을 취한다.
- 직관적으로 미분제어는 정상상태오차가 시간에 따라 변할 때만 시스템의 정상상태오차에 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 정상상태오차가 일정하다면, 이런 오차의 미분은 영이고 제어기의 미분항은 공정의 입력 역할을 하지 못한다. 그러나 만약 정상상태오차가 증가하면, $de(t)/dt$에 비례하여 다시 토크가 발생되고, 이로 인해 오차의 크기가 감소한다. 식 (11-8)은 PD 제어가 단위피드백 제어시스템의 정상상태오차를 결정하는 시스템의 형을 변경하지 않음을 나타낸다.

11-2-2 Frequency-Domain Interpretation of PD Control

- The PD controller is a high-pass filter.
- The PD controller has the disadvantage that it accentuates high-frequency noise.
- The PD controller will generally increase the BW and reduce the rise time of the step response.

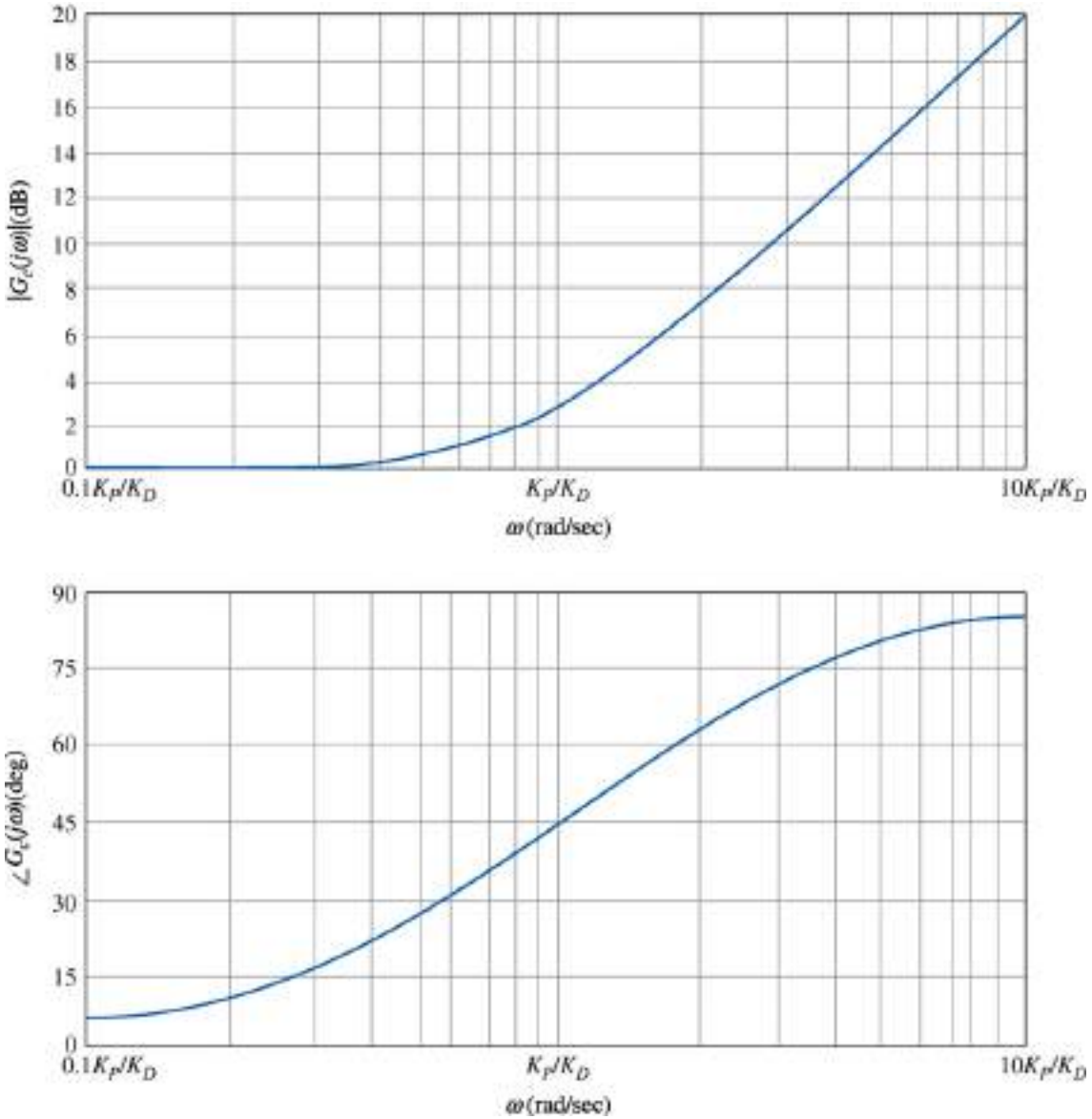


Figure 11-6 Bode diagram of $1+\frac{K_D s}{K_P}$, $K_P=1$.

- PD 제어기는 고역통과 필터이다.
- PD 제어기는 고주파수 잡음을 증폭시키는 단점이 있다.
- 진상 특성은 제어시스템의 위상여유를 향상시키는 데 이용될 수 있다. 불행하게도 PD 제어기의 크기 특성은 이득교차 주파수를 증가시킨다.

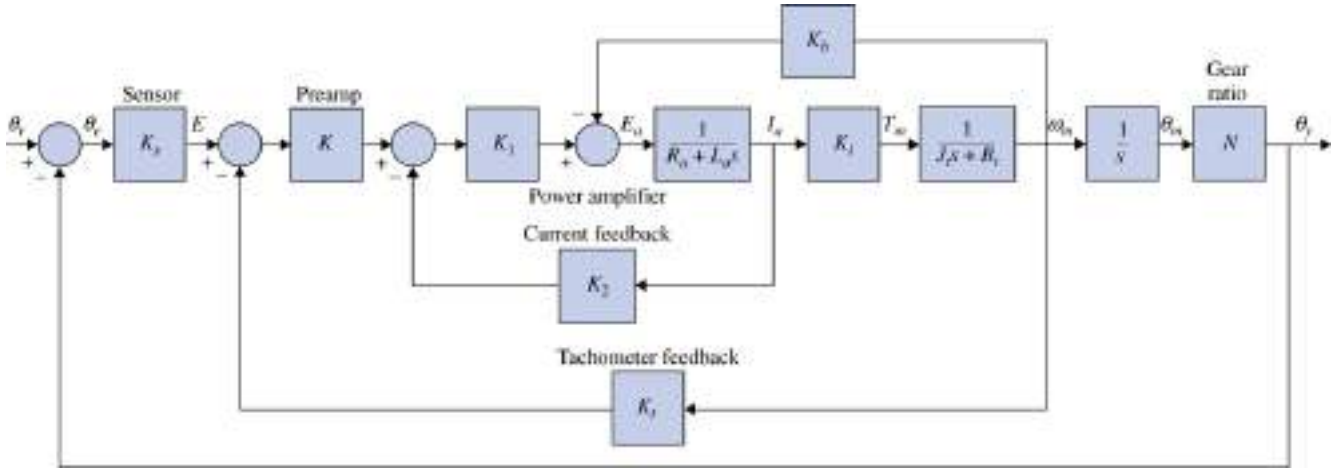
11-2-3 Summary of Effects of PD Control

A properly designed PD controller can affect the performance of a control system in the followin g ways:

1. Improving damping and reducing maximum overshoot.
2. Reducing rise time and settling time.
3. Increasing BW.
4. Improving GM, PM, and M_r.
5. Possibly accentuating noise at higher frequencies.
6. Possibly requiring a relatively large capacitor in circuit implementation.

EXAMPLE 11-2-1

Let us reconsider the second-order model of the aircraft attitude control system shown in Fig. 7-52.



$$G(s)=\frac{4500K}{s(s+361.2)} \qquad (11\text{-}10)$$

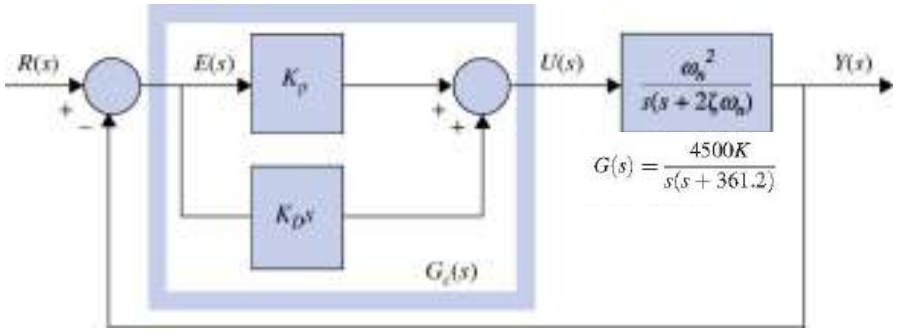
Let us set the performance specifications as follows:

Steady-state error due to unit-ramp input ≤ 0.000443

Maximum overshoot $\leq 5\%$

Rise time $t_r \leq 0.005$ s

2% Settling time $t_s \leq 0.005$ s



Time-Domain Design With the PD controller of Eq. (11-9) and $K = 181.17$, the forward-path transfer function of the system becomes

$$G(s) = \frac{\Theta_y(s)}{\Theta_e(s)} = \frac{815,265(K_p + K_D s)}{s(s + 361.2)} \tag{11-11}$$

The closed-loop transfer function is

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{815,265K_D\left(s + \dfrac{K_p}{K_D}\right)}{s^2 + (361.2 + 815,265K_D)s + 815,265K_p} \tag{11-12}$$

Equation (11-12) shows that the effects of the PD controller are as follows:

1. Adding a zero at $s = -K_p/K_D$ to the closed-loop transfer function
2. Increasing the *damping term*, which is the coefficient of the s term in the denominator, from 361.2 to $361.2 + 815,265K_D$
3. No impact on steady-state response

From Eq. (11-12) the following observations are made:

The steady-state error due to a unit-step input is $e_{ss} = 0$.

The ramp-error constant is

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{815,265K_p}{361.2} = 2257.1K_p \tag{11-13}$$

The steady-state error due to a unit-ramp input is $e_{ss} = 1/K_v = 0.000443/K_p$.

Also, from Eq. (11-12), the characteristic equation is written as

$$s^2 + (361.2 + 815{,}265K_D)s + 815{,}265K_p = 0 \tag{11-14}$$

which clearly shows the positive effect of K_D on damping.

Hence upon neglecting the zero, if we use a prototype second order transfer function, from Eq. (11-14)

$$\text{maximum overshoot} = 0.05 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{11-15}$$

provides the desired damping ratio for a 5 percent overshoot. Hence, $\zeta = 0.69$. Using the 2 percent settling time formula, for a 0.005 s settling time,

$$\text{2 percent settling time: } t_s = 0.005 \cong \frac{4.0}{\zeta\omega_n} \quad 0 < \zeta < 0.9 \tag{11-16}$$

the desired value of natural frequency is $\omega_n = 1{,}159.2$ rad/s. As a result,

$$K_p = \frac{(1159.2)^2}{815{,}265} = 1.648231 \tag{11-17}$$

$$\zeta = \frac{361.2 + 815{,}265K_D}{(2)(1159.2)} = 0.156 + 351.6K_D \tag{11-18}$$

Or,

$$K_D = 0.001519 \tag{11-19}$$

Note that from Eq. (11-13), the value of K_p in Eq. (11-17) automatically satisfies the steady-state error due to unit-ramp input ≤ 0.000443. With these values, the poles and the zero of the system are at

$$s_{1,2} = -\frac{(361.2 + 815,265K_D)}{2} \pm j\sqrt{\frac{(361.2 + 815,265K_D)^2}{4} - 815,265(K_P)}$$
$$= -800 \pm j838.9 \qquad (11\text{-}20)$$

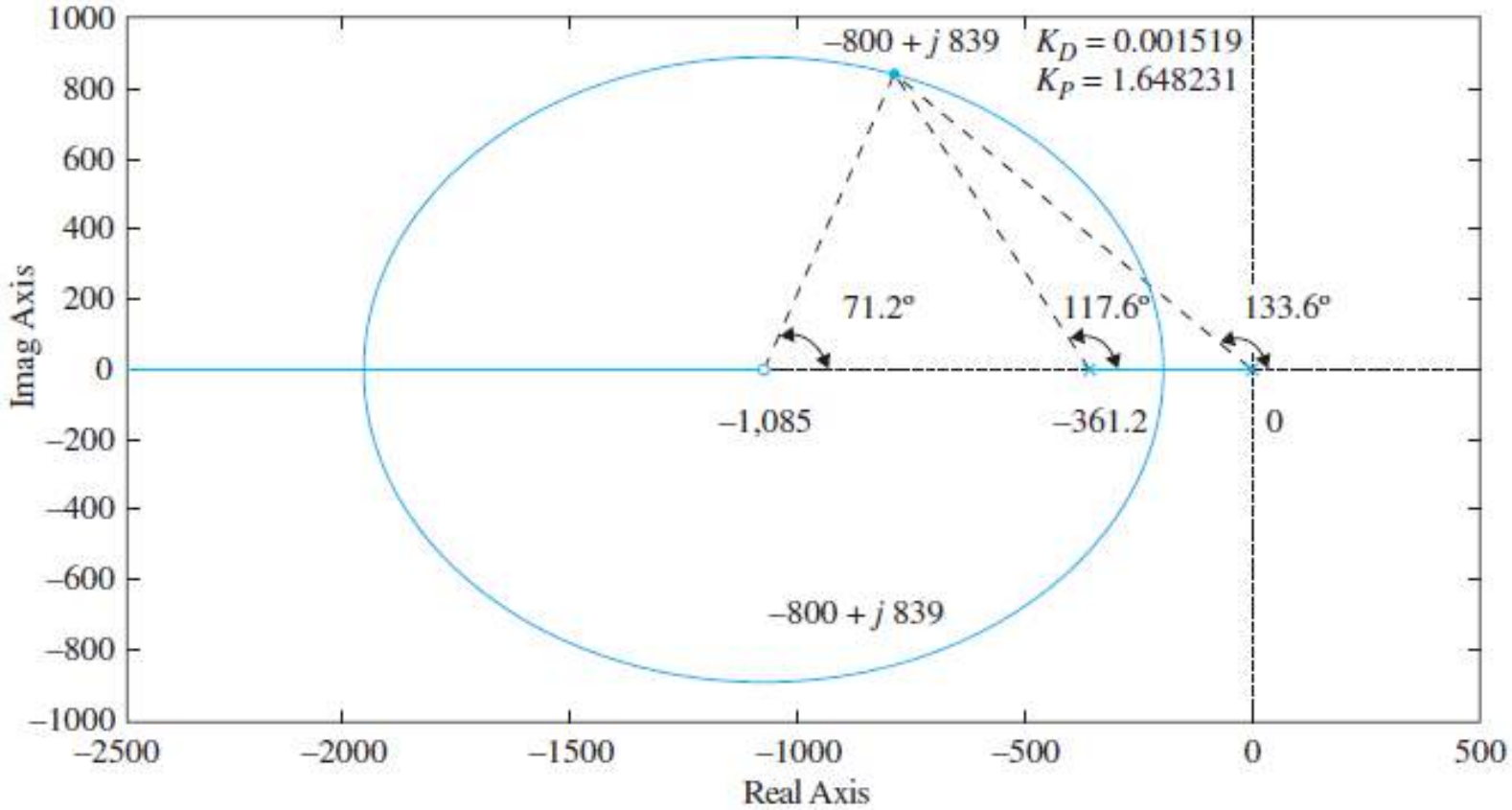
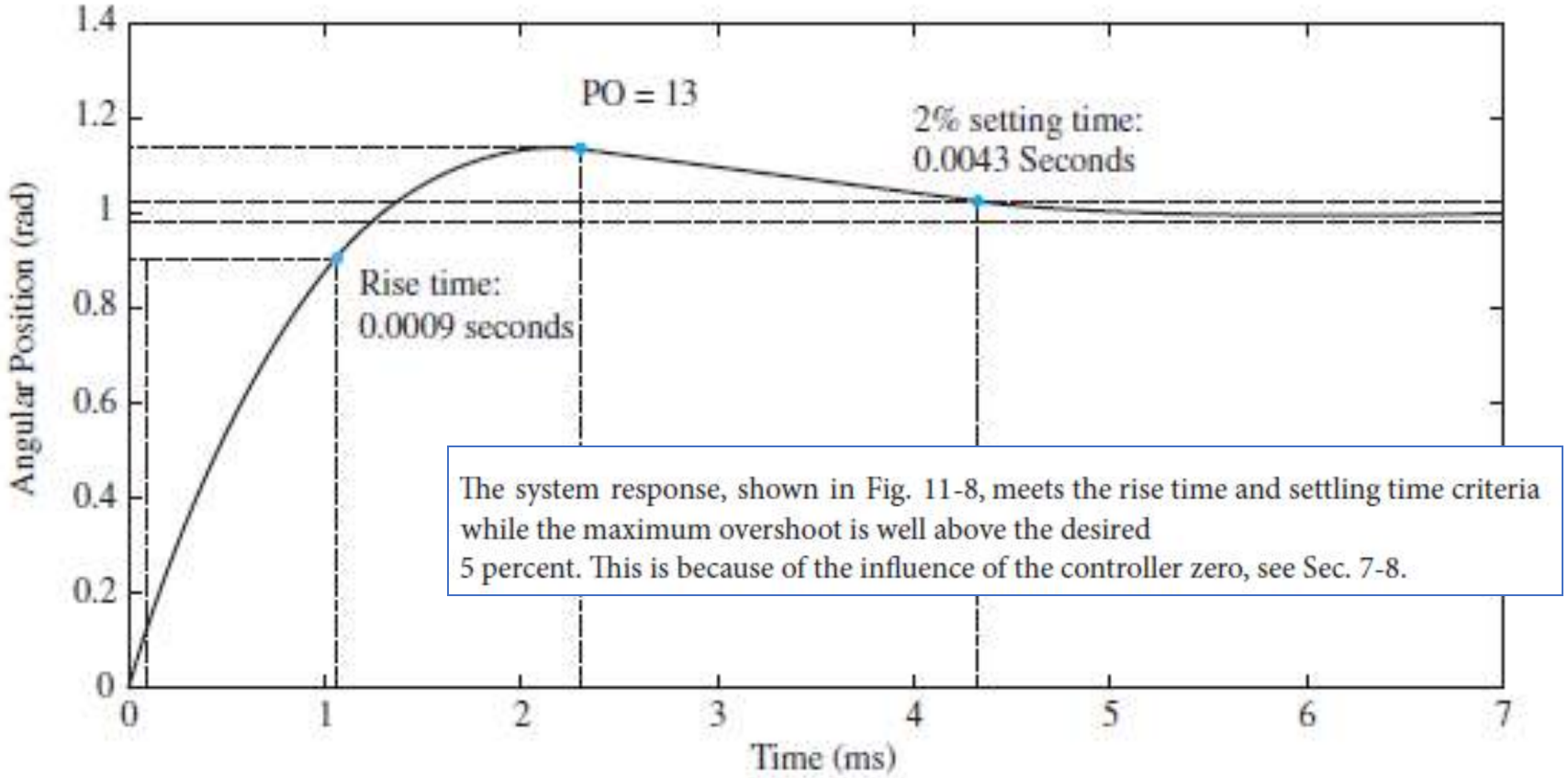


Figure 11-7 Root locus of Eq. (11-12) for the controller zero fixed at $s = -K_p/K_D = -1085$.

Recall from Eq. (8-19) in Chap. 8 that for the desired poles of the closed loop system to be on the root locus, the poles must meet the angle criterion. In our case, as shown in Fig. 11-7,

$$\angle(s+361.2)+\angle s-\angle(s+1{,}085)=117.6^\circ+133.6^\circ-71.2^\circ=180^\circ \qquad (11\text{-}22)$$

the closed loop poles and zero from will obviously meet the root-locus angle criterion.



The system response, shown in Fig. 11-8, meets the rise time and settling time criteria while the maximum overshoot is well above the desired 5 percent. This is because of the influence of the controller zero, see Sec. 7-8.

Figure 11-8 Unit-step response of Eq. (11-12) for the controller zero fixed at $s=-K_P/K_D=-1085$ and poles at $s_{1,2}=-800\pm j838.9$.

Always check whether the dc motor can provide the required torque to achieve the desired response. You must operate the motor below its stall torque limits.

desired response, we must move the poles of the system, along the root locus, to a new location while exploring the time response behavior. The easiest strategy is to substitute the fixed zero value $s=-K_P/K_D=-1085$ into Eq. (11-14) and solve for the closed loop poles as K_D increases. Fixing the zero of the controller has the advantage of reducing the number of unknown controller parameters from two to one. As a result the revised characteristic equation of the system is

$$s^2+(361.2+815,265K_D)s+815,265(1085K_D)=0 \tag{11-23}$$

Solving for the poles of the system in Eq. (11-14), we have

$$s_{1,2}=-\frac{(361.2+815,265K_D)}{2} \pm j\sqrt{\frac{(361.2+815,265K_D)^2}{4}-815,265(1085K_D)} \tag{11-24}$$

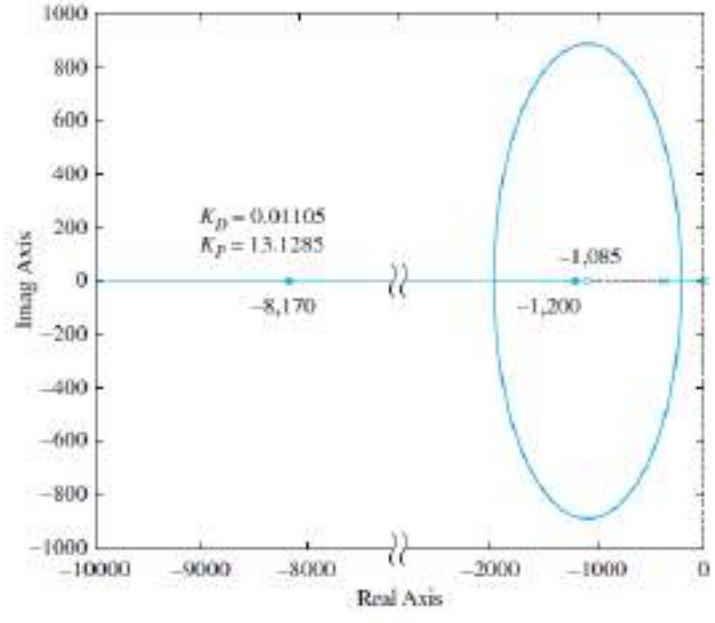


Figure 11-9 Root locus of Eq. (11-12) for the controller zero fixed at $s=-K_P/K_D=-1,085$, showing desired response poles for $K_D=0.01105$ and $K_P=13.1285$.

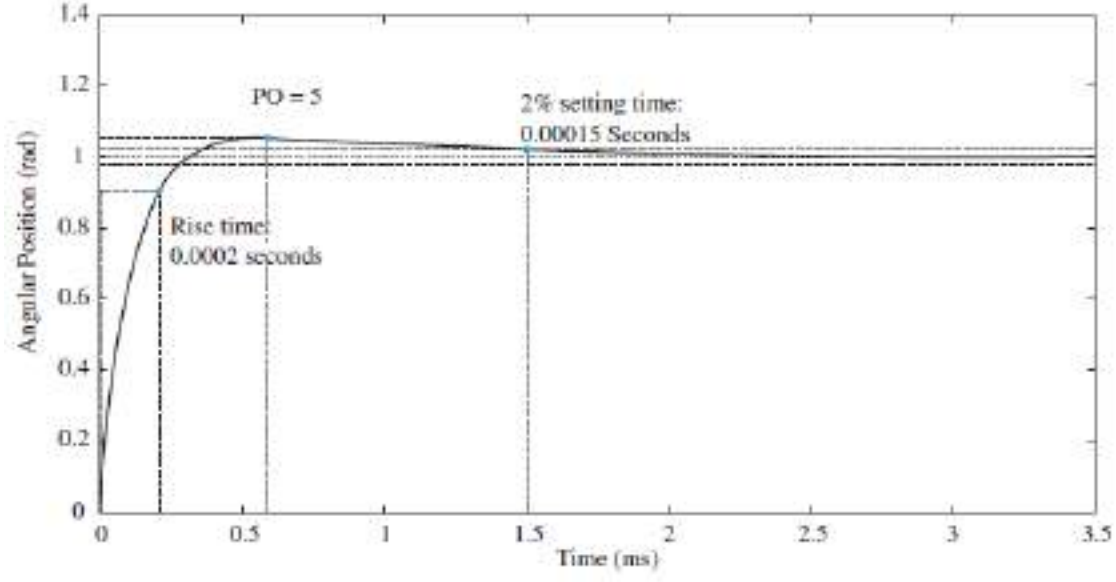


Figure 11-10 Desired unit-step response of Eq. (11-12) for $K_D=0.01105$ and $K_P=13.1285$.

Frequency-Domain Design

Frequency-Domain Design The Bode plot of Eq. (11-30) is used to conduct the frequency-domain design of the PD controller. Figure 11-18 shows the Bode plot for $K_p = 1$ and $K_D = 0$. The following performance data are obtained for the uncompensated system:

Gain margin = 3.6 dB

Phase margin = 7.77°

Resonant Peak $M_r = 7.62$

Bandwidth BW = 1408.83 rad/s

Gain crossover (GCO) = 888.94 rad/s

Phase crossover (PCO) = 1103.69 rad/s

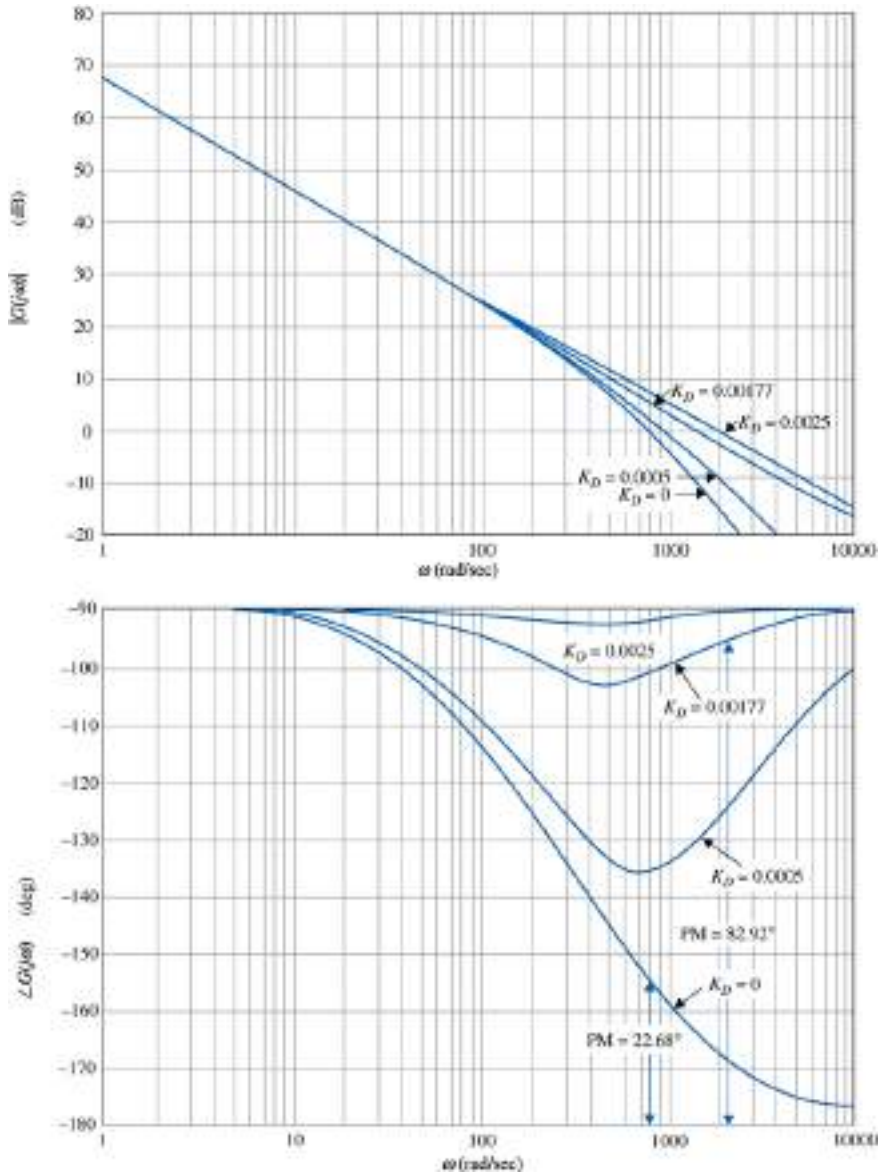


Figure 11-15 Bode plot of $G(s) = \dfrac{815,265(1 + K_D s)}{s(s + 361.2)}$.

The results in Table 11-3 show that the gain margin is always infinite, and thus the relative stability is measured by the phase margin. This is one example where the gain margin is not an effective measure of the relative stability of the system. When $K_D = 0.00177$, which corresponds to critical damping, the phase margin is 82.92°, the resonant peak M_r is 1.025, and BW is 1669 rad/s. The performance requirements in the frequency domain are all satisfied. Other effects of the PD control are that the BW and the gain-crossover frequency are increased. The phase-crossover frequency is always infinite in this case.

TABLE 11-3 Frequency-Domain Characteristics of the System in Example 11-2-1 with PD Controller

K_D	GM (dB)	PM (deg)	Gain CO (rad/s)	BW (rad/s)	M_r	t_r (s)	t_s (s)	Maximum Overshoot (%)
0	∞	22.68	868	1370	2.522	0.00125	0.0151	52.2
0.0005	∞	46.2	913.5	1326	1.381	0.0076	0.0076	25.7
0.00177	∞	82.92	1502	1669	1.025	0.00119	0.0049	4.2
0.0025	∞	88.95	2046	2083	1.000	0.00103	0.0013	0.7

EXAMPLE 9-2-2 Consider the third-order aircraft attitude control system discussed in Chapter 5 with the forward-path transfer function given in Eq. (5-153),

$$G(s) = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s(s^2 + 3408.3s + 1,204,000)} \tag{9-19}$$

Let us set the performance specifications as follows:

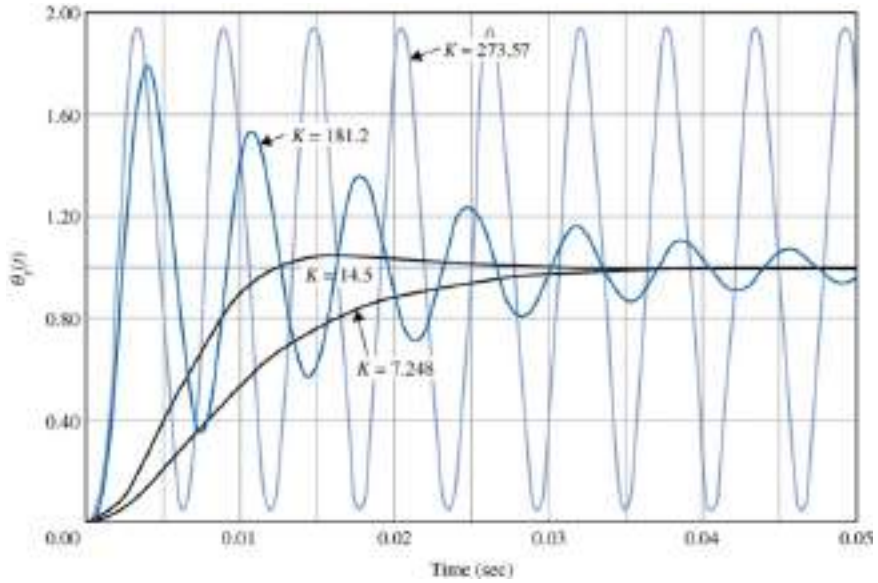
Steady-state error due to unit-ramp input ≤ 0.000443

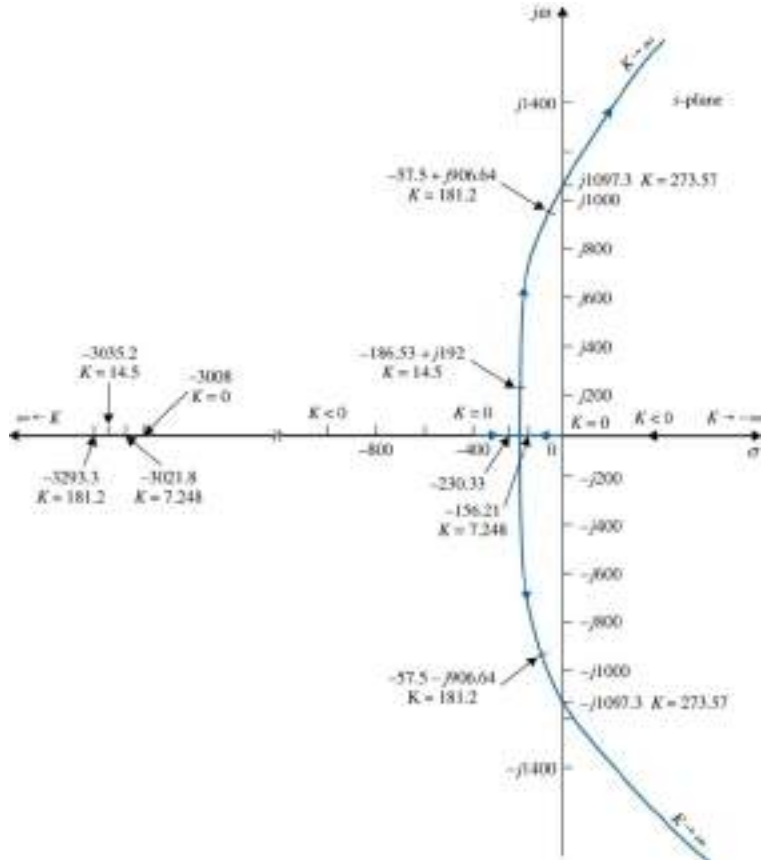
Maximum overshoot $\leq 5\%$

Rise time $t_r \leq 0.005$ sec

Settling time $t_s \leq 0.005$ sec

From Chapter 5, when K =181.17, the maximu m overshoot of the system is 78.88%.





Time-Domain Design

Setting $K_P = 1$ arbitrarily, the characteristic equation of the closed-loop system is written

$$s^3 + 3408.3s^2 + (1,204,000 + 2.718 \times 10^9 K_D)s + 2.718 \times 10^9 = 0 \qquad (9\text{-}21)$$

To apply the root-contour method, we condition Eq. (9-21) as

$$1 + G_{eq}(s) = 1 + \frac{2.718 \times 10^9 K_D s}{s^3 + 3408.2s^2 + 1,204,000s + 2.718 \times 10^9} = 0 \qquad (9\text{-}22)$$

$$G_{eq}(s) = \frac{2.718 \times 10^9 K_D s}{(s + 3293.3)(s + 57.49 + j906.6)(s + 57.49 - j906.6)} \qquad (9\text{-}23)$$

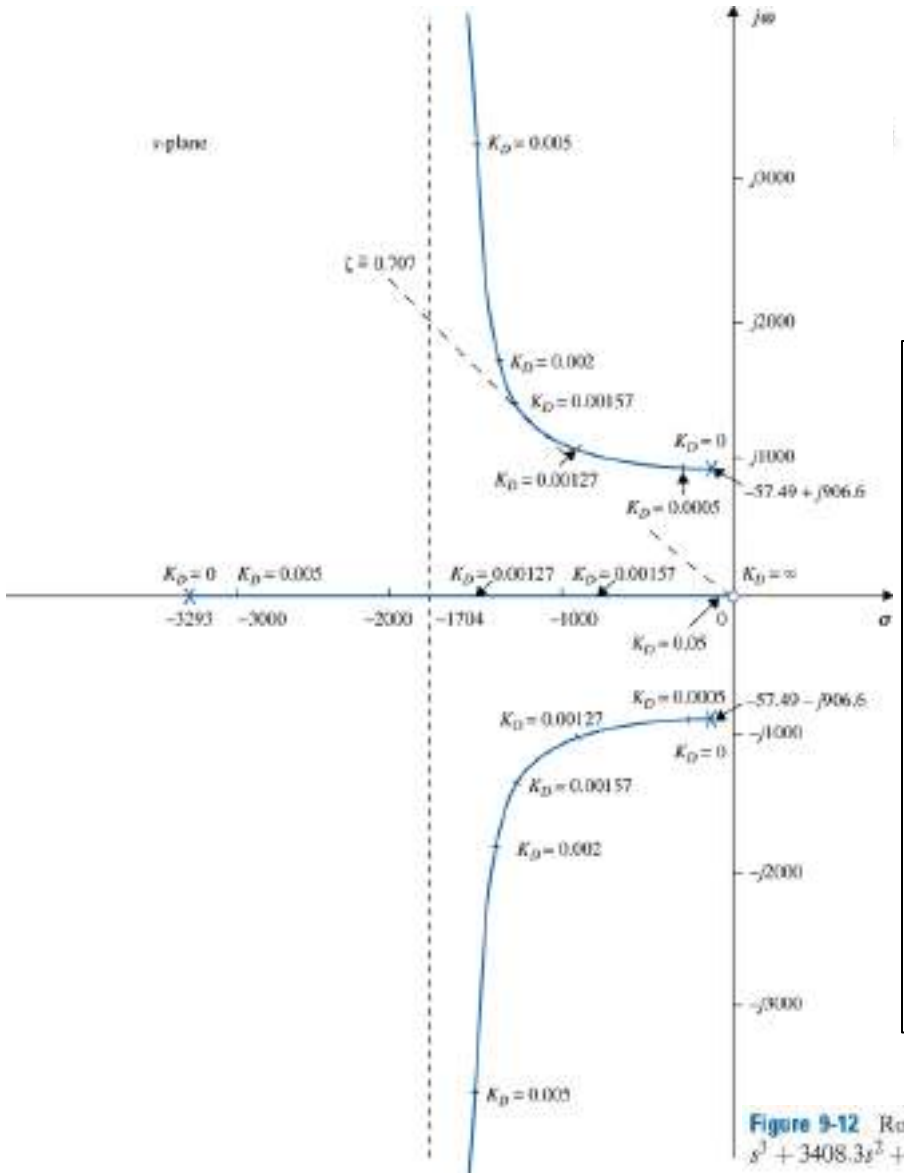


Figure 9-12 Root contours of $s^3 + 3408.3s^2 + (1,204,000 + 2.718 \times 10^9 K_D)s + 2.718 \times 10^9 = 0$.

The PD controller may improve the relative stability of the system. As K_D increases, one root of the characte ristic equation moves from -3293.3 toward the origin, while the two complex roots start out toward the left an d eventually approach the vertical asymptotes that inter sect at s = - 1704. **The immediate assessment of the si tuation is that, if the value of K_D is too large, the two complex roots will actually have reduced damping while increasing the natural frequency of the system .** It appears that the ideal location for the two complex characteristic equation roots, from the standpoint of rel ative stability, is near the bend of the root contour, whe re the relative damping ratio is approximately 0.707.

Table 9-3 gives the results of maximum overshoot, rise time, settling time, and the roots of the characteristic equation as functions of the parameter K_D. The following conclusions are drawn on the effects of the PD controller on the third-order system.

1. The minimum value of the maximum overshoot, 11.37%, occurs when K_D is approximately 0.002.
2. Rise time is improved (reduced) with the increase of K_D.
3. Too high a value of K_D will actually increase the maximum overshoot and the settling time substantially. The latter is because the damping is reduced as K_D is increased indefinitely.

TABLE 9-3 Time-Domain Attributes of the Third-Order System in Example 9-2-2 with PD Controller

K_D	% Maximum Overshoot	t_r (sec)	t_s (sec)	Characteristic Equation Roots	
0	78.88	0.00125	0.0495	−3293.3,	$-57.49 \pm j906.6$
0.0005	41.31	0.00120	0.0106	−2843.07,	$-282.62 \pm j936.02$
0.00127	17.97	0.00100	0.00398	−1523.11,	$-942.60 \pm j946.58$
0.00157	14.05	0.00091	0.00337	−805.33,	$-1301.48 \pm j1296.59$
0.00200	11.37	0.00080	0.00255	−531.89,	$-1438.20 \pm j1744.00$
0.00500	17.97	0.00042	0.00130	−191.71,	$-1608.29 \pm j3404.52$
0.01000	31.14	0.00026	0.00093	−96.85,	$-1655.72 \pm j5032$
0.05000	61.80	0.00010	0.00144	−19.83,	$-1694.30 \pm j11583$

Fig. 9-13 shows the unit-step responses of the system with the PD controller for several values of K_D. The conclusion is that, while the PD control does improve the damping of the system, it does not meet the maximum-overshoot requirement.

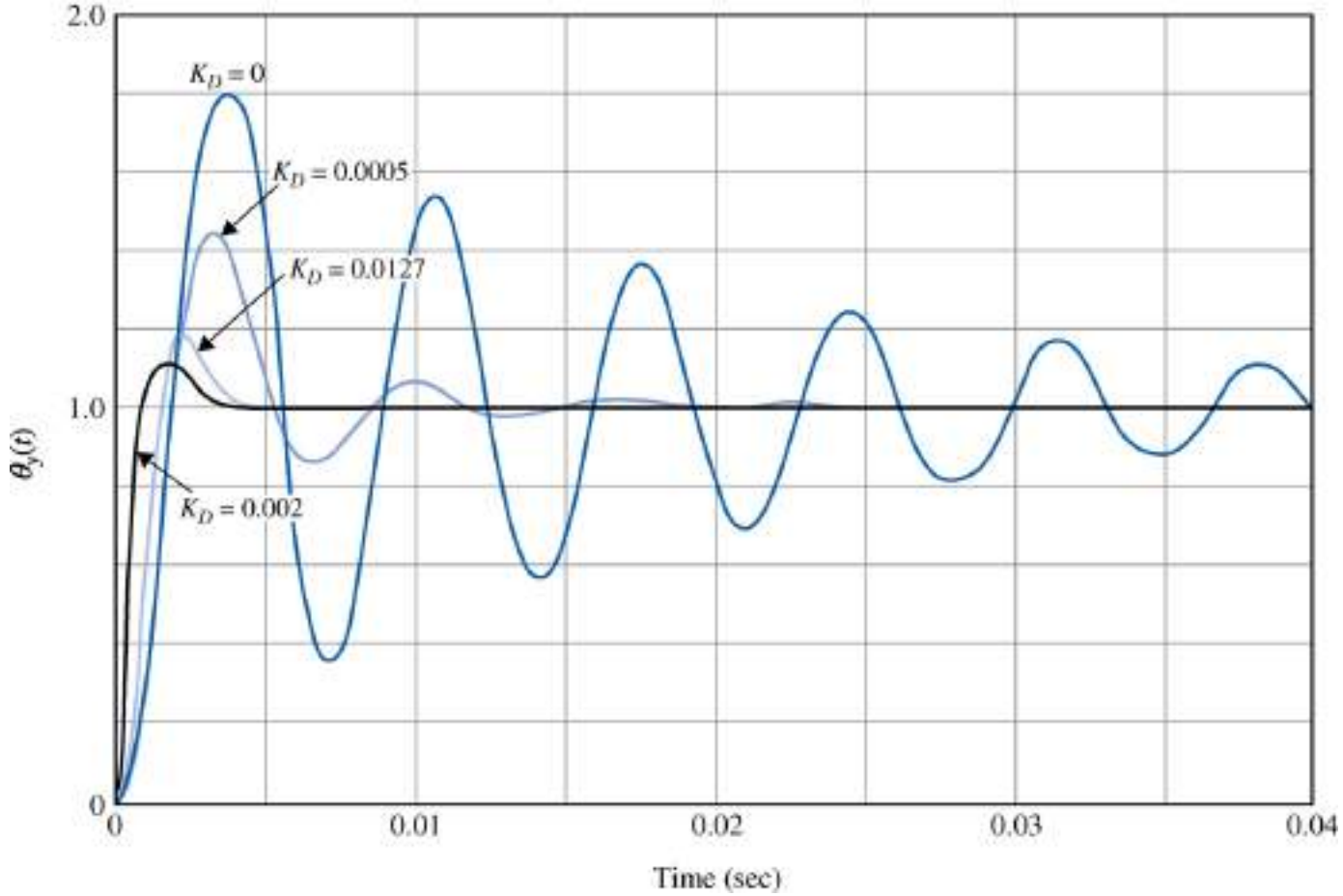


Figure 9-13 Unit-step responses of the system in Example 9-2-2 with PD controller.

Frequency-Domain Design

The Bode plot of Eq. (9-20) is used to conduct the frequency-domain design of the PD controller. Fig. 9-14 shows the Bode plot for $K_P = 1$ and $K_D = 0$. The following performance data are obtained for the uncompensated system:

Gain margin = 3.6 dB

Phase margin = 7.77°

Resonant Peak $M_r = 7.62$

Bandwidth BW = 1408.83 rad/sec

Gain crossover (GCO) = 888.94 rad/sec

Phase crossover (PCO) = 1103.69 rad/sec

TABLE 9-4 Frequency-Domain Characteristics of the Third-Order System in Example 9-2-2 with PD Controller

K_D	GM (dB)	PM (deg)	M_r	BW (rad/sec)	Gain CO (rad/sec)	Phase CO (rad/sec)
0	3.6	7.77	7.62	1408.83	888.94	1103.69
0.0005	∞	30.94	1.89	1485.98	935.91	∞
0.00127	∞	53.32	1.19	1939.21	1210.74	∞
0.00157	∞	56.83	1.12	2198.83	1372.30	∞
0.00200	∞	58.42	1.07	2604.99	1620.75	∞
0.00500	∞	47.62	1.24	4980.34	3118.83	∞
0.01000	∞	35.71	1.63	7565.89	4789.42	∞
0.0500	∞	16.69	3.34	17989.03	11521.00	∞

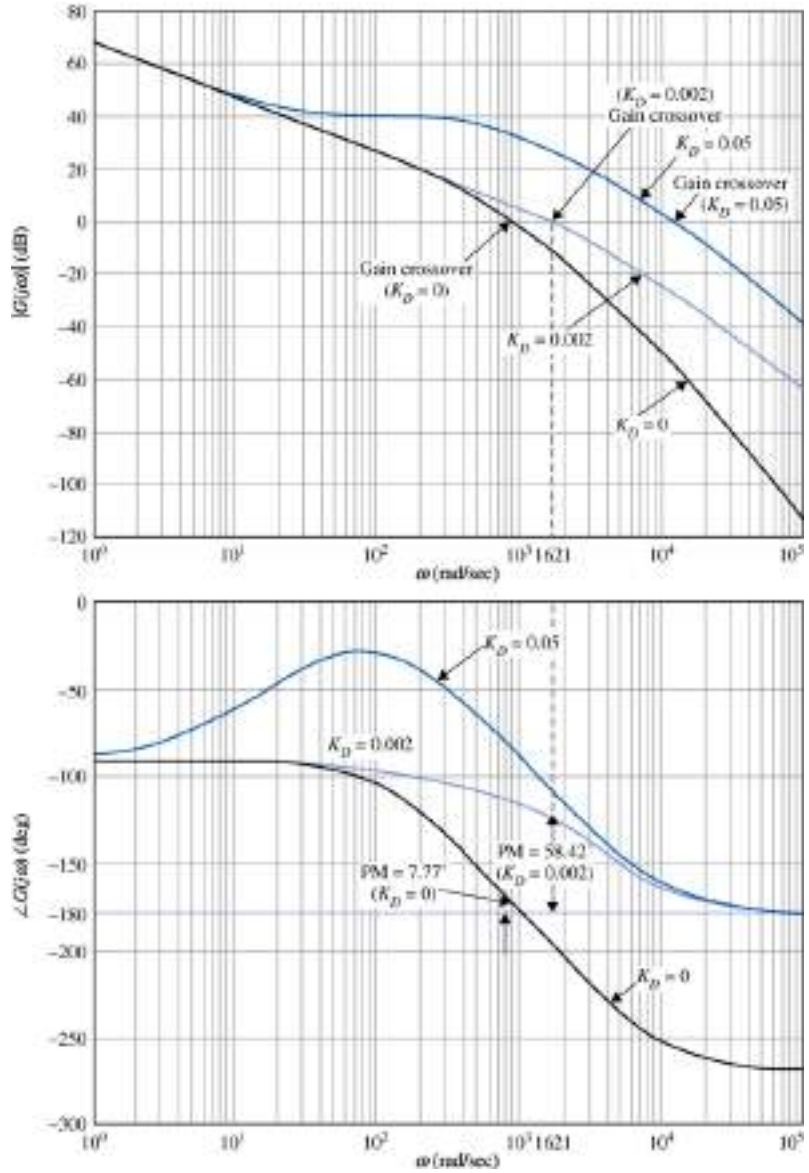


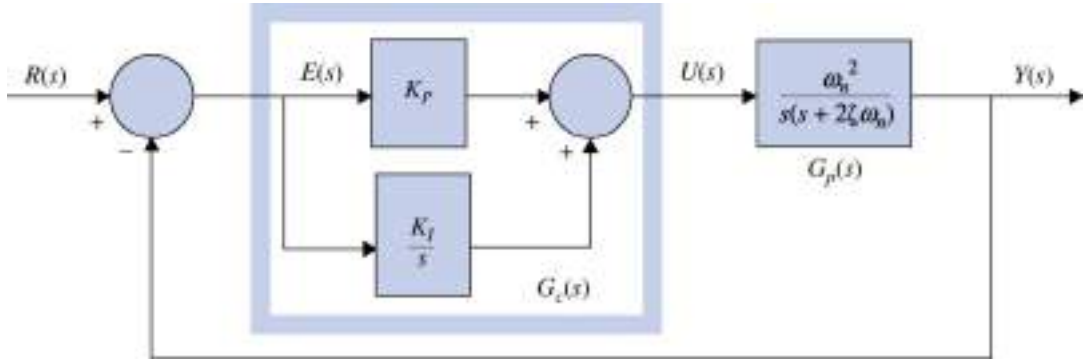
Figure 9-14 Bode diagram of $G(s)$ of the system in Example 9-2-2 with PD controller.

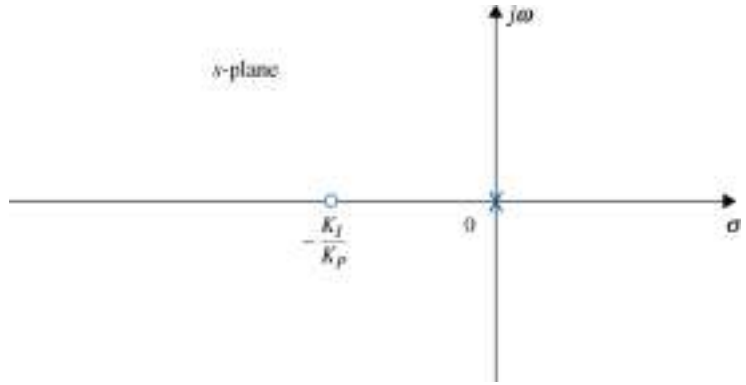
When $K_D = 0.002$, the phase margin is at a maximum of $58.42°$, and M_r is also minimum at 1.07, which happens to agree with the optimal value obtained in the time-domain design summarized in Table 9-3. When the value of K_D is increased beyond 0.002, the phase margin decreases, which agrees with the findings from the time-domain design that large values of K_D actually decreases damping. However, the BW and the gain crossover increase continuously with the increase in K_D. The frequency-domain design again shows that the PD control falls short in meeting the performance requirements imposed on the system. Just as in the time-domain design, we have demonstrated that if the original system has very low damping, or is unstable, PD control may not be effective in improving the stability of the system. Another situation under which PD control may be ineffective is if the slope of the phase curve near the gain-crossover frequency is steep, in which case the rapid decrease of the phase margin due to the increase of the gain crossover from the added gain of the PD controller may render the additional phase ineffective.

11-3 DESIGN WITH THE PI CONTROLLER

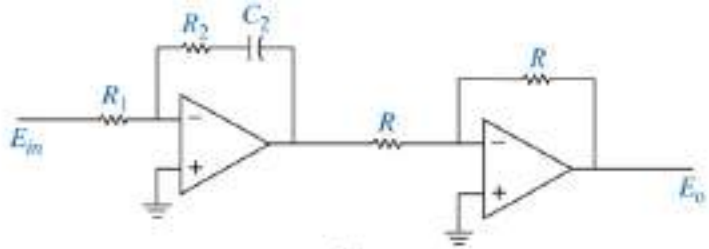
PD 제어기가 높은 대역폭과 공진주파수의 대가로 제어시스템의 감쇠와 상승시간을 개선할 수 있고, 계단함수입력의 경우와는 달리, 제어기가 시간에 따라 변하지 않으며, 정상상태오차에 영향을 미치지 않음을 알 수 있었다. 따라서 PD 제어기는 여러 가지 상황에서 보상 목적을 만족시키지 못할 수가 있다.

11-3 DESIGN WITH THE PI CONTROLLER





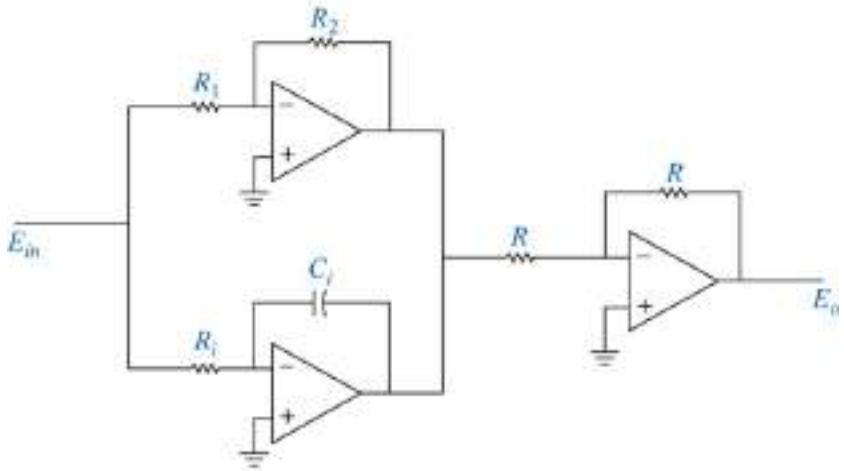
$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \tag{9-24}$$



(a)

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 C_2 s} \tag{9-25}$$

$$K_P = \frac{R_2}{R_1} \quad K_I = \frac{R_2}{R_1 C_2} \tag{9-26}$$



(b)

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_i C_i s} \tag{9-27}$$

$$K_P = \frac{R_2}{R_1} \quad K_I = \frac{1}{R_i C_i} \tag{9-28}$$

Figure 9-16 Op-amp-circuit realization of the PI controller, $G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$. (a) Two-op-amp circuit. (b) Three-op-amp circuit.

Clearly, the immediate effects of the PI controller are as follows:

1. Adding a zero at $s = -K_I/K_P$ to the forward-path transfer function.
2. Adding a pole at $s = 0$ to the forward-path transfer function. This means that the system type is increased by 1 to a type 2 system. Thus, the steady-state error of the original system is improved by one order; that is, if the steady-state error to a given input is constant, the PI control reduces it to zero (provided that the compensated system remains stable).

The system in Fig. 9-15, with the forward-path transfer function in Eq. (9-29), will now have a zero steady-state error when the reference input is a ramp function. However, because the system is now of the third order, *it may be less stable* than the original second-order system or even become *unstable* if the parameters K_P and K_I are not properly chosen.

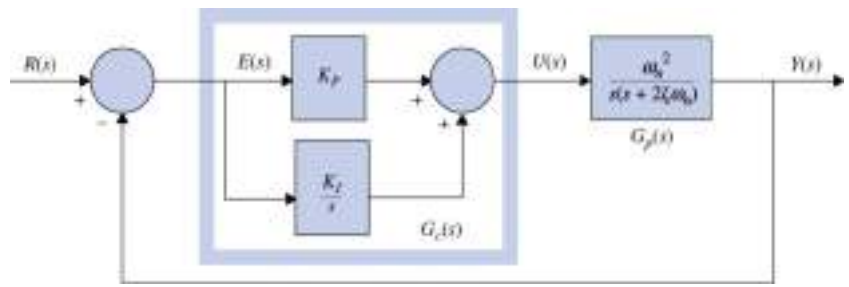


Figure 9-15 Control system with PI controller.

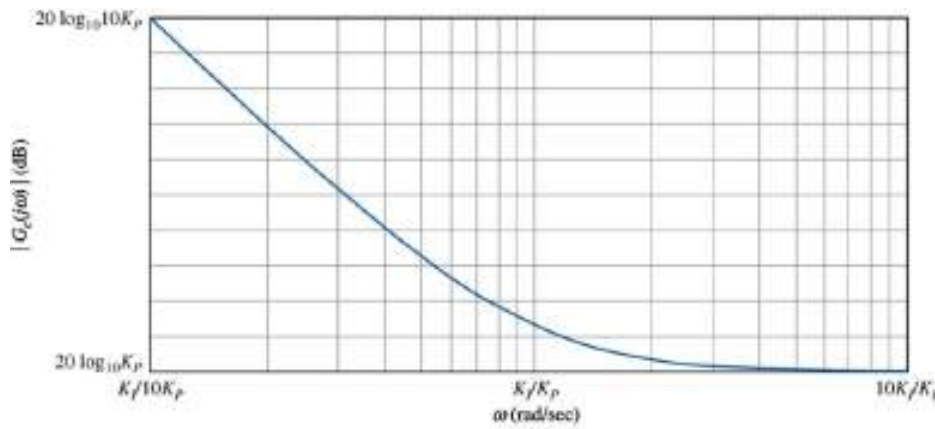
11-3-1 Time-Domain Interpretation and Design of PI Control

A viable method of designing the PI control is to select the zero at $s = -K_I/K_P$ so that it is relatively close to the origin and away from the most significant poles of the process; the values of K_P and K_I should be relatively small.

- PI 제어기는 안정도의 대가로 정상상태오차를 개선하는 것처럼 보인다. 그러나 Gc(s)의 영점의 위치가 적당하게 선정된다면 감쇠와 정상상태오차 모두를 개선할 수 있다. PI 제어기는 본질적으로 저역통과필터이므로 보상된 시스템은 일반적으로 느린 상승시간과 긴 정정시간을 가진다. PI 제어기를 설계하는 방법은 영점이 상대적으로 원점에 가깝고 공정의 주도극에서는 멀리 떨어지도록 $s = -K_I/K_P$에 선택하며 K_P와 K_I의 값들은 모두 비교적 작게 선택하는 것이다.

11-3-2 Frequency-Domain Interpretation and Design of PI Control

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_I\left(1 + \frac{K_P}{K_I}s\right)}{s} \qquad (9\text{-}30)$$



The PI controller is essentially a low-pass filter, the compensated system usually will have a slo wer rise time and longer settling time.

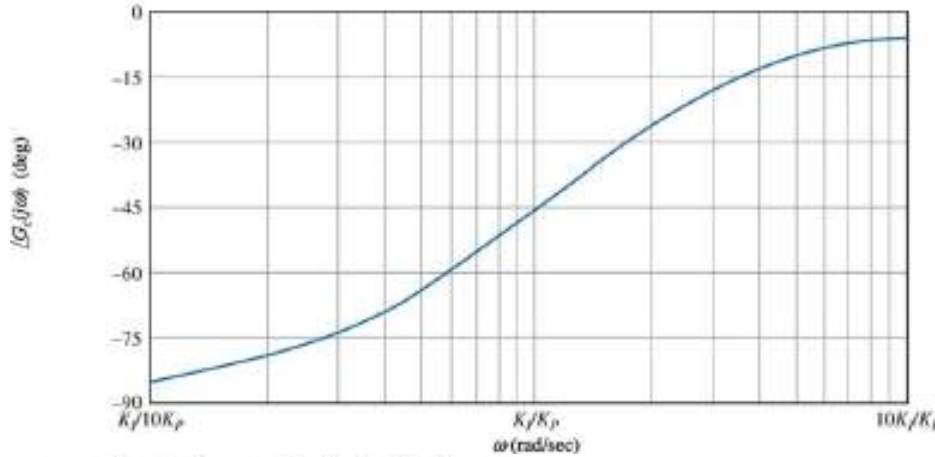


Figure 9-18 Bode diagram of the PI controller. $G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$

The Bode plot of $G_c(j\omega)$ is shown in Fig. 9-18. Notice that the magnitude of $G_c(j\omega)$ at $\omega = \infty$ is $20 \log_{10} K_P$ dB, which represents an attenuation if the value of K_P is less than 1. This attenuation may be utilized to improve the stability of the system. The phase of $G_c(j\omega)$ is always negative, which is detrimental to stability. Thus, we should place the corner frequency of the controller, $\omega = K_I/K_P$, as far to the left as the bandwidth requirement allows, so the phase-lag properties of $G_c(j\omega)$ do not degrade the achieved phase margin of the system.

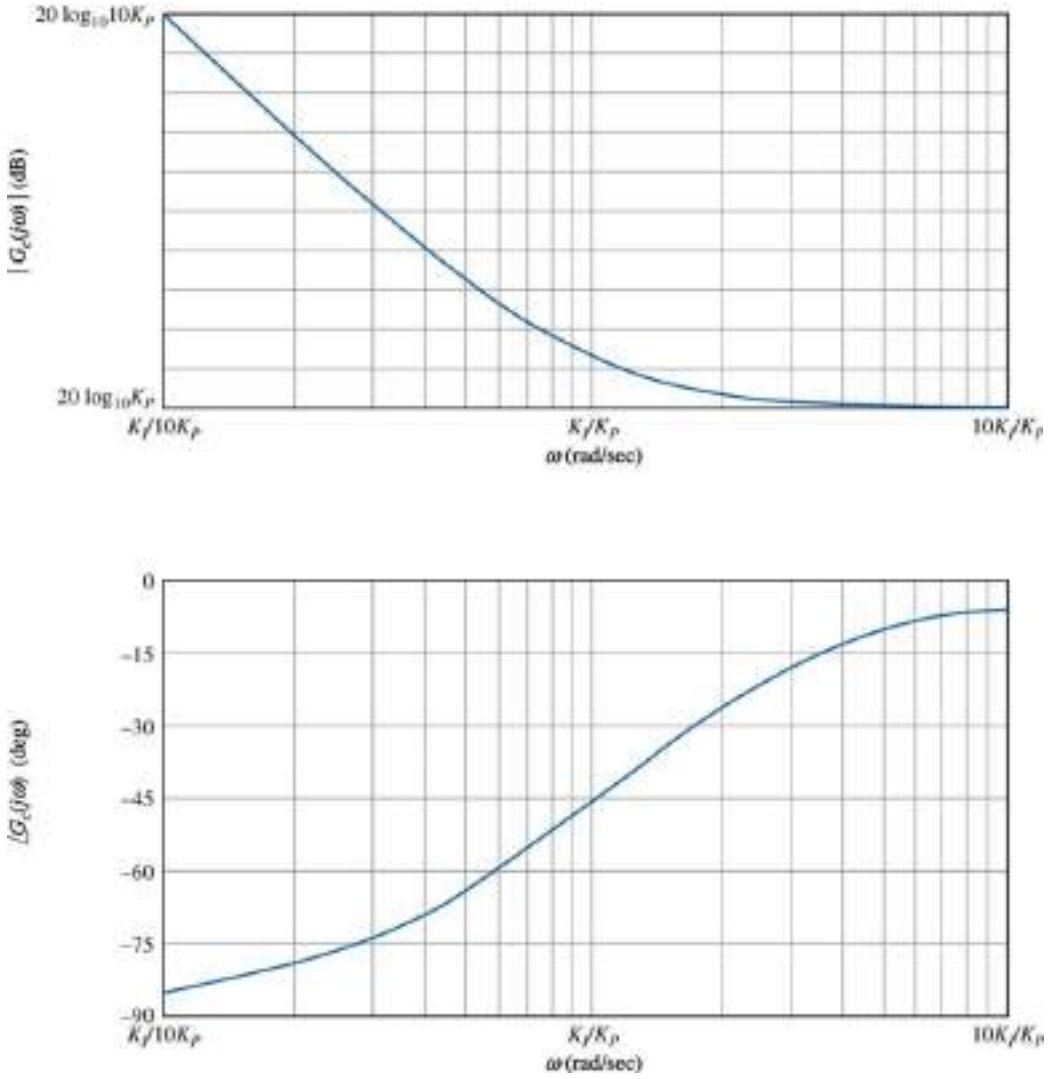


Figure 9-18 Bode diagram of the PI controller. $G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$

The frequency-domain design procedure for the PI control to realize a given phase margin is outlined as follows:

1. The Bode plot of the forward-path transfer function $G_p(s)$ of the uncompensated system is made with the loop gain set according to the steady-state performance requirement.
2. The phase margin and the gain margin of the uncompensated system are determined from the Bode plot. For a specified phase margin requirement, the new gain-crossover frequency ω_g' corresponding to this phase margin is found on the Bode plot. The magnitude plot of the compensated transfer function must pass through the 0-dB-axis at this new gain-crossover frequency in order to realize the desired phase margin.
3. To bring the magnitude curve of the uncompensated transfer function down to 0 dB at the new gain-crossover frequency ω_g', the PI controller must provide the amount of attenuation equal to the gain of the magnitude curve at the new gain-crossover frequency. In other words, set

$$\left| G_P\left(j\omega_g' \right) \right|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} K_P \text{ dB} \quad K_P < 1 \tag{9-31}$$

from which we have

$$K_P = 10^{-\left| G_P\left(j\omega_g' \right) \right|_{\text{dB}}/20} \quad K_P < 1 \tag{9-32}$$

Once the value of K_P is determined, it is necessary only to select the proper value of K_I to complete the design. As a general guideline, K_I/K_P should correspond to a frequency that is at least one decade, sometimes as much as two decades, below ω_g'. That is, we set

$$\frac{K_I}{K_P} = \frac{\omega_g'}{10} \text{ rad/sec} \tag{9-33}$$

Within the general guideline, the selection of the value of K_I/K_P is pretty much at the discretion of the designer, who should be mindful of its effect on BW and its practical implementation by an op-amp circuit.

4. The Bode plot of the compensated system is investigated to see if the performance specifications are all met.
5. The values of K_I and K_P are substituted in Eq. (9-30) to give the desired transfer function of the PI controller.

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_I\left(1 + \frac{K_P}{K_I}s\right)}{s} \tag{9-30}$$

Based on the preceding discussions, we can **summarize** the advantages and disadvantages of a properly designed PI controller as the following:

1. Improving damping and reducing maximum overshoot.
2. Increasing rise time.
3. Decreasing BW.
4. Improving gain margin, phase margin, and M_r.
5. Filtering out high-frequency noise.

It should be noted that in the PI controller design process, selection of a proper combination of K_I and K_P, so that the capacitor in the circuit implementation of the controller is not excessively large, is more difficult than in the case of the PD controller.

EXAMPLE 11-3-1

Consider the second-order attitude-control system discussed in Example 9-2-1. Applying the PI controller of Eq. (9-24), the forward-path transfer function of the system becomes

$$G(s) = G_c(s)G_P(s) = \frac{4500KK_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 361.2)} \tag{9-34}$$

Time-Domain Design

Let the time-domain performance requirements be

Steady-state error due to parabolic input $t^2u_s(t)/2 \leq 0.2$

Maximum overshoot $\leq 5\%$

Rise time $t_r \leq 0.01$ sec

Settling time $t_s \leq 0.02$ sec

The parabolic-error constant is

$$\begin{aligned} K_a &= \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{4500KK_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 361.2)} \\ &= \frac{4500KK_I}{361.2} = 12.46KK_I \end{aligned} \tag{9-35}$$

The steady-state error due to the parabolic input $t^2u_s(t)/2$ is

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{0.08026}{KK_I} (\leq 0.2) \tag{9-36}$$

Let us set $K = 181.17$, simply because this was the value used in Example 9-2-1. Apparently, to satisfy a given steady-state error requirement for a parabolic input, the larger the K, the smaller K_I can be. Substituting $K = 181.17$ in Eq. (9-36) and solving K_I for the minimum steady-state error requirement of 0.2, we get the minimum value of K_I to be 0.002215. If necessary, the value of K can be adjusted later.

With $K = 181.17$, the characteristic equation of the closed-loop system is

$$s^3 + 361.2s^2 + 815,265K_P s + 815,265K_I = 0 \tag{9-37}$$

Applying Routh's test to Eq. (9-37) yields the result that the system is stable for $0 < K_I/K_P < 361.2$. This means that the zero of $G(s)$ at $s = -K_I/K_P$ cannot be placed too far to the left in the left-half s-plane, or the system will be unstable. Let us place the zero at $-K_I/K_P$ relatively close to the origin. For the present case, the most significant pole of $G_P(s)$, besides the pole at $s = 0$, is at -361.2. Thus, K_I/K_P should be chosen so that the following condition is satisfied:

$$\frac{K_I}{K_P} \ll 361.2 \tag{9-38}$$

With the condition in Eq. (9-38)

$$G(s) = G_c(s)G_P(s) = \frac{4500KK_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 361.2)} \quad (9\text{-}34)$$

$$\frac{K_I}{K_P} \ll 361.2 \quad (9\text{-}38)$$

$$G(s) \cong \frac{815,265K_P}{s(s + 361.2)} \quad (9\text{-}39)$$

where the term K_I/K_P in the numerator is neglected when compared with the magnitude of s, which takes on values along the operating points on the complex portion of the root loci that correspond to, say, a relative damping ratio in the range of $0.7 < \zeta < 1.0$. Let us assume that we wish to have a relative damping ratio of 0.707. From Eq. (9-39), the required value of K_P for this damping ratio is 0.08. This should also be true for the third-order system with the PI controller if the value of K_I/K_P satisfies Eq. (9-38). Thus, with $K_P = 0.08$, $K_I = 0.8$; the root loci in Fig. 9-19 show that the relative damping ratio of the two complex roots is approximately 0.707. In fact, the three characteristic equation roots are at

$$s = -10.605,\ -175.3 + j175.4, \text{ and } -175.3 - j175.4$$

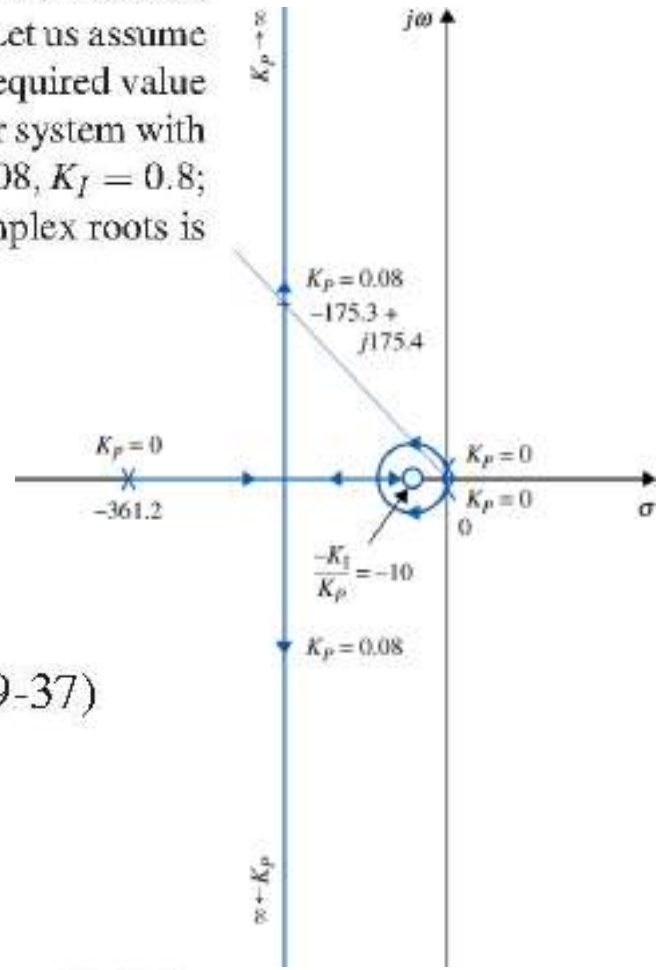


Figure 9-19 Root loci of Eq. (9-37) with $K_I/K_P = 10$; K_P varies.

Recall characteristic Equation:

$$s^3 + 361.2s^2 + 815,265K_Ps + 815,265K_I = 0 \quad (9\text{-}37)$$

The reason for this is that when we "stand" at the root at $-175.3 + j175.4$ and "look" toward the neighborhood near the origin, we see that the zero at $s = -10$ is relatively close to the origin and, thus, practically cancels one of the poles at $s = 0$. In fact, we can show that, as long as $K_P = 0.08$ and the value of K_I is chosen such that Eq. (9-38) is satisfied, the relative damping ratio of the complex roots will be very close to 0.707. For example, let us select $K_I/K_P = 5$; the three characteristic equation roots are at

$$s = -5.145,\ -178.03 + j178.03, \text{ and } -178.03 - j178.03$$

and the relative damping ratio is still 0.707. Although the real pole of the closed-loop transfer function is moved, it is very close to the zero at $s = -K_I/K_P$ so that the transient due to the real pole is negligible. For example, when $K_P = 0.08$ and $K_I = 0.4$, the closed-loop transfer function of the compensated system is

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{65,221.2(s+5)}{(s+5.145)(s+178.03+j178.03)(s+178.03-j178.03)} \tag{9-40}$$

Because the pole at $s = 5.145$ is very close to the zero at $s = -5$, the transient response due to this pole is negligible, and the system dynamics are essentially dominated by the two complex poles.

Table 9-5 gives the attributes of the unit-step responses of the system with PI control for various values of K_I/K_P, with $K_P = 0.08$, which corresponds to a relative damping ratio of 0.707.

The results in Table 9-5 verify the fact that PI control reduces the overshoot but at the expense of longer rise time. For $K_I \leq 1$, the settling times in Table 9-5 actually show a sharp reduction, which is misleading. This is because the settling times for these cases are measured at the points where the response enters the band between 0.95 and 1.00, since the maximum overshoots are less than 5%.

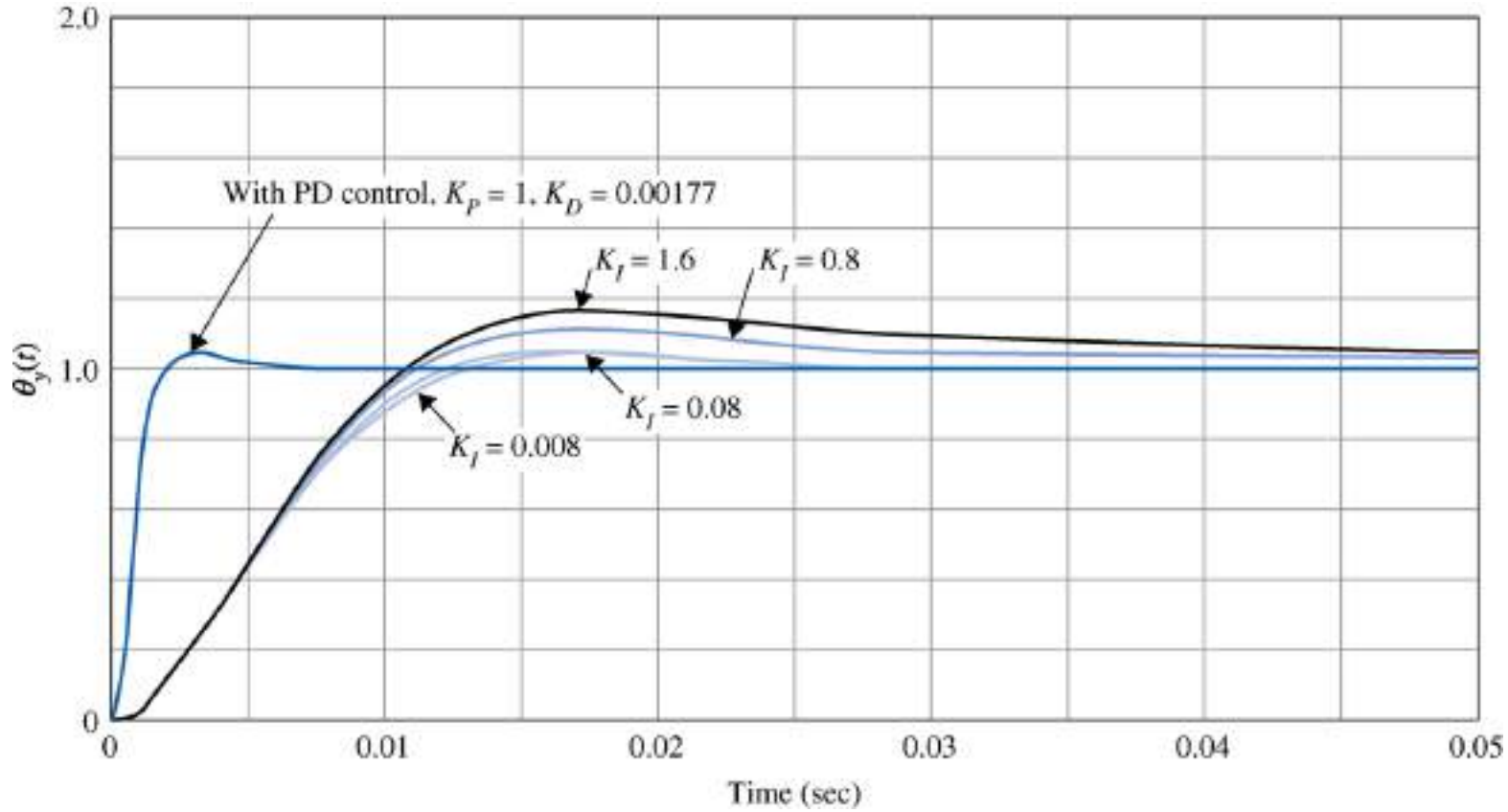
The maximum overshoot of the system can still be reduced further than those shown in Table 9-5 by using smaller values of K_P than 0.08. However, the rise time and settling time will be excessive. For example, with $K_P = 0.04$ and $K_I = 0.04$, the maximum overshoot is 1.1%, but the rise time is increased to 0.0182 seconds, and the settling time is 0.024 seconds.

For the system considered, improvement on the maximum overshoot slows down for K_I less than 0.08, unless K_P is also reduced. As mentioned earlier, the value of the capacitor C_2 is inversely proportional to K_I. Thus, for practical reasons, there is a lower limit on the value of K_I.

TABLE 9-5 Attributes of the Unit-Step Responses of the System in Example 9-3-1 with PI Controller

K_I/K_P	K_I	K_P	Maximum Overshoot (%)	t_r (sec)	t_s (sec)
0	0	1.00	52.7	0.00135	0.015
20	1.60	0.08	15.16	0.0074	0.049
10	0.80	0.08	9.93	0.0078	0.0294
5	0.40	0.08	7.17	0.0080	0.023
2	0.16	0.08	5.47	0.0083	0.0194
1	0.08	0.08	4.89	0.0084	0.0114
0.5	0.04	0.08	4.61	0.0084	0.0114
0.1	0.008	0.08	4.38	0.0084	0.0115

Fig. 9-20 shows the unit-step responses of the attitude-control system with PI control, with $K_P = 0.08$ and several values of K_P. The unit-step response of the same system with the PD controller designed in Example 9-2-1, with $K_P = 1$ and $K_D = 0.00177$, is also plotted in the same figure as a comparison.



$$G(s) = G_c(s)G_P(s) = \frac{4500KK_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 361.2)} \tag{9-34}$$

The forward-path transfer function of the uncompensated system is obtained by setting $K_P = 1$ and $K_I = 0$ in the $G(s)$ in Eq. (9-34), and the Bode plot is shown in Fig. 9-21. The phase margin is 22.68°, and the gain-crossover frequency is 868 rad/sec.

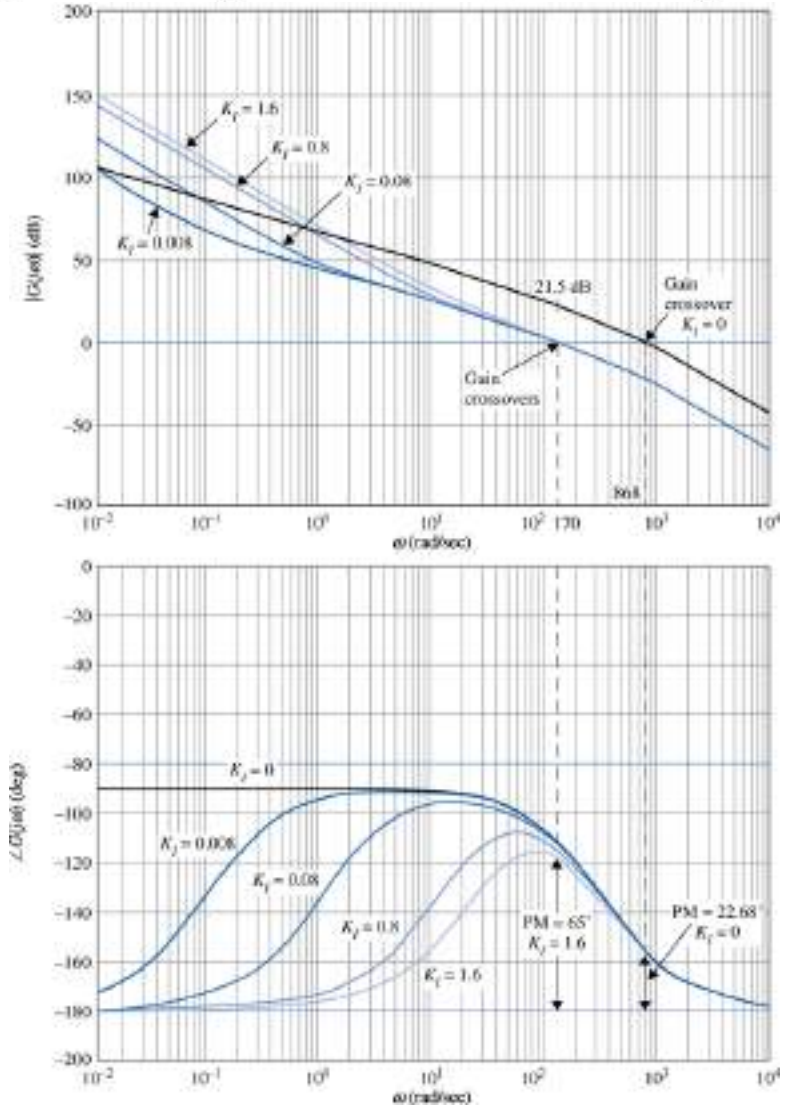


Figure 9-21 Bode plots of the control system in Example 9-3-1 with PI controller.

$$G(s) = \frac{815,265K_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 361.2)}$$

Let us specify that the required phase margin should be at least 65°, and this is to be achieved with the PI controller of Eq. (9-30). Following the procedure outlined earlier in Eqs. (9-31) through (9-33) on the design of the PI controller, we conduct the following steps:

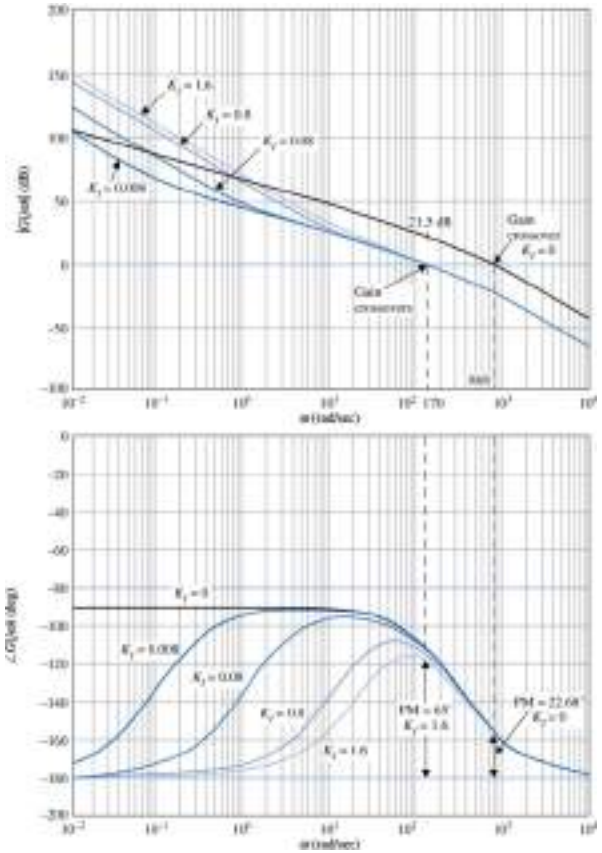
1. Look for the new gain-crossover frequency ω_g' at which the phase margin of 65° is realized. From Fig. 9-21, ω_g' is found to be 170 rad/sec. The magnitude of $G(j\omega)$ at this frequency is 21.5 dB. Thus, the PI controller should provide an attenuation of −21.5 dB at $\omega_g' = 170$ rad/sec. Substituting $\left|G\left(j\omega_g'\right)\right| = 21.5$ dB into Eq. (9-32), and solving for K_P, we get

$$K_P = 10^{-|G(j\omega_g')|_{dB}/20} = 10^{-21.5/20} = 0.084 \tag{9-41}$$

   Notice that, in the time-domain design conducted earlier, K_P was selected to be 0.08 so that the relative damping ratio of the complex characteristic equation roots will be approximately 0.707. (Perhaps we have cheated a little by selecting the desired phase margin to be 65°. This could not be just a coincidence. Can you believe that we have had no prior knowledge that, in this case, $\zeta = 0.707$ corresponds to PM = 65°?)

2. Let us choose $K_P = 0.08$, so that we can compare the design results of the frequency domain with those of the time-domain design obtained earlier. Eq. (9-33) gives the general guideline of finding K_I once K_P is determined. Thus,

$$K_I = \frac{\omega_g' K_P}{10} = \frac{170 \times 0.08}{10} = 1.36 \tag{9-42}$$



As pointed out earlier, the value of K_I is not rigid, as long as the ratio K_I/K_P is sufficiently smaller than the magnitude of the pole of $G(s)$ at −361.2. As it turns out, the value of K_I given by Eq. (9-42) is not sufficiently small for this system.

The Bode plots of the forward-path transfer function with $K_P = 0.08$ and $K_I = 0$, 0.008, 0.08, 0.8, and 1.6 are shown in Fig. 9-21.

Table 9-6 shows the frequency-domain properties of the uncompensated system and the compensated system with various values of K_I. Notice that, for values of K_I/K_P that are sufficiently small, the phase margin, M_r, BW, and gain-crossover frequency all vary little.

It should be noted that the phase margin of the system can be improved further by reducing the value of K_P below 0.08. However, the bandwidth of the system will be further reduced. For example, for $K_P = 0.04$ and $K_I = 0.04$, the phase margin is increased to 75.7°, and $M_r = 1.01$, but BW is reduced to 117.3 rad/sec.

TABLE 9-6 Frequency-Domain Performance Data of the System in Example 9-3-1 with PI Controller

K_I/K_P	K_I	K_P	GM (dB)	PM (deg)	M_r	BW (rad/sec)	Gain CO (rad/sec)	Phase CO (rad/sec)
0	0	1.00	∞	22.6	2.55	1390.87	868	∞
20	1.6	0.08	∞	58.45	1.12	268.92	165.73	∞
10	0.8	0.08	∞	61.98	1.06	262.38	164.96	∞
5	0.4	0.08	∞	63.75	1.03	258.95	164.77	∞
1	0.08	0.08	∞	65.15	1.01	256.13	164.71	∞
0.1	0.008	0.08	∞	65.47	1.00	255.49	164.70	∞

11-4 DESIGN WITH THE PID CONTROLLER

1. Consider that the PID controller consists of a PI portion connected in cascade with a PD portion. The transfer function of the PID controller is written as

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = (1 + K_{D1}s)\left(K_{P2} + \frac{K_{I2}}{s}\right) \tag{9-48}$$

The proportional constant of the PD portion is set to unity, since we need only three parameters in the PID controller. Equating both sides of Eq. (9-48), we have

$$K_P = K_{P2} + K_{D1}K_{I2} \tag{9-49}$$

$$K_D = K_{D1}K_{P2} \tag{9-50}$$

$$K_I = K_{I2} \tag{9-51}$$

2. Consider that the PD portion only is in effect. Select the value of K_{D1} so that a portion of the desired relative stability is achieved. In the time domain, this relative stability may be measured by the maximum overshoot, and in the frequency domain it is the phase margin.
3. Select the parameters K_{I2} and K_{P2} so that the total requirement on relative stability is satisfied.

As an alternative, the PI portion of the controller can be designed first for a portion of the requirement on relative stability, and, finally, the PD portion is designed.

TABLE 9-10 Frequency-Domain Performance of System in Example 9-4-1 with PID Controller

K_{P2}	K_{I2}	GM (dB)	PM (deg)	M_r	BW (rad/sec)	t_r (sec)	t_s (sec)	Maximum Overshoot (%)
1.00	0	∞	58.45	1.07	2607	0.0008	0.00255	11.37
0.45	6.75	∞	68.5	1.03	1180	0.0019	0.0040	5.6
0.40	6.00	∞	69.3	1.027	1061	0.0021	0.0050	5.0
0.30	4.50	∞	71.45	1.024	1024	0.0027	0.00303	4.8
0.20	3.00	∞	73.88	1.031	528.8	0.0040	0.00404	4.5
0.10	1.5	∞	76.91	1.054	269.5	0.0076	0.0303	5.6
0.08	1.2	∞	77.44	1.065	216.9	0.0092	0.00469	6.5

EXAMPLE 9-4-1

Consider the third-order attitude control system represented by the forward-path transfer function given in Eq. (9-19). With $K = 181.17$, the transfer function is

$$G_p(s) = \frac{2.718 \times 10^9}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{9-52}$$

Time-Domain Design

Let the time-domain performance specifications be as follows:

Steady-state error due to a ramp input $t^2 u_s(t)/2 \leq 0.2$

Maximum overshoot $\leq 5\%$

Rise time $t_r \leq 0.005$ sec

Settling time $t_s \leq 0.005$ sec

We realize from the previous examples that these requirements cannot be fulfilled by either the PI or PD control acting alone. Let us apply the PD control with the transfer function $(1 + K_{D1}s)$. The forward-path transfer function becomes

$$G(s) = \frac{2.718 \times 10^9 (1 + K_{D1}s)}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{9-53}$$

Table 9-3 shows that the best PD controller that can be obtained from the maximum overshoot standpoint is with $K_{D1} = 0.002$, and the maximum overshoot is 11.37%. The rise time and settling time are well within the required values. Next, we add the PI controller, and the forward-path transfer function becomes

$$G(s) = \frac{5.436 \times 10^6 K_{P2}(s + 500)(s + K_{I2}/K_{P2})}{s^2(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{9-54}$$

Following the guideline of choosing a relatively small value for K_{I2}/K_{P2}, we let $K_{I2}/K_{P2} = 15$. Eq. (9-54) becomes

$$G(s) = \frac{5.436 \times 10^6 K_{P2}(s + 500)(s + 15)}{s^2(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{9-55}$$

TABLE 9-3 Time-Domain Attributes of the Third-Order System in Example 9-2-2 with PD Controller

K_D	% Maximum Overshoot	t_r (sec)	t_s (sec)	Characteristic Equation Roots	
0	78.88	0.00125	0.0495	−3293.3,	$-57.49 \pm j906.6$
0.0005	41.31	0.00120	0.0106	−2843.07,	$-282.62 \pm j936.02$
0.00127	17.97	0.00100	0.00398	−1523.11,	$-942.60 \pm j946.58$
0.00157	14.05	0.00091	0.00337	−805.33,	$-1301.48 \pm j1296.59$
0.00200	11.37	0.00080	0.00255	−531.89,	$-1438.20 \pm j1744.00$
0.00500	17.97	0.00042	0.00130	−191.71,	$-1608.29 \pm j3404.52$
0.01000	31.14	0.00026	0.00093	−96.85,	$-1655.72 \pm j5032$
0.05000	61.80	0.00010	0.00144	−19.83,	$-1694.30 \pm j11583$

Table 9-9 gives the time-domain performance characteristics along with the roots of the characteristic equation for various values of K_{P2}. Apparently, the optimal value of K_{P2} is in the neighborhood of between 0.2 and 0.4.

TABLE 9-9 Time-Domain Performance Characteristics of Third-Order Attitude Control System with PID Controller Designed in Example 9-4-1

K_{P2}	Maximum Overshoot (%)	t_r (sec)	t_s (sec)	Roots of Characteristic Equation			
1.0	11.1	0.00088	0.0025	−15.1	−533.2	$-1430 \pm j$	1717.5
0.9	10.8	0.00111	0.00202	−15.1	−538.7	$-1427 \pm j$	1571.8
0.8	9.3	0.00127	0.00303	−15.1	−546.5	$-1423 \pm j$	1385.6
0.7	8.2	0.00130	0.00303	−15.1	−558.4	$-1417 \pm j$	1168.7
0.6	6.9	0.00155	0.00303	−15.2	−579.3	$-1406 \pm j$	897.1
0.5	5.6	0.00172	0.00404	−15.2	−629	$-1382 \pm j$	470.9
0.4	5.1	0.00214	0.00505	−15.3	−1993	$-700 \pm j$	215.4
0.3	4.8	0.00271	0.00303	−15.3	−2355	$-519 \pm j$	263.1
0.2	4.5	0.00400	0.00404	−15.5	−2613	$-390 \pm j$	221.3
0.1	5.6	0.00747	0.00747	−16.1	−284	$-284 \pm j$	94.2
0.08	6.5	0.00895	0.04545	−16.5	−286.3	$-266 \pm j$	4.1

Selecting $K_{P2} = 0.3$, and with $K_{D1} = 0.002$ and $K_{I2} = 15K_{P2} = 4.5$, the following results are obtained for the parameters of the PID controller using Eqs. (9-49) through (9-51):

$$\begin{aligned} K_I &= K_{I2} = 4.5 \\ K_P &= K_{P2} + K_{D1}K_{I2} = 0.3 + 0.002 \times 4.5 = 0.309 \\ K_D &= K_{D1}K_{P2} = 0.002 \times 0.3 = 0.0006 \end{aligned} \tag{9-56}$$

Notice that the PID design resulted in a smaller K_D and a larger K_I, which correspond to smaller capacitors in the implementing circuit.

Fig. 9-24 shows the unit-step responses of the system with the PID controller, as well as those with PD and PI controls designed in Examples 9-2-2 and 9-3-2, respectively. Notice that the PID control, when designed properly, captures the advantages of both the PD and the PI controls.

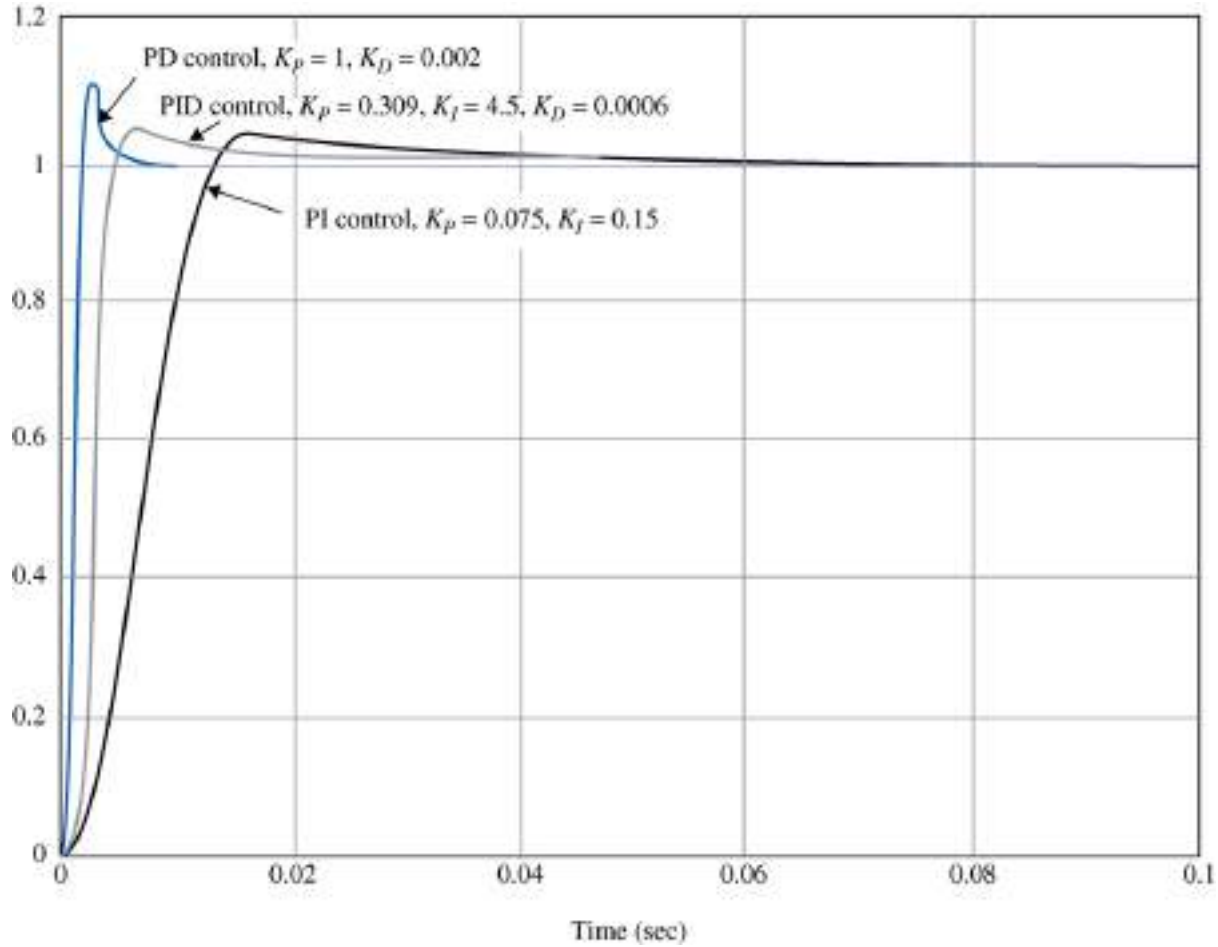


Figure 9-24 Step responses of the system in Example 9-4-1 with PD, PI, and PID controllers.

Frequency-Domain Design

The PD control of the third-order attitude control systems was already carried out in Example 9-2-2, and the results were tabulated in Table 9-3. When $K_P = 1$ and $K_D = 0.002$, the maximum overshoot is 11.37%, but this is the best that the PD control could offer. Using this PD controller, the forward-path transfer function of the system is

$$G(s) = \frac{2.718 \times 10^9 (1 + 0.002s)}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{9-57}$$

and its Bode plot is shown in Fig. 9-25. Let us estimate that the following set of frequency-domain criteria corresponds to the time-domain specifications given in this problem.

Phase margin $\geq 70°$

$M_r \leq 1.1$

BW ≥ 1.000 rad/sec

From the Bode diagram in Fig. 9-25, we see that, to achieve a phase margin of 70°, the new phase-crossover frequency should be $\omega_g' = 811$ rad/sec, at which the magnitude of $G(j\omega)$ is 7 dB. Thus, using Eq. (9-32), the value of K_{P2} is calculated to be

$$K_{P2} = 10^{-7/20} = 0.45 \tag{9-58}$$

Notice that the desirable range of K_{P2} found from the time-domain design with $K_{I2}/K_{P2} = 15$ is from 0.2 to 0.4. The result given in Eq. (9-58) is slightly out of the range. Table 9-10 shows the frequency-domain performance results with $K_D = 0.002$, $K_{I2}/K_{P2} = 15$, and several values of K_{P2} starting with 0.45. It is interesting to note that, as K_{P2} continues to decrease, the phase margin increases monotonically, but below $K_{P2} = 0.2$, the maximum overshoot actually increases. In this case, the phase margin results are misleading, but the resonant peak M_r is a more accurate indication of this.

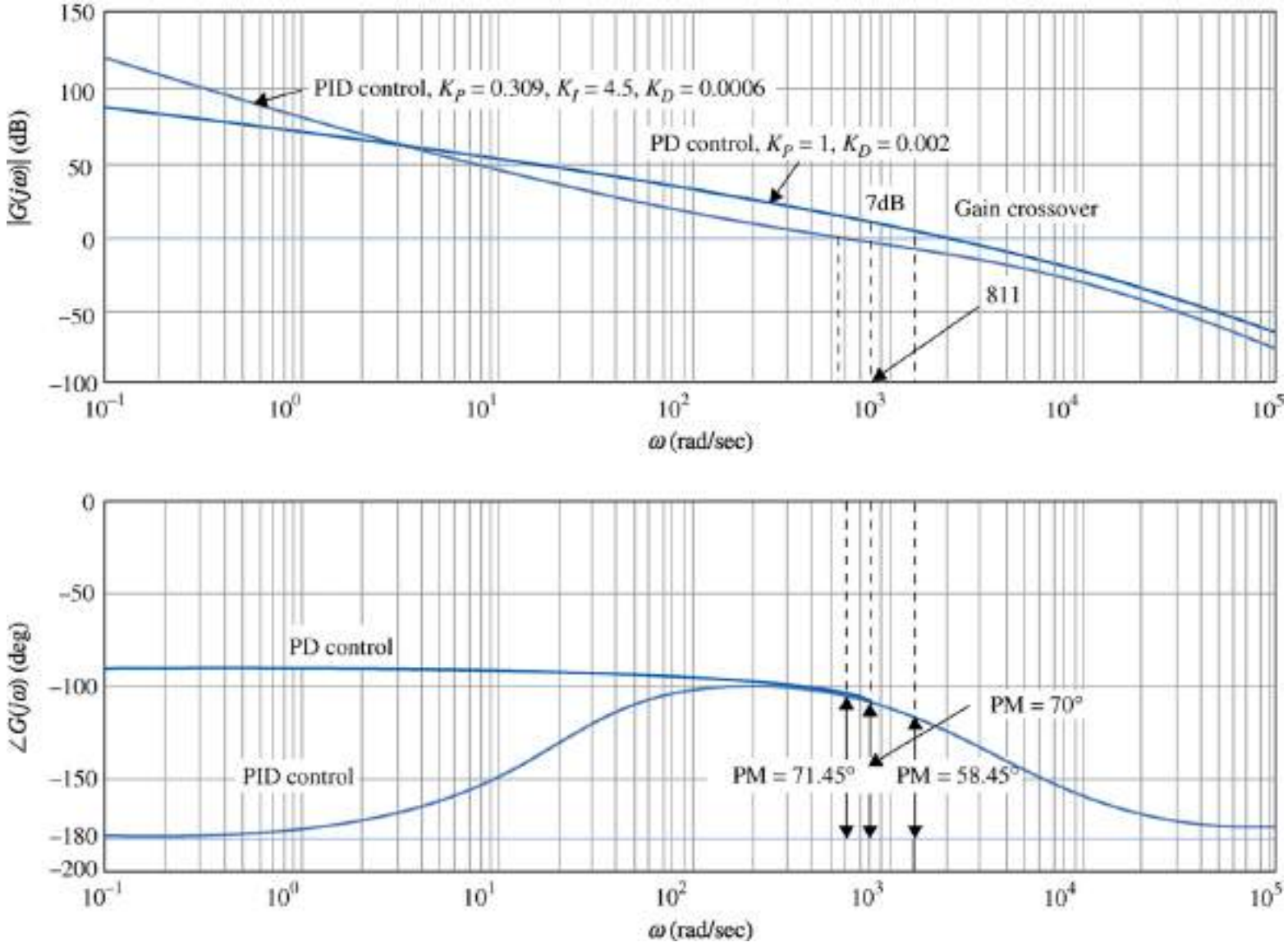


Figure 9-25 Bode plot of the system in Example 9-4-1 with PD and PID controllers.

11-5 DESIGN WITH PHASE-LEAD AND PHASE-LAG CONTROLLERS

필터의 관점에서 보면 PD 제어기는 고역 통과 필터이고, PI 제어기는 저역 통과 필터이며, PID 제어기는 제어기의 파라미터 값에 따라 대역통과 또는 대역감쇠필터로 볼 수 있다. 고역통과필터를 때로는 진상제어기(phase-lead controller)라 부르기도 하는데, 이는 주파수영역에서 양의 위상을 시스템에 제공하기 때문이다. 저역통과필터는 또한 지상제어기(phase-lag controller)라 불리며, 이는 대응하는 위상에 음의 위상을 시스템에 제공하기 때문이다. 다른 말로 표현하면, 고역 통과 필터는 위상이 약간의 주파수 범위에서 양의 값이기 때문에 위상-리드 제어기라고도 불린다. 저역 통과 필터는 위상이 음의 값이기 때문에 위상-지연 제어기라고도 불린다.

The transfer function of a simple lead or lag controller is expressed as

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z_1}{s + p_1} \qquad (11\text{-}69)$$

여기서 제어기는 $p_1 > z_1$일 때 고역 통과 또는 진상이고, $p_1 < z_1$ 일 때 저역 통과 또는 지상이다.

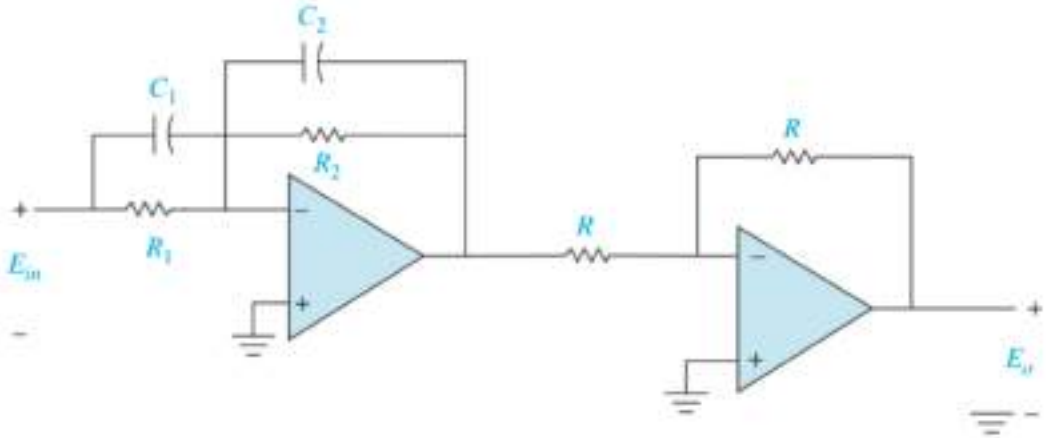


Figure 11-30 Op-amp circuit implementation of $G(s)=K_c\dfrac{s+z_1}{s+P_1}$.

The op-amp circuit implementation of Eq. (11-69) is given in Table 6-1*g* of Chap. 6 and is repeated in Fig. 11-30 with an inverting amplifier. The transfer function of the circuit is

$$G_c(s)=\frac{E_o(s)}{E_{in}(s)}=\frac{C_1}{C_2}\frac{s+\dfrac{1}{R_1C_1}}{s+\dfrac{1}{R_2C_2}} \tag{11-70}$$

Comparing the last two equations, we have

$$\begin{aligned} K_c &= C_1/C_2 \\ z_1 &= 1/R_1C_1 \\ p_1 &= 1/R_2C_2 \end{aligned} \tag{11-71}$$

We can reduce the number of design parameters from four to three by setting $C=C_1=C_2$. Then Eq. (11-70) is written as

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1+R_1Cs}{1+R_2Cs}\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{1+aTs}{1+Ts}\right) \end{aligned} \tag{11-72}$$

where

$$a=\frac{R_1}{R_2} \tag{11-73}$$

$$T=R_2C \tag{11-74}$$

11-5-1 Time-Domain Interpretation and Design of Phase-Lead Control

- 진상제어기($z_1 < p_1$ 또는 $a > 1$)
- 진상제어기가 정상상태오차를 악화시키지 않도록 하려면, 식 (11-62)에서의 인자 a는 전방경로 이득 K에 포함되어야 한다.

$$G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} \quad (a>1)$$

- 하나의 극-영점 쌍의 영점을 원점에 가깝도록 전방경로 전달함수에 첨가할 때의 효과에 관한 7장에서의 논의에 근거하여, 진상제어기의 파라미터를 적절히 선택할 때 폐루프시스템의 안정도를 개선할 수 있음을 알 수 있다. 진상제어기 설계는 결국 설계사양을 만족하도록 $G_c(s)$의 극과 영점을 결정하는 문제이다. 파라미터의 적당한 범위를 제시하기 위해 근궤적을 이용할 수 있다. 매개변수 a와 T를 고를 때는 다음과 같은 지침을 따라야한다.

1. 영점 $-1/aT$를 원점을 향해 이동시키면, 상승시간과 정정시간이 개선된다. 영점을 원점에 너무 가까이 이동시키면, $-1/aT$ 가 역시 폐루프 전달함수의 한 영점이 되므로, 최대오버슈트가 다시 증가하게 된다.
2. 극 $-1/T$ 를 영점과 원점에서 멀리 이동시키면 최대오버슈트가 감소되지만, T의 값을 너무 작게 하면, 상승시간과 정정시간이 다시 증가한다.

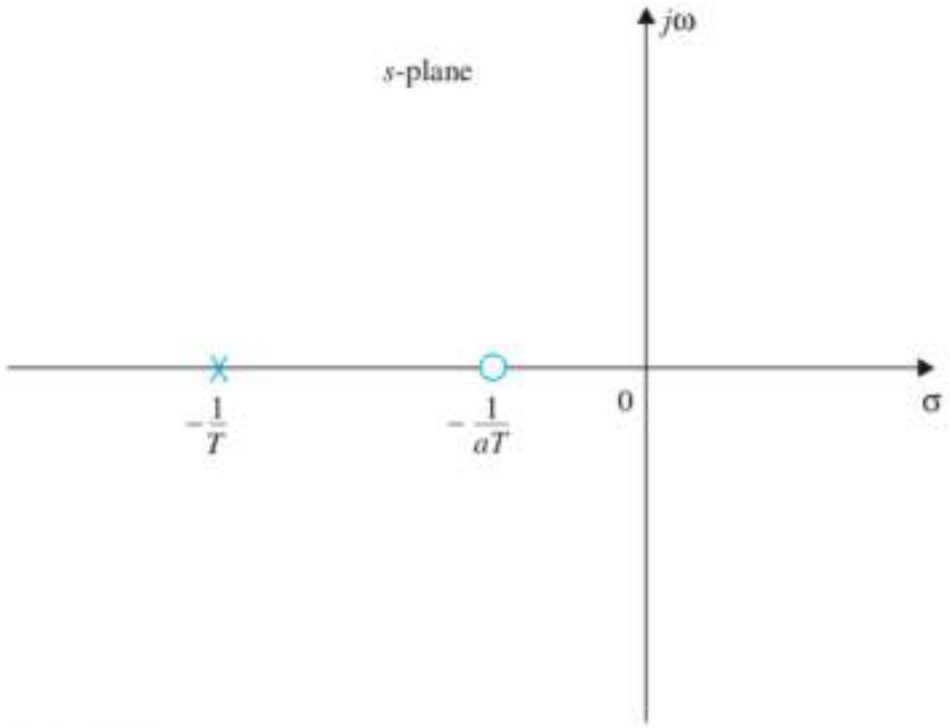


Figure 11-31 Pole-zero configuration of the phase-lead controller.

진상제어가 시간영역 성능에 미치는 영향에 관해 다음과 같은 일반적인 특성을 기술할 수 있다.

1. 적절히 이용하면 시스템의 감쇠를 증가시킬 수 있다.
2. 상승시간과 정정시간을 개선한다.
3. 식 (11-75)의 형태에서 $G_c(0) = 1$이므로 진상제어는 정상상태오차에 영향을 미치지 않는다.

11-5-2 Frequency-Domain Interpretation and Design of Phase-Lead Control

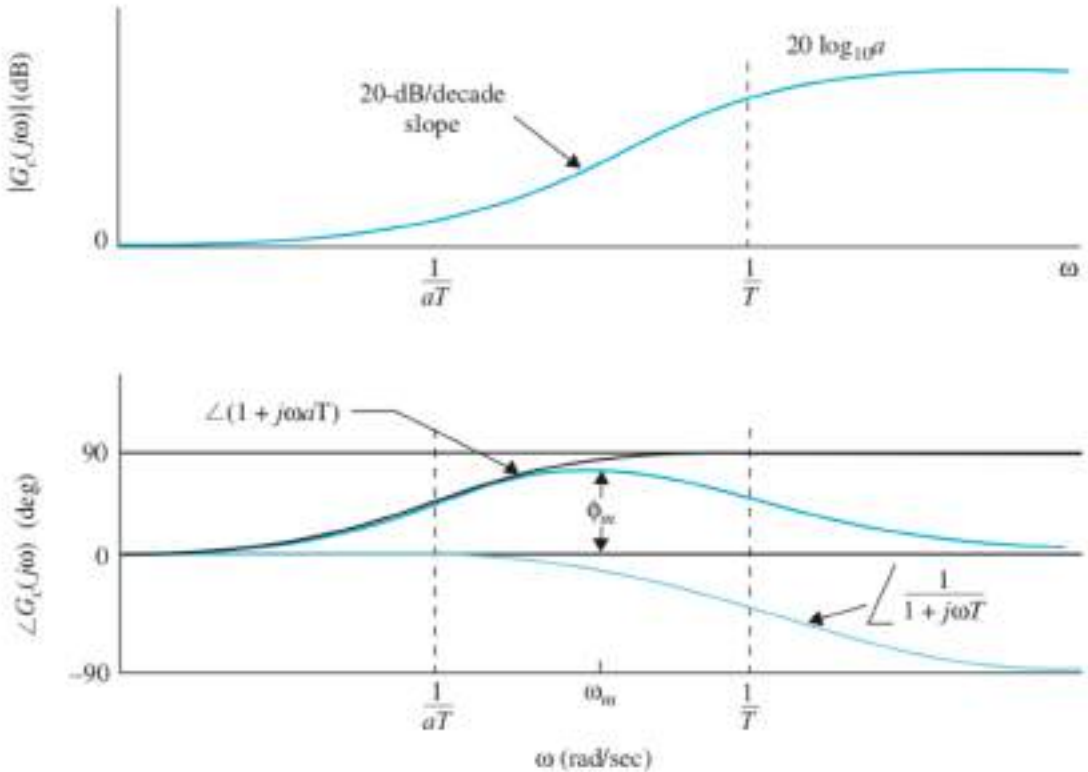


Figure 11-32 Bode plot of phase-lead controller $G_c(s) = a\dfrac{s+1/aT}{s+1/T}$ $a>1$.

The Bode plot of the phase-lead controller of Eq. (11-75) is shown in Fig. 11-32. The two corner frequencies are at $\omega = 1/aT$ and $\omega = 1/T$. The maximum value of the phase, ϕ_m, and the frequency at which it occurs, ω_m, are derived as follows. Because ω_m is the geometric mean of the two corner frequencies, we write

$$\log_{10}\omega_m = \frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{1}{aT} + \log_{10}\frac{1}{T}\right) \tag{11-76}$$

Thus,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} \tag{11-77}$$

To determine the maximum phase ϕ_m, the phase of $G_c(j\omega)$ is written

$$\angle G_c(j\omega) = \phi(j\omega) = \tan^{-1}\omega aT - \tan^{-1}\omega T \tag{11-78}$$

from which we get

$$\tan\phi(j\omega) = \frac{\omega aT - \omega T}{1+(\omega aT)(\omega T)} \tag{11-79}$$

Substituting Eq. (11-77) into Eq. (11-79), we have

$$\tan\phi_m = \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \quad \text{or} \quad \sin\phi_m = \frac{a-1}{a+1} \tag{11-80}$$

$$a = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}$$

- 주파수영역에서 진상제어기를 설계하는 일반적인 과정은 다음과 같다. 설계사양에는 간단한 정상상태오차와 위상여유의 요구조건만 포함된다고 가정한다.

1. 정상상태오차에 관한 요구조건에 따라 이득상수 K의 값을 정하고 보상되지 않은 공정 $G_p(jw)$의 Bode 선도를 그린다. K의 값은 a의 값을 결정한 후 다시 상향조정되어야 한다.
2. 비보상시스템의 위상여유와 이득여유를 구하고, 위상여유를 실현하기 위해 필요한 진위상값을 결정한다. 요구되는 추가의 진위상으로부터 적절한 ϕ_m의 값이 정해지고 식 (11-82)로부터 a의 값을 계산한다.
3. 일단 a가 결정되면, 다음에는 T의 값을 결정하는 과정만 남게 되고, T의 값이 결정되면 설계는 원칙적으로 끝난다. 이는 진상제어기의 절점주파수 $1/aT$과 $1/T$을, ϕ_m 이 새로운 이득교차 주파수 ω_g에 오도록 한다. 그러므로 보상시스템의 위상여유가 ϕ_m 만큼 증가하도록 한 것이다. 진상제어기의 고주파수이득은 $20\ log10a\ dB$임을 알고 있다. 따라서 $1/aT$과 $1/T$의 기하평균치가 되는 ω_m에 이득교차점을 갖기 위해서 비보상공정 $G_p(jw)$의 크기가 $-10\ log_{10}a\ dB$인 주파수에 ω_m을 위치하도록 할 필요가 있다. 이러한 방법으로 $10\ log_{10}a\ dB$인 제어기 이득의 추가로 주파수 ω_m에서 크기곡선이 $0\ dB$를 통과하도록 한다.
4. 보상된 시스템에 대한 전방경로 전달함수의 Bode 선도를 검토하여 모든 성능사양이 충족되는지를 확인한다. 충족되지 않으면 새로운 ϕ_m 의 값을 선택하고 각 단계를 반복한다.
5. 설계사양이 모두 충족되면 a와 T의 값으로부터 진상제어기의 전달함수가 얻어진다.

설계사양에 M_r과 BW가 포함되었다면, Nichols 도표나 컴퓨터 프로그램의 출력자료를 이용하여 검토함.

EXAMPLE 11-5-1

EXAMPLE 11-5-2

11-5-3 Effects of Phase-Lead Compensation

1. 진상제어기는 전방경로 전달함수에 영점과 극을 한 개씩 추가하며, 영점이 극의 오른쪽에 오도록 한다. 일반적으로 폐루프시스템의 감쇠를 증가시키며 상승시간과 정정시간은 일반적으로 감소된다.
2. 이득교차 주파수 근처에서 전방경로 전달함수의 위상은 증가하며 이것으로 인해 폐루프시스템의 위상여유가 개선된다.
3. 이득교차 주파수에서 전방경로 전달함수의 Bode 선도의 크기곡선 기울기가 감소된다. 이는 이득여유와 위상여유 개선의 측면에서 시스템의 상대안정도가 개선됨을 의미한다.
4. 폐루프시스템의 대역폭이 증가한다. 이는 빠른 시간응답을 의미한다.
5. 시스템의 정상상태오차에 영향을 미치지 않는다.

11-5-4 Limitations of Single-Stage Phase-Lead Control

1. 대역폭 문제: 원래의 시스템이 불안정하거나 낮은 안정도 여유를 갖고 있는 경우, 어떤 요구되는 위상여유를 실현하기 위해 필요한 추가의 진상은 과도하게 되기 쉽다. 이는 제어기에서 상대적으로 큰 값의 도가 필요하며, 결과적으로 이 제어기는 보상된 시스템의 대역폭을 크게 증가시키고, 입력 측에서 시스템에 인가되는 고주파수 잡음이 심각한 문제를 일으킬 수 있다. 그러나 출력 측 근방에서 잡음이 인가되면 증가된 대역폭이 잡음제거에 유익할 수도 있다. 큰 대역폭은 또한 강인성의 이점을 갖는다(즉 시스템은 앞에서와 마찬가지로 파라미터 변화와 잡음에 둔감하게 된다).
2. 원래의 시스템이 불안정하거나 낮은 안정도 여유를 가지면, 전방경로 전달함수에 대한 Bode 선도의 위상곡선이 이득교차 주파수 근처에서 급격한 음의 기울기를 갖게 된다. 이런 상태의 경우 1단 진상제어기는 효과가 적다. 이는 새 이득교차점에 추가되는 진상이 원래의 이득교차점의 위상보다 훨씬 작은 위상이 더해지기 때문이다. 요구되는 위상여유를 실현하기 위해서는 제어기에서 큰 값의 a를 사용해야 한다. a를 보상하기 위해 증폭기 이득 K도 조정되어야 하며, 큰 값의 a를 얻으려면 높은 증폭기 이득이 요구되고, 비용이 많이 든다.
3. 예제 11-5-2에서 설명한 것처럼 보상된 시스템에서 언더슈트가 오버슈트보다 클 수도 있다. 종종 위상곡선의 한 부분이 180도축 아래에 존재하므로, 위상여유가 충족되더라도, 조건부 안정한 시스템을 얻게 된다.
4. 1단 진상제어기로부터 얻을 수 있는 최대위상은 90도 이하이다. 따라서 90도 이상의 진상이 필요할 때는 제어기를 다단으로 사용해야 한다.

11-5-5 Multistage Phase-Lead Controller

When the design with a phase-lead controller requires an additional phase of more than 90°, a multistage controller should be used. Figure 11-42 shows an op-amp-circuit realization of a two-stage phase-lead controller. The input-output transfer function of the circuit is

$$G_c(s)=\frac{E_o(s)}{E_{in}(s)}=\left(\frac{s+\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{1}{R_2C}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{R_3C}}{s+\frac{1}{R_4C}}\right)$$

$$=\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\left(\frac{1+R_1Cs}{1+R_2Cs}\right)\left(\frac{1+R_3Cs}{1+R_4Cs}\right) \qquad (11\text{-}119)$$

or

$$G_c(s)=\frac{1}{a_1a_2}\left(\frac{1+a_1T_1s}{1+T_1s}\right)\left(\frac{1+a_2T_2s}{1+T_2s}\right) \qquad (11\text{-}120)$$

where $a_1=R_1/R_2$, $a_2=R_3/R_4$, $T_1=R_2C$, and $T_2=R_4C$.

시간영역에서의 다단 진상제어기 설계는 많은 극과 영점을 설정해야 하므로 번거롭다. 또한 여러 파라미터가 존재하므로 근궤적 기법도 실용적이지 못하다. 이 경우 주파수영역의 설계가 효과적이다. 예를 들면 2단 제어기의 경우 위상여유에 대한 요구조건의 일부를 만족시키도록 2단 제어기의 첫 단계 파라미터들을 선택할 수 있으며, 다음에 나머지 요구조건을 만족시키도록 제어기의 둘째 단계를 설계하면 된다.

EXAMPLE11-5-3

11-5-6 Sensitivity Considerations

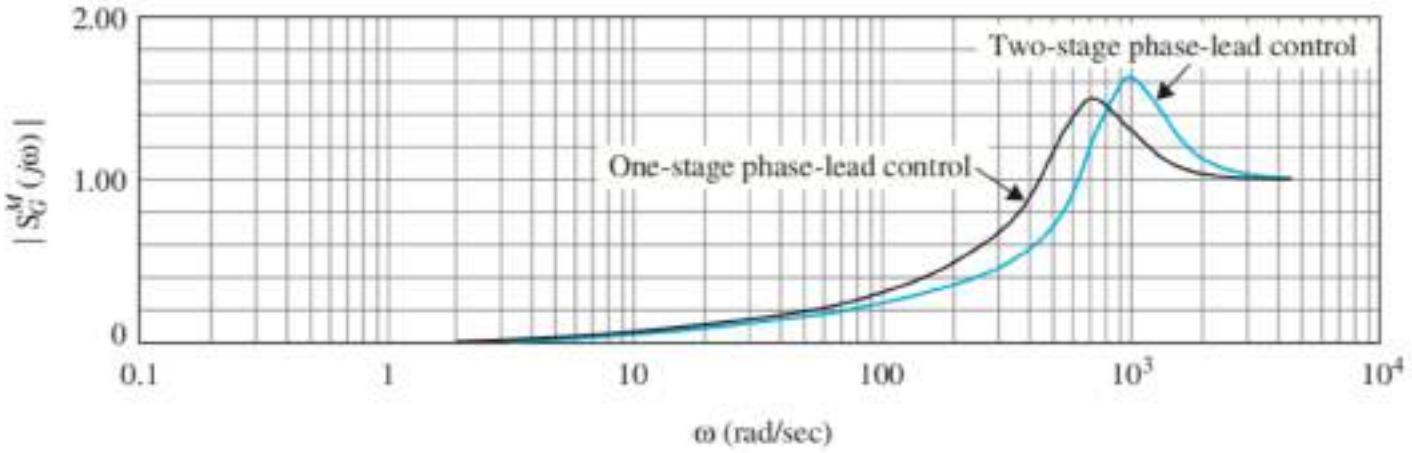


Figure 11-45 Sensitivity functions of sun-seeker system in Example 11-5-2.

그림 11-45에서는 2단 진상제어기를 갖는 시스템의 민감도함수가 w<600 rad/sec 에서 1 이하임을 보여 준다. 따라서 2단 진상제어기 시스템은 1단 제어기를 갖는 시스템보다 더욱 강인하다. 이것은 강인한 시스템은 높은 대역폭을 갖기 때문이다. 일반적으로 진상제어기를 갖는 시스템은 높은 대역폭 때문에 더욱 강인하다. 그러나 그림 11-45에서는 2단 진상제어기를 가진 시스템이고 주파수에서 높은 감도를 갖고 있음을 보이고 있다.

11-5-7 Time-Domain Interpretation and Design of Phase-Lag Control

$$G_c(s) = \frac{1}{a}\left(\frac{1+aTs}{1+Ts}\right) \quad a<1$$

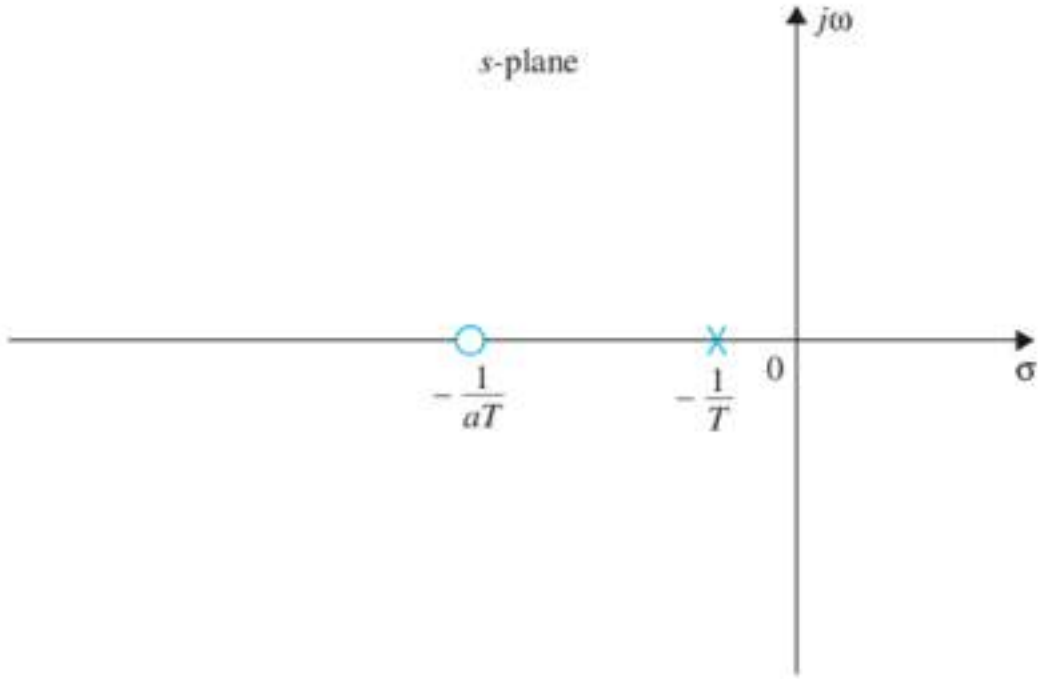


Figure 11-46 Pole-zero configuration of phase-lag controller.

$s = 0$ 에 극이 있는 PI 제어기와는 달리, 지상제어기는 $G_c(s)$의 영주파수이득이 1보다 크다는 의미에서 정상상태오차에 영향을 미친다. 따라서 지상제어기에서는 유한하고 영이 아닌 오차상수가 $1/a$배 증가된다. 지상제어기를 적용하는 적절한 방법은 극과 영점을 가까이 놓는 것이다. 0형과 1형 시스템의 경우 극-영점 조합은 s-평면의 원점 근처에 위치해야 한다. 지상제어기는 2형 시스템에 적용할 수 없다.

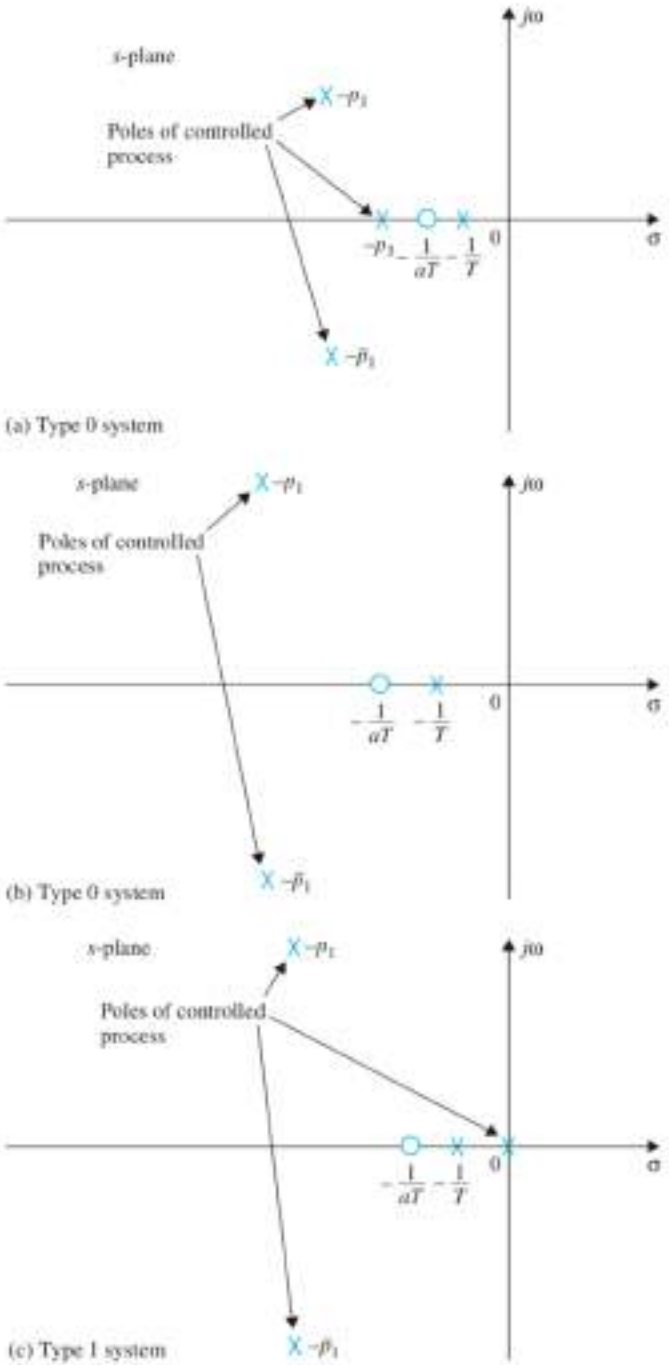


Figure 11-47 Design strategies for phase-lag control for type 0 and type 1 systems.

0형 제어시스템인 경우 $$G_p(s)=\frac{K}{(s+p_1)(s+\bar{p}_1)(s+p_3)}$$

진상제어기에서와 마찬가지로, a의 값과 관계없이 K의 값으로 시스템을 조정할 수 있으므로, 위의 식에서 이득인자 $1/a$을 삭제할 수 있다. 이득인자 $1/a$을 삭제하고, 시스템에 위의 식의 지상제어기를 도입하면 전방경로 전달함수는

$$G(s)=G_c(s)G_p(s)=\frac{K(1+aTs)}{(s+p_1)(s+\quad p_1\quad)(s+p_3)(1+Ts)} \quad (a<1)$$

K의 값이 정상상태오차의 조건을 만족시킨다고 가정하자. 또한 선택한 K값으로 인하여 시스템은 감쇠가 작거나 더 나아가 불안정하다고 가정한다. 이제 $1/T \cong 1/aT$라 하고 그림 11-47처럼 $-1/p_3$극 근처에 극-영점 쌍을 놓는다. 그림 11-48는 지상제어기를 갖는 경우와 갖지 않는 경우에 대한 시스템의 근궤적이다. 제어기의 극-영점 조합이 $-1/p_3$ 에 있는 극에 매우 가까우므로 지상제어기를 갖는 경우와 그렇지 않은 경우에 우세근의 궤적모양이 매우 비슷하게 될 것이다.

$$G(s)=\frac{Ka(s+1/aT)}{(s+p_1)(s+\bar{p}_1)(s+p_3)(s+1/T)}$$
$$\cong\frac{Ka}{(s+p_1)(s+\bar{p}_1)(s+p_3)}$$

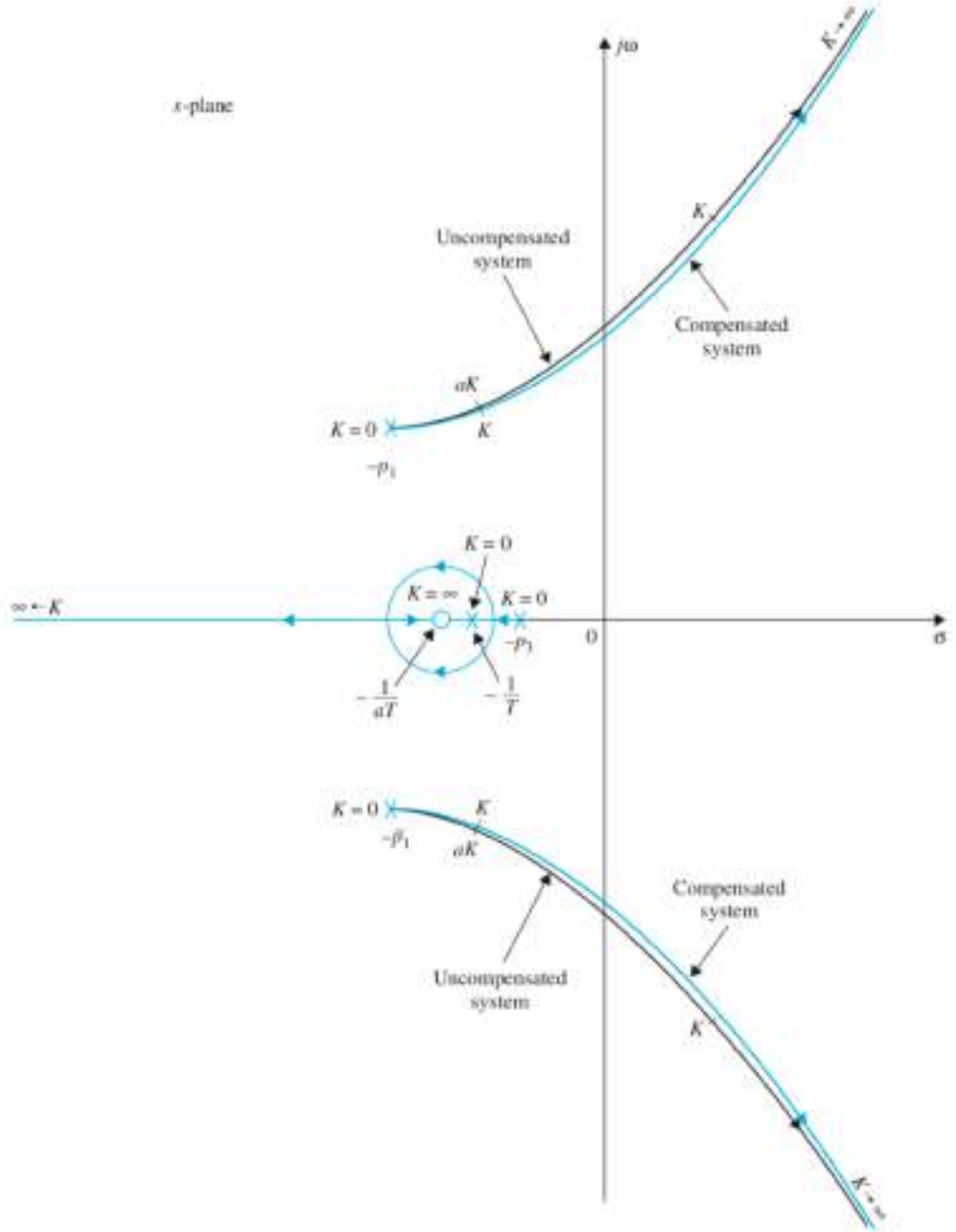


Figure 11-48 Root loci of uncompensated and phase-lag-compensated systems.

a가 1보다 작으므로 지상제어기의 적용은 시스템의 정상상태 성능에는 영향을 미치지 않고, 전방경로 이득을 K에서 Ka로 줄이는 것과 같다. 그림 11-48는 a의 값을 보상된 시스템의 감쇠가 충족되도록 선택할 수 있음을 보이고 있다. 따라서 극 $-p_1$과 $\overline{-p_1}$가 허수축에 매우 가깝게 놓인다면 추가되어야 할 감쇠의 양은 제한을 받게 된다. 따라서 다음 식을 이용하여 a의 값을 선택할 수 있다.

$$a = \frac{K \text{ to realize the desired damping}}{K \text{ to realize the steady-state performance}}$$

제어기의 극과 영점이 매우 가까우며 또한 $-1/p_3$에 가깝도록 T의 값을 선택해야 한다. 시간영역에서 지상제어는 일반적으로 상승시간과 정정시간을 증가시킨다.

11-5-8 Frequency-Domain Interpretation and Design of Phase-Lag Control

The transfer function of the phase-lag controller can again be written as

$$G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} \quad (a<1)$$

the maximum phase lag is

$$\phi_m = \sin^{-1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \quad (a<1)$$

Bode 선도를 이용하여 지상제어기를 설계하는 과정을 요약하면 다음과 같다.

1. 비보상시스템의 전방경로 전달함수의 Bode 선도를 그린다. 전방경로 이득 K를 정상상태 성능의 요구조건에 따라 정한다.
2. 비보상시스템의 위상여유와 이득여유를 Bode 선도에서 구한다.

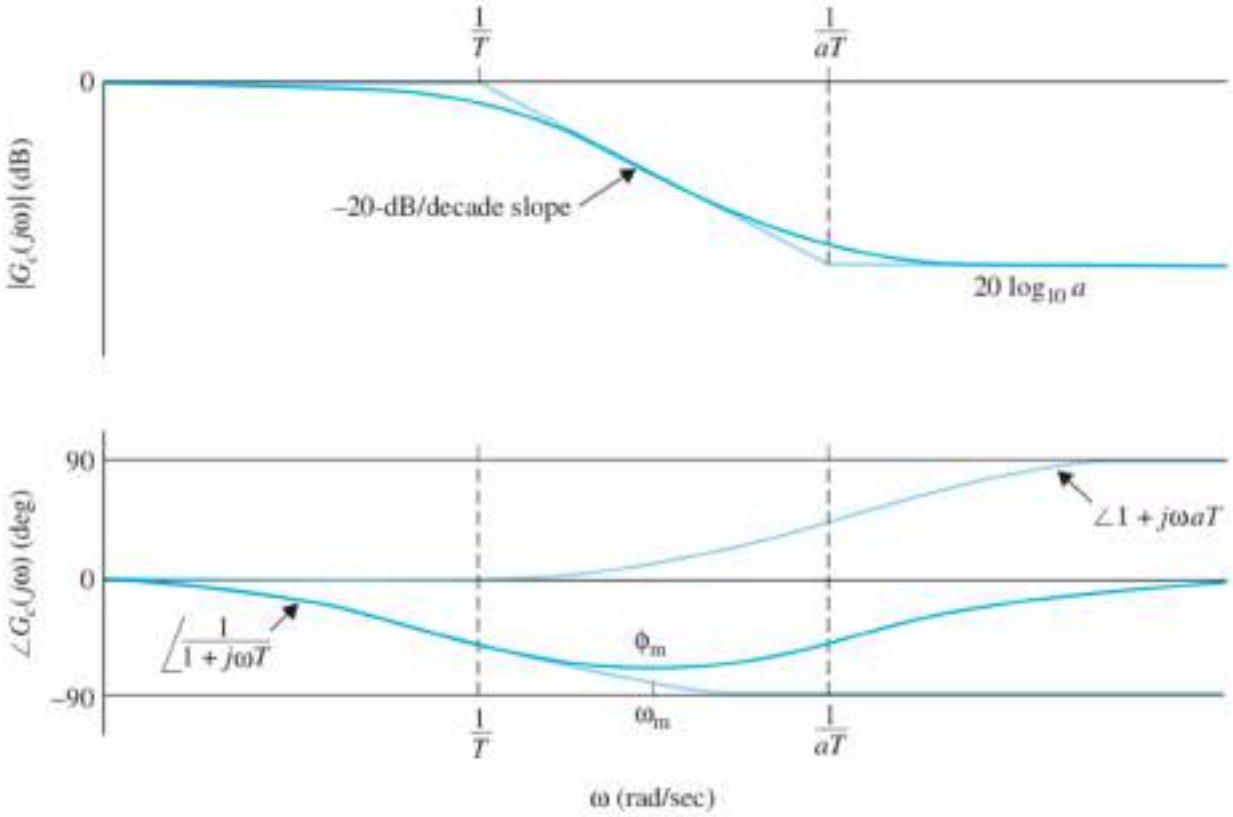


Figure 11-49 Bode diagram of the phase-lag controller. $G_c(s) = \frac{(1+aTs)}{(1+Ts)}$ $a<1$.

3. 위상여유가 증가될 것으로 가정하여 필요한 위상여유를 얻을 수 있는 주파수를 Bode 선도 위에 위치시킨다. 이 주파수가 새로운 이득교차 주파수 ω'_g이고, 이 주파수에서 보상된 크기곡선이 0 dB 축과 교차하도록 한다.

4. 새 이득교차 주파수 ω'_g에서 크기곡선이 0 dB가 되도록 하기 위하여, 지상제어기가 ω'_g의 크기곡선의 값과 같은 양의 감쇠를 제공해야 한다. 즉

$$\left|G_p(j\omega'_g)\right| = -20\log_{10} a \text{ dB} \quad (a<1) \qquad\qquad a = 10^{-\left|G_p(j\omega'_g)\right|/20} \quad (a<1)$$

a의 값을 결정한 다음, 설계를 완성하기 위해 적당한 T의 값만 선택하면 된다. 위상특성으로부터, 절점주파수 $1/aT$가 새 이득교차 주파수 ω'_g 아래로 멀리 존재하면, 제어기의 위상지연은 ω'_g 근처에서 보상된 시스템의 위상에 큰 영향을 주지 못하는 것을 알 수 있다. 한편 $1/aT$의 값이 작을 경우 시스템의 대역폭이 낮아져서, 시스템이 매끄럽지 못하고 강인하지 못하게 되므로, 너무 작게 선택하지 않도록 해야 한다. 지침에 따르면 $1/aT$은 근사적으로 ω'_g의 10분의 1 정도로 선택하는 것이 일반적이다. 즉

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega'_g}{10} \text{ rad/s} \qquad\qquad \frac{1}{T} = \frac{a\omega'_g}{10} \text{ rad/s}$$

5. 보상된 시스템의 Bode 선도를 조사하여 위상여유의 요구조건을 만족시키는가를 확인한다. 만족시키지 못하면 a와 T를 다시 조정하고 설계과정을 반복한다. 설계사양이 이득여유 M_r 또는 BW를 포함하면 이들도 역시 확인하고 만족시키도록 해야 한다.

EXAMPLE 11-5-4

EXAMPLE 11-5-5

11-5-9 Effects and Limitations of Phase-Lag Control

지상제어의 효과와 한계를 요약하면 다음과 같다.

1. 주어진 전방경로이득 K에 대하여 전방경로 전달함수의 크기는 이득교차 주파수 근처와 그 이상에서 감소하며 이에 따라 상대적 안정도가 개선된다.
2. 이득교차 주파수가 낮아지므로 대역폭이 줄어든다.
3. 일반적으로 대역폭이 줄어들기 때문에 상승시간과 정정시간이 길어진다.
4. 대역폭 이상의 모든 주파수에서 민감도함수가 1보다 크다는 의미에서 시스템은 파라미터 변화에 민감하다.

11-5-10 Design with Lead-Lag Controller

진상제어기는 일반적으로 폐루프시스템의 상승시간과 감쇠를 개선하지만 폐루프시스템의 고유주파수를 증가시키는 것을 알았다. 그러나 지상제어기는 적절히 사용하면 감쇠를 개선하지만, 일반적으로 상승시간과 정정시간이 증가한다. 따라서 이런 제어 방법은 각각의 장단점과 한계를 가지며, 하나만으로는 만족스런 보상기를 설계할 수 없는 다수의 시스템이 있다. 따라서 필요할 때마다 두 방법의 장점을 모두 이용하는 진상 및 지상제어기의 조합을 사용하려는 발상은 당연하다.

The transfer function of a simple lag-lead (or lead-lag) controller can be written

$$G_c(s) = G_{c1}(s)G_{c2}(s) = \left(\frac{1+a_1T_1s}{1+T_1s}\right)\left(\frac{1+a_2T_2s}{1+T_2s}\right) \quad (a_1 > 1,\ a_2 < 1) \qquad (11\text{-}149)$$

$$|\leftarrow \text{lead} \rightarrow||\leftarrow \text{lag} \rightarrow|$$

이득과 감쇠를 결국 전방이득 K로 보상할 수 있기 때문에 포함시키지 않았다. 네 개의 파라미터를 가지고 있으므로 1단 진상이나 1단 지상제어기처럼 설계가 간단하지 않다. 일반적으로 제어기에서 진상 부분은 주로 짧은 상승시간과 높은 대역폭을 위해 사용되고, 지상 부분은 주로 시스템의 감쇠를 위해 사용된다.

EXAMPLE 11-5-6

11-6 POLE-ZERO-CANCELLATION DESIGN: NOTCH FILTER

많은 제어공정의 전달함수는 s-평면의 허수축에 근접한 복소극쌍을 하나 또는 그 이상 포함하고 있다. 이런 복소극들은 일반적으로 폐루프시스템이 적게 감쇠되거나 불안정하게 되는 원인이 된다. 하나의 간단한 해결 방법은, 원치 않는 극을 상쇄하는 영점들이 존재하는 전달함수를 갖는 제어기를 이용하고, 요구되는 동적 성능을 성취할 수 있도록 s-평면에서 제어기의 극들을 필요한 곳에 위치시키는 것이다. 예를 들어,

$$G_p(s)=\frac{K}{s(s^2+s+10)}$$

이라면, 공액복소극은 K의 값이 클 때 폐루프시스템의 안정성에 문제를 일으킬 수 있으므로, 직렬형 제어기를 다음과 같이 제안할 수 있다.

$$G_c(s)=\frac{s^2+s+10}{s^2+as+b}$$

극-영점 상쇄의 설계방법은 실용적인 면에서 어려움이 있기 때문에 무차별적으로 사용해서는 안 된다. 실제 시스템에서는 전달함수의 극과 영점의 정확한 상쇄가 거의 불가능하다. 현실적으로 시스템의 전달함수 $G_p(s)$는 일반적으로 시험과 물리적 모델링을 통해 결정된다. 즉 비선형시스템의 선형화 및 복잡한 시스템의 근사화는 피할 수 없다. 따라서 시스템 전달함수의 극과 영점들을 정확하게 모델링하는 것이 매우 어렵다. 실질적으로 원래 차수는 모델링을 통해 구한 전달함수로 표현된 차수보다 더 높을 수 있다. 또 다른 어려운 점은 시스템의 동적 특성에 영향을 미치는 시스템 요소의 마모이다. 작동환경의 변화 때문에 매우 천천히 변화하지만, 시스템 요소가 마모되므로 전달함수의 극과 영점들이 작동 중에 변경화될 수가 있다. 제어기의 파라미터들은 실제 물리적 요소의 이용 가능성에 따라 제약이 따르며 임의로 주어질 수가 없다. 이러한 이유 때문에, 제어기의 전달함수에 우수한 극과 영점들을 설계할 수 있다고 가정해도, 정확한 극-영점 상쇄는 실제적으로 거의 불가능하다. 하지만, 원치 않는 극의 영향을 효과적으로 없애는 데에 실제로 정확한 상쇄가 필요하지 않다.

제어시스템이 다음과 같다고 가정하자.

$$G_p(s)=\frac{K}{s(s+p_1)(s+\bar{p}_1)}$$

직렬형의 제어기 전달함수가

$$G_c(s)=\frac{(s+p_1+\varepsilon_1)(s+\bar{p}_1+\bar{\varepsilon}_1)}{s^2+as+b}$$

보상된 시스템의 개루프 전달함수는

$$G(s)=G_c(s)G_p(s)=\frac{K(s+p_1+\varepsilon_1)(s+\bar{p}_1+\bar{\varepsilon}_1)}{s(s+p_1)(s+\bar{p}_1)(s^2+as+b)}$$

폐루프 전달함수는

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s+p_1+\varepsilon_1)(s+\bar{p}_1+\bar{\varepsilon}_1)}{s(s+p_1)(s+\bar{p}_1)(s^2+as+b)+K(s+p_1+\varepsilon_1)(s+\bar{p}_1+\varepsilon_1)}$$

극쌍 $s = -p_1, -\overline{p_1}$과 영점쌍 $-p_1-\varepsilon_1, -\overline{p_1}-\overline{\varepsilon_1}$ 사이에 존재한다. 따라서 이 폐루프 극들은 상쇄되어야 할 개루프 극과 영점들에 매우 가까이 존재한다. 식 (11-155)를 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \cong \frac{K(s+p_1+\varepsilon_1)(s+\bar{p}_1+\bar{\varepsilon}_2)}{(s+p_1+\delta_1)(s+\bar{p}_1+\delta_1)(s^3+as+b+K)}$$

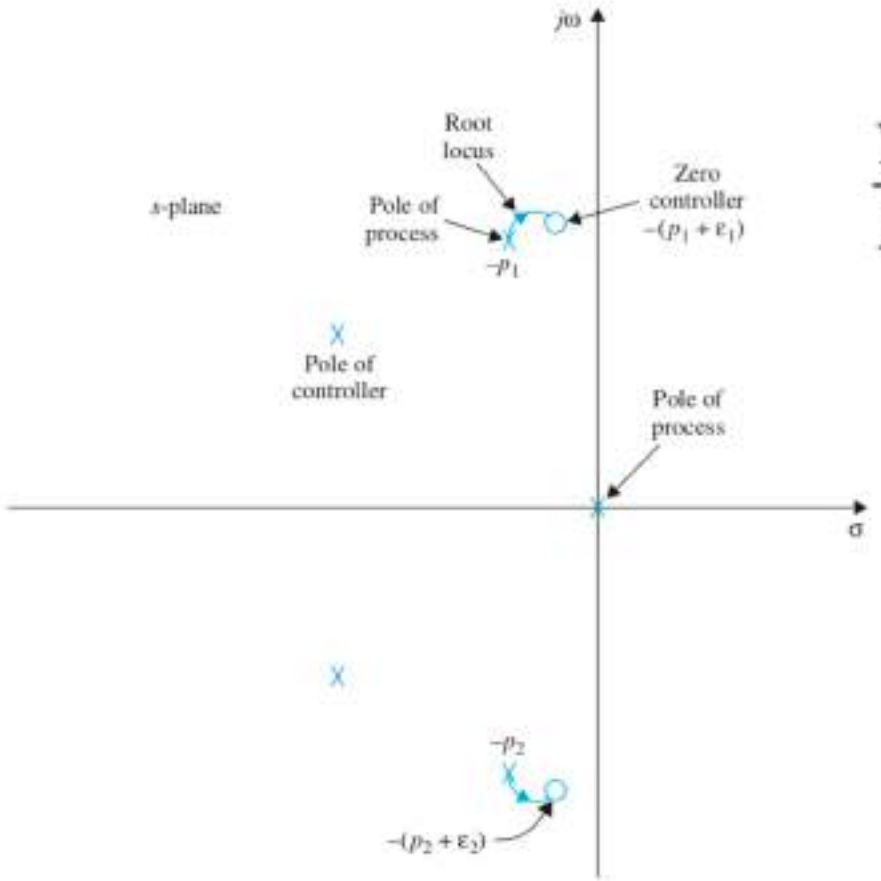


Figure 11-57 Pole-zero configuration and root loci of inexact cancellation.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \cong \frac{K_1}{s+p_1+\delta_1} + \frac{K_2}{s+\bar{p}_1+\bar{\delta}_1} + \text{terms due to the remaining poles}$$

K_1은 매우 작은 값인 K_2 에 비례함을 보일 수 있다. 마찬가지로 K_2도 매우 작다. 이 문제에서는 $-p_1$과 $-p_2$에 있는 극을 정확히 상쇄시킬 수 없을지라도, 부정확한 상쇄로 인하여 생성되는 과도응답의 크기가 무시할 정도로 작아지기 때문에, 상쇄를 위해 지정된 제어기의 영점이 목표점에서 너무 멀리 떨어져 있지 않다면, 실제적인 목적을 위해 부정확한 상쇄 영향을 무시할 수 있다

s-평면 우반면에 있는 극의 경우 부정확한 상쇄는 불안정한 시스템을 초래하므로 극-영점 상쇄를 시도하지 말아야 함을 명심하라. 극의 부정확한 상쇄는 공정 전달함수의 원치 않는 극들이 s-평면 허수축 또는 우반면에 위치할 수 있으므로 어려움을 유발할 수 있다. 이런 경우 부정확한 상쇄는 불안정한 시스템을 초래할 수 있다.

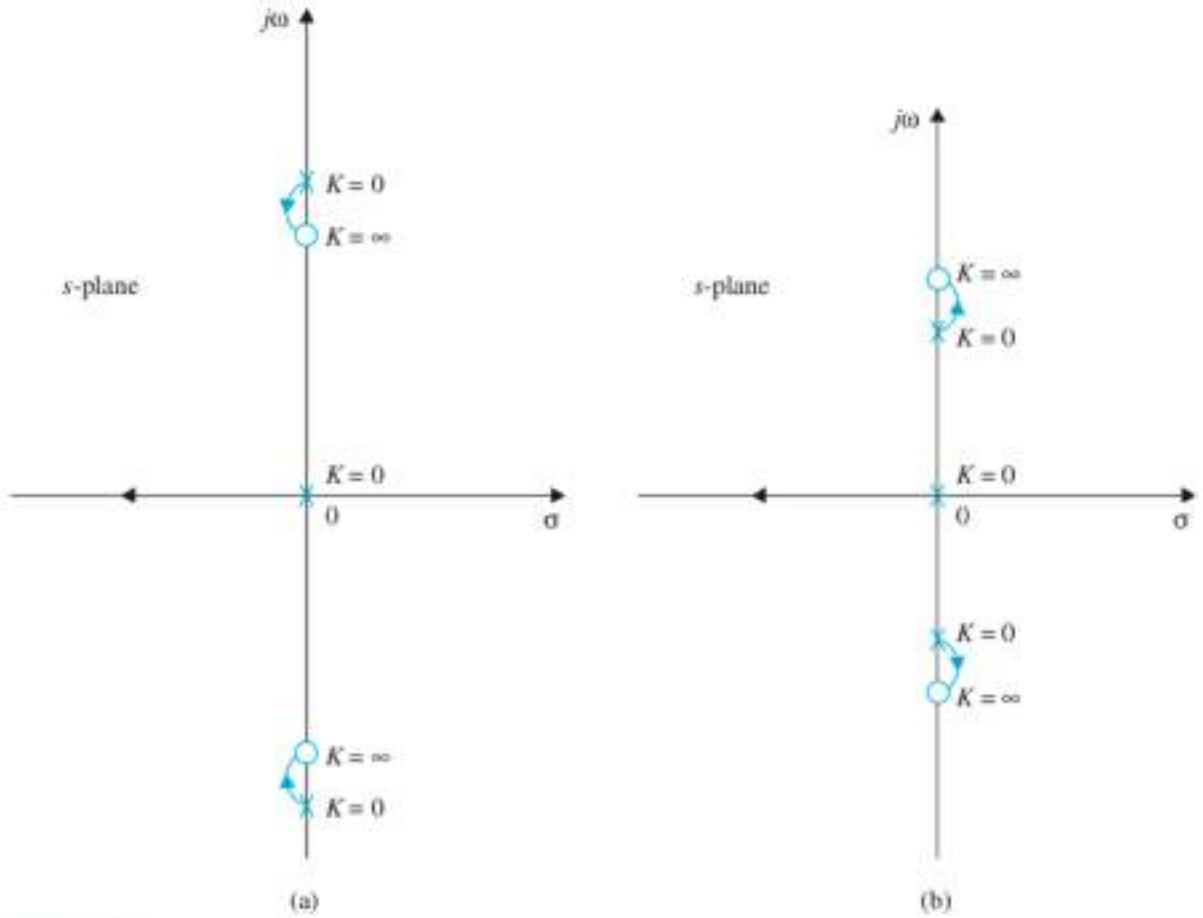


Figure 11-58 Root loci showing the effects of inexact pole-zero cancellations.

11-6-1 Second-Order Active Filter

$$G_c(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = K\frac{s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$K = -\frac{R_6}{R_7}$$

$$a_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$a_2 = \frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_2}$$

$$b_1 = \left(1 - \frac{R_1 R_7}{R_3 R_8}\right) a_1 \quad (b_1 < a_1)$$

$$b_2 = \left(1 - \frac{R_2 R_7}{R_3 R_9}\right) a_2 \quad (b_2 < a_2)$$

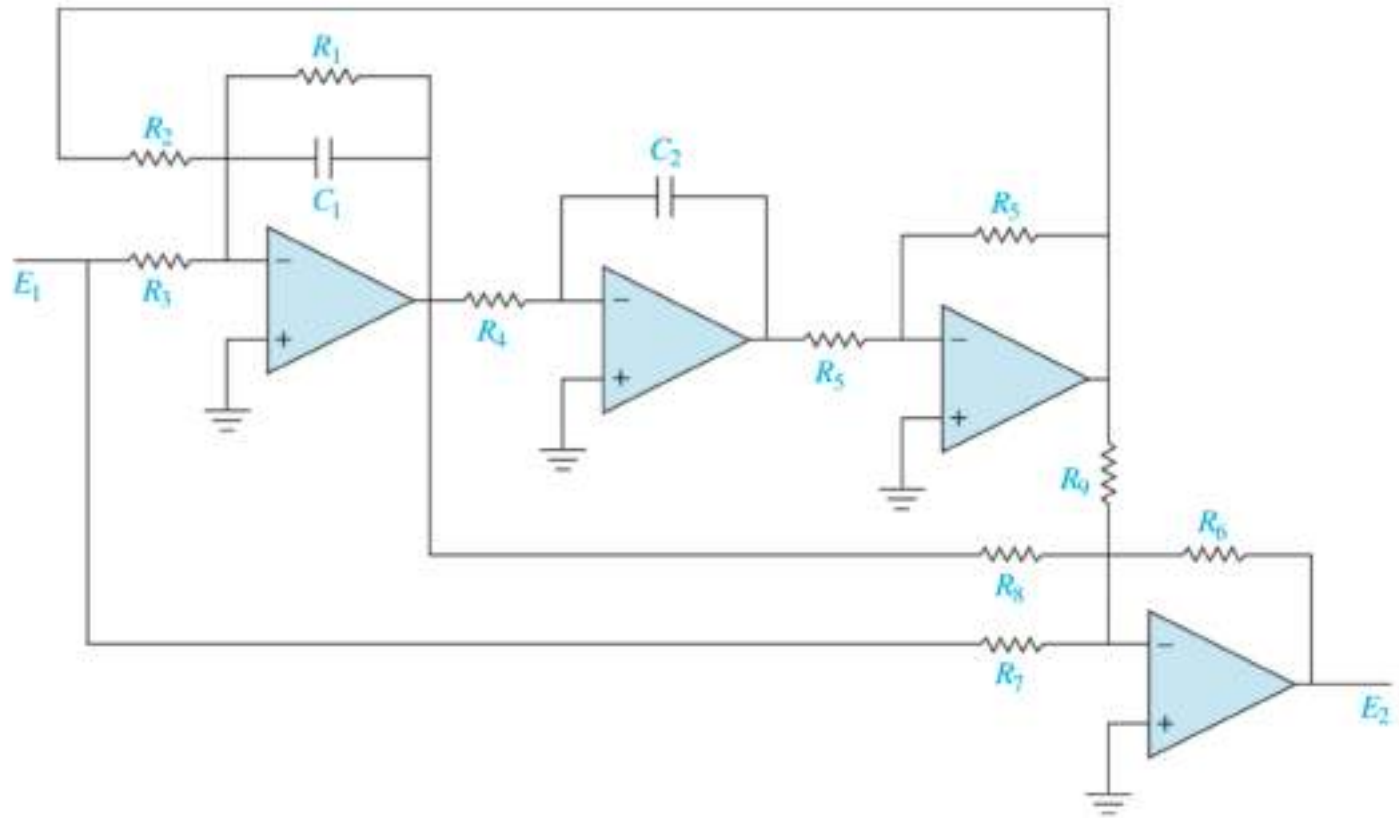


Figure 11-59 Op-amp circuit realization of the second-order transfer function. $\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = K\frac{s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$.

11-6-2 Frequency-Domain Interpretation and Design

제어기의 크기선도는 공진주파수 ω_n에 전형적인'노치'를 갖고 있다. 위상선도를 살펴보면 공진주파수 이하에서는 위상이 음이고 이상에서는 양이며 공진주파수에서는 0도를 지난다. 크기곡선의 감소와 양의 위상특성은 선형시스템의 안정도를 개선하는 데 효과적으로 이용될 수 있다. 크기곡선에서의 '노치'특성 때문에 산업시스템에서는 이 제어기를 노치필터(notch filter) 또는 노치제어기(notch controller)로 부르고 있다.

주파수영역 관점에서 보면, 노치제어기는 크기특성과 위상특성이 시스템의 고주파수 및 저주파수 성질에 영향을 주지 않으므로, 어떤 경우에서는 진상 및 지상제어기보다 우수한 장점을 갖는다. 극-영점 상쇄 원리를 이용하지 않고, 주파수영역에서 실시하는 보상용 노치제어기 설계는 요구되는 감쇠의 총량과 제어기의 공진주파수 결정과 관련된다.

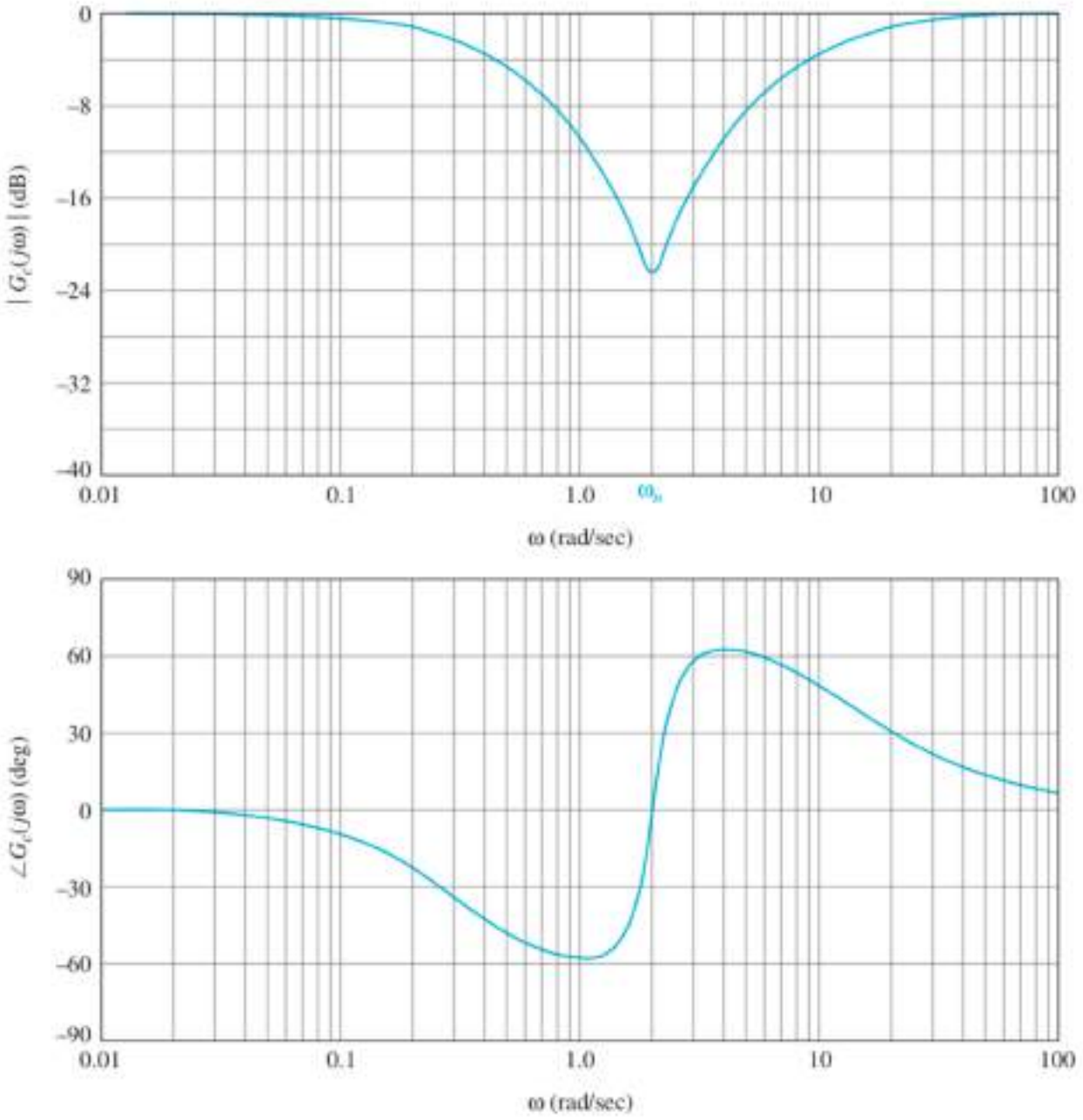


Figure 11-60 Bode plot of a notch controller with the transfer function. $G(s)=\dfrac{(s^2+0.8s+4)}{(s+0.384)(s+10.42)}$.

ω_n 에서 요구되는 최대감쇠를 알면

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_z \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_p \omega_n s + \omega_n^2}$$

where we have made the simplification by assuming that $a_2 = b_2$.

$$\left|G_c(j\omega_n)\right| = \frac{\zeta_z}{\zeta_p}$$

EXAMPLE 11-6-1

11-7 FORWARD AND FEEDFORWARD CONTROLLERS

앞에서 논의한 보상방법들은 모두 제어기가 직렬 또는 병렬로 연결된 다단계를 포함하고 있지만 시스템 내에는 본질적으로 하나의 제어기가 존재하므로 1자유도이다. 1자유도 제어기에 대한 한계를 11-1절에서 취급한 바 있다. 그림 *11-2(d)~(f)*에서 살펴보았던 2자유도 보상방법은 여러 가지 설계기준을 동시에 만족시키는 설계에 있어서 융통성을 제공한다.

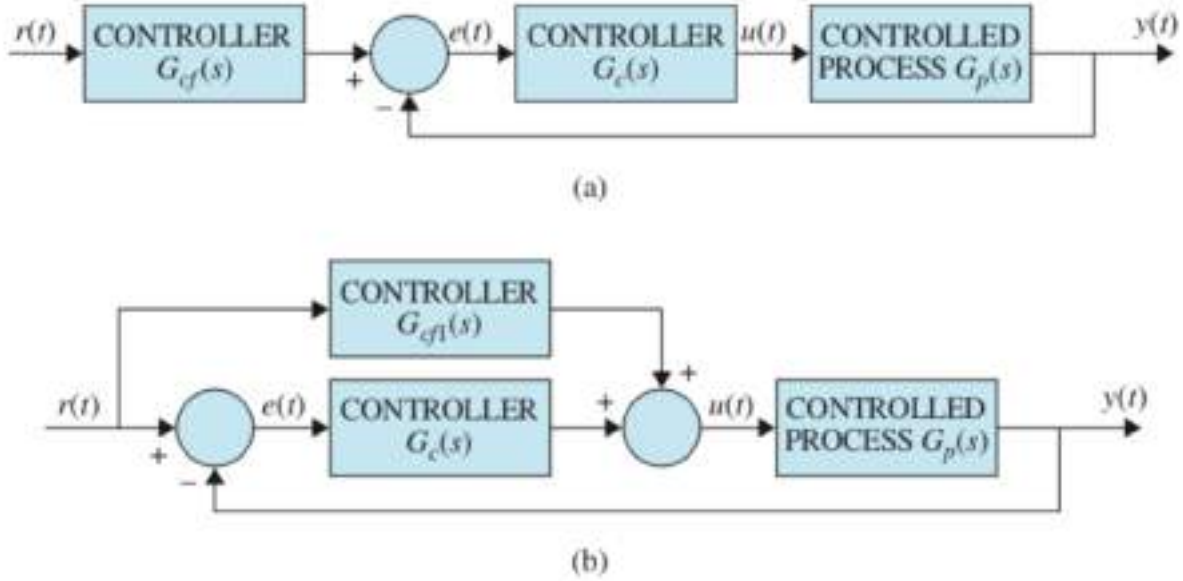


Figure 11-65 (*a*) Forward compensation with series compensation. (*b*) Feedforward compensation with series compensations.

그림 11-2(e)로부터 시스템의 폐루프 전달함수는

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{cf}(s)G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}$$

오차 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)}$$

오차 전달함수가 어떤 필요한 특성을 갖도록 제어기 $G_c(s)$를 설계할 수 있고, 기준치가 입출력 관계와 관련된 성능의 요구조건을 만족시키도록 $G_{cf}(s)$ 를 선택할 수 있다. 2자유도 설계의 융통성을 묘사하는 또 다른 방법은 일반적으로 제어기 $G_c(s)$ 를 시스템의 적절한 범위의 안정도와 성능을 충족시키도록 설계하는 것이지만, $G_c(s)$ 의 영점 중에 일부가 공정 전달함수 $G_p(s)$ 의 극과 상쇄되지 않을 때는 그것이 항상 폐루프시스템의 영점이 되므로, 이러한 영점들은 특성방정식에서 결정된 상대적인 감쇠가 충족되어도 시스템의 출력에 큰 오버슈트를 일으키기도 한다. 이런 경우와 또 다른 이유 때문에, 전달함수 $G_{cf}(s)$는 제어용으로 사용하거나 폐루프 전달함수의 원치 않는 영점을 상쇄하기 위해 사용되며 이 과정에서 특성방정식은 변하지 않는다. 물론 $G_{cf}(s)$ 의 영점이 제어기 $G_c(s)$ 에 의해 영향을 받을 수 없는 폐루프 전달함수의 원치 않는 어떤 극을 상쇄하도록 할 수도 있다.

그림 11-2(f)에 나타낸 전향피드 보상방법은 전향보상과 동일한 목적으로 이용되며 두 구성 사이의 차이는 시스템과 하드웨어 구축여건에 따라 결정된다.

전향보상과 전향피드 보상이 폐루프 전달함수의 극과 영점을 직접 추가 또는 삭제할 수 있기 때문에 매우 위력적으로 보이지만, 피드백의 기본적 특성의 경우처럼 본질적인 문제가 있음을 유의해야 한다. 전향 또는 전향피드 보상이 위력적이라면 왜 피드백을 필요로 하는가? 그림 11-2(e)와 (f)의 시스템에서 $G_{cf}(s)$ 는 피드백 루프의 외곽에 위치하므로, 시스템은 $G_{cf}(s)$ 에 포함된 파라미터의 변화에 민감하다. 따라서 실질적으로는 이런 유형의 보상이 모든 상황에 만족스럽게 적용될 수는 없다.

11-8 DESIGN OF ROBUST CONTROL SYSTEMS

수많은 제어시스템 응용에서, 설계된 시스템은 감쇠 및 정확도 사양을 만족시켜야 할 뿐만 아니라 외부 교란과 파라미터 변화에 강인(robust)해야 한다. 전형적인 제어시스템에서 피드백은 외부 교란과 파라미터 변화에 대한 영향을 감소시키는 근본적인 능력이 있음을 소개한 바 있다. 그러나 불행히도 전형적인 피드백 형태의 강인성은 안정도에 나쁜 영향을 미치는 높은 루프 이득을 가질 경우에만 이루어진다.

외부교란은 신호 $d(t)$로 표기하고 증폭기 이득 K는 시스템의 동작 중에 변화한다고 가정한다. 이 시스템의 입출력 전달함수는 $d(t) = 0$일 때 다음과 같다.

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_{cf}(s)G_c(s)G_p(s)}{1 + KG_c(s)G_p(s)}$$

그리고 외란 출력 전달함수는 $r(t) = 0$ 일 때

$$T(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + KG_c(s)G_p(s)}$$

일반적으로 설계 전략은 큰 외란이 존재하는 주파수영역에서 이 외란에 출력 $y(t)$가 민감하지 않도록 제어기 $G_c(s)$를 선택하고, 입력 $r(t)$와 출력 $y(t)$ 사이에 요구 전달함수가 생성되도록 전향제어기 $G_{cf}(s)$를 결정하는 것이다.
K의 변화를 고려하여 감도 $M(s)$를 다음과 같이 정의하자.

$$S_K^M = \frac{\text{percent change in } M(s)}{\text{percent change in } K} = \frac{dM(s)/M(s)}{dK/K}$$

그러면,

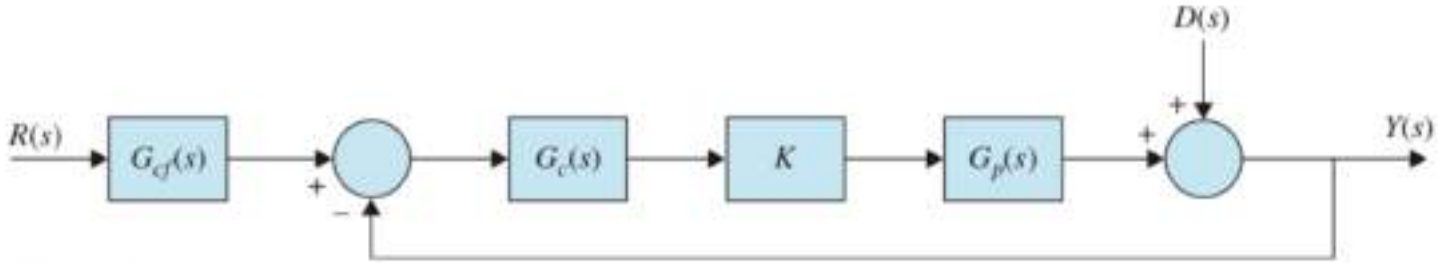


Figure 11-66 Control system with disturbance.

$$S_K^M = \frac{1}{1 + KG_c(s)G_p(s)}$$

그러므로 감도함수와 외란 출력 전달함수는 동일하다. 이것은 외란억제와 K에 대한 강인성을 동일한 제어방식으로 해결할 수 있음을 의미한다.

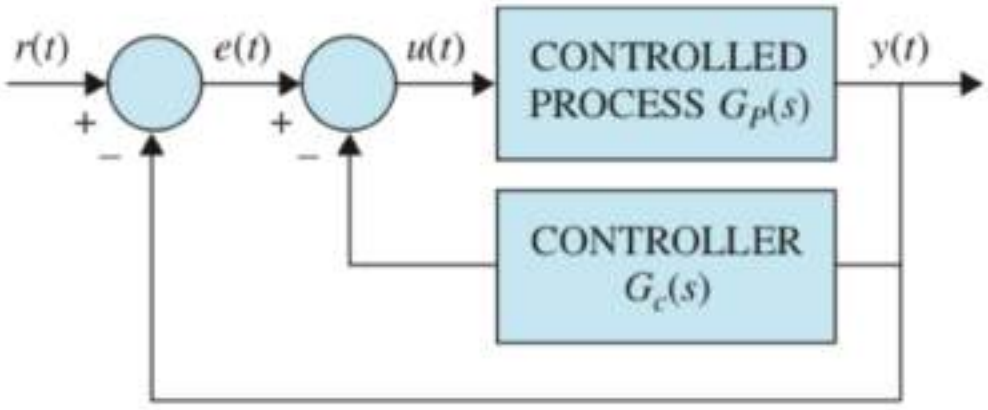
EXAMPLE 11-8-1

EXAMPLE11-8-2

EXAMPLE11-8-3

11-9 MINOR-LOOP FEEDBACK CONTROL

앞에서 논의한 제어형태는 모두 직렬제어기를 제어시스템의 주 루프나 전방경로에 추가하여 사용했다. 비록 직렬제어기가 실현이 간단하기 때문에 가장 널리 사용되지만 시스템의 성격에 따라 그림 11-2(b)와 같이 국부 피드백루프에 제어기를 추가하는 것이 때로는 유리하다. 예를 들면 회전속도계는 속도표시는 물론 회전속도계의 출력신호를 피드백시켜 폐루프시스템의 안정도를 개선시키기 위해 dc 모터에 직접 연결된다. 모터속도는 모터의 역기전력을 전자적으로 변환시켜 발생시킬 수 있다. 이론적으로 PID 제어기나 진상 및 지상제어기들이 효과의 차이는 있겠지만 국부루프 피드백제어기로서 사용될 수 있다. 어떤 조건하에서는 국부루프 피드백제어기가 더욱 강인한, 즉 외부교란과 내부 파라미터 변화에 덜 민감한 시스템을 이룰 수 있다.



폐루프시스템의 감쇠를 개선하기 위해서 구동신호의 미분치를 사용하는 원리는 유사한 효과를 얻기 위해서 출력신호에도 적용할 수 있다. 다시 말해 출력신호의 미분이 피드백되어 시스템의 구동신호에 대수적으로 가해진다. 실제로 출력변수가 기계적인 변위라면 회전속도계는 기계적인 변위를 그 변위의 미분에 비례하는 전기적인 신호로 변환시키는 데 사용될 수 있다. 그림 11-75은 출력의 미분치를 피드백시키는 제2의 경로를 갖고 있는 제어시스템의 블록선도이다.

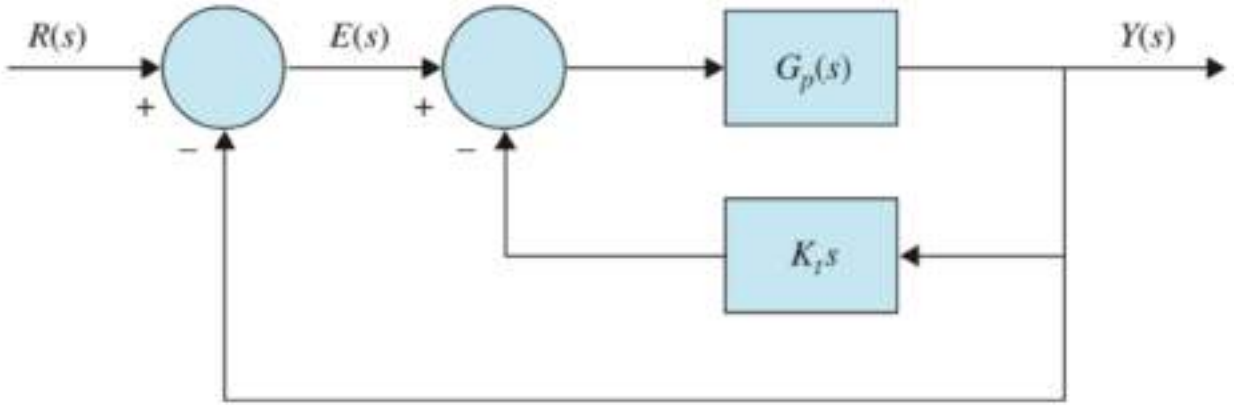


Figure 11-75 Control system with tachometer feedback.

The closed-loop transfer function of the system is

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \left(2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2\right)s + \omega_n^2}$$

and the characteristic equation is

$$s^2 + \left(2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2\right)s + \omega_n^2 = 0$$

특성방정식으로부터 K_t가 감쇠비 ζ와 동일한 항에 나타나므로, 회전속도계 피드백은 시스템의 감쇠를 증가시키는 효과가 있다.

이런 관점에서 회전속도계 피드백제어는 PD 제어와 동일한 효과가 있다. 그러나 그림 11-3의 PD 제어를 갖는 시스템의 폐루프 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(K_P + K_D s)}{s^2 + \left(2\zeta\omega + K_D\omega_n^2\right)s + \omega_n^2 K_P}$$

만일 $K_P = 1$이고 $K_D = K_t$일 경우 식 (11-218)과 (11-220)의 두 전달함수를 비교하면, 두 특성방정식이 동일함을 알 수 있다. 그러나 식 (11-220)은 $s = -K_P/K_D$에 영점을 갖는 반면에, 식 (11-218)은 갖지 않는다. 그러므로 회전속도계 피드백을 갖는 시스템의 응답은 특성방정식으로 고유하게 정의되며, PD 제어시스템의 응답은 $s = -K_P/K_D$에 있는 영점에도 역시 의존하게 되어, 계단응답의 오버슈트에 중요한 영향을 미칠 수도 있다.
정상상태 해석과 관련하여, 회전속도계 피드백시스템의 전방경로 루프 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2}{s\left(s + 2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2\right)}$$

이 시스템은 여전히 1형이므로, 정상상태오차의 기본 특성은 회전속도계 피드백으로 변하지 않는다. 즉 입력이 계단함수일 때, 정상상태오차는 영이다. 그러나 단위램프함수 입력에 대한 이 시스템의 정상상태오차는 $(2\zeta + K_t\omega_n)/\omega_n$인 반면에, 그림 11-3의 PD 제어시스템의 오차는 $2\zeta\,\omega_n$이다. 그러므로 1형 시스템에서 회전속도계 피드백은 램프오차상수 K_v를 감소시키는 반면, 계단오차상수 K_P에는 아무런 영향을 미치지 않는다.

EXAMPLE11-9-1