

자동 제어(Automatic Control)

9장 근궤적 기법

교재: Automatic Control Systems

서론

- 선형제어 시스템
 - 페루프 전달함수의 극점과 영점
 - 극점
 - 선형 SISO 시스템의 절대 및 상대 안정도를 결정
 - 영점
 - 시스템의 과도성질 결정
 - 시스템의 임의의 파라미터가 변할 때 특성방정식의 근궤적

서론

- 근궤적 기법
 - 하나 또는 그 이상의 변수 파라미터를 가지는 대수방정식의 근의 성질을 연구하는데 응용

$$F(s) = P(s) + KQ(s) = 0$$

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

$$Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0$$

- K : 실정수, $-\infty < K < \infty$
- n, m : 양의 정수
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$: 실수, 일정

서론

- 근콘투어(root contour)
 - 다변수 파라미터에서 한번에 한 개의 파라미터를 변화시키면서 얻어낸 근궤적
 - 식(9-1) ~ (9-3)의 s 를 z 로 치환함으로써 선형이산치 제어시스템 특성방정식의 근궤적을 구성할 수 있음(부록 E)
- K 값에 근거한 영역의 정의
 - RL(root loci) : $-\infty < K < \infty$ 의 전체 근궤적
 - RC(root contour) : 한 개 이상의 파라미터가 변할 때의 근궤적

근궤적의 기본 성질

- 단일 루프 제어시스템의 폐루프 전달함수

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

- 폐루프 시스템의 특성방정식은 $Y(s)/R(s)$ 의 분모다항식을 '0'

$$1+G(s)H(s) = 0$$

- $G(s)H(s)$ 는 가변 파라미터 K 를 곱셈인자로 포함한다고 가정

- 유리함수
$$G(s)H(s) = \frac{KQ(s)}{P(s)}$$

- $P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$
- $Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0$

근궤적의 기본 성질

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{KQ(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + KQ(s)}{P(s)} = 0$$

- Ex. 제어시스템의 특성방정식이 다음과 같다고 가정

$$- s(s+1)(s+2) + s^2 + (3+2K)s + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{2Ks}{s(s+1)(s+2) + s^2 + 3s + 5} = 0$$

$$\therefore \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{2s}{s^3 + 4s + 5s + 5}$$

근궤적의 기본 성질

- $G(s)H(s)$ 를 다음과 같이 표기

$$G(s)H(s) = K G_1(s)H_1(s) \quad (9-11)$$

$G_1(s)H_1(s)$ 는 가변 파라미터 K 를 포함하지 않음.

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + K G_1(s)H_1(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K} \quad (9-12)$$

근궤적의 기본 성질

- 식(9-12)가 충족되기 위한 조건
 - 크기조건

$$|G_1(s)H_1(s)| = \frac{1}{|K|}, \quad -\infty < K < \infty$$

- 각도조건 ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (임의의 정수))

$$\begin{aligned} \angle G_1(s)H_1(s) &= (2i + 1)\pi, \quad K \geq 0 \\ &= \text{odd multiples of } \pi \text{ radians or } 180^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle G_1(s)H_1(s) &= 2i\pi, \quad K \leq 0 \\ &= \text{even multiples of } \pi \text{ radians or } 180^\circ \end{aligned}$$

근궤적의 기본 성질

- 각도조건은 s 평면 내 근궤적을 그리는데 이용
- 근궤적이 그려지면 궤적 상 K 의 값은 크기조건을 이용

근궤적의 기본 성질

- 근궤적의 도해적 구성

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

- 크기조건

$$|G_1(s)H_1(s)| = \frac{\prod_{i=1}^m |s+z_i|}{\prod_{k=1}^n |s+p_k|} = \frac{1}{|K|}, \quad -\infty < K < \infty$$

- 각도조건

$$\text{where } 0 \leq K < \infty: \angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{k=1}^m \angle(s+z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s+p_j) = (2i+1)\pi$$

$$\text{where } -\infty \leq K < 0: \angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{k=1}^m \angle(s+z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s+p_j) = 2i\pi$$

$$(i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

근궤적의 기본 성질

- 근궤적의 도해적 해석
 - K 의 양인 값에 대응하는 근궤적 상의 임의의 점 s_1 이 다음 조건을 만족시켜야 함
 - $G(s)H(s)$ 의 영점과 s_1 의 벡터각의 합과 극점과 s_1 의 벡터각의 합과의 차이가 180° 의 홀수배
 - K 의 음인 값에 대응하는 근궤적 상의 임의의 점 s_1 이 다음 조건을 만족시켜야 함
 - $G(s)H(s)$ 의 영점과 s_1 의 벡터각의 합과 극점과 s_1 의 벡터각의 합과의 차이가 0° 를 포함해서 180° 의 짝수배
- 근궤적 상의 K 의 값

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}$$

극점 ~ s_1 의 벡터길이의 곱

영점 ~ s_1 의 벡터길이의 곱

근궤적의 기본 성질

• 전달함수

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$

• 각도조건

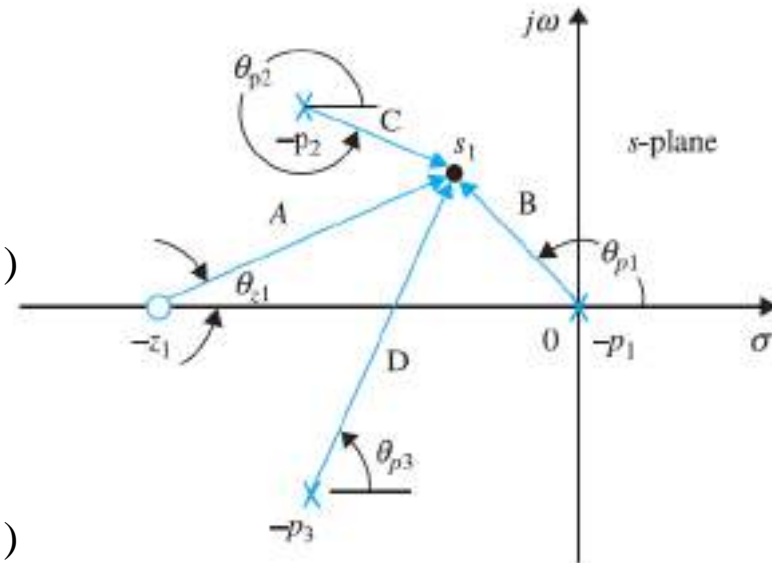
- 양의 K

$$\begin{aligned} \angle(s_1+z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1+p_2) - \angle(s_1+p_3) \\ = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = (2i+1)\pi \end{aligned}$$

- 음의 K

$$\begin{aligned} \angle(s_1+z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1+p_2) - \angle(s_1+p_3) \\ = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = 2i\pi \end{aligned}$$

$$|K| = \frac{|s_1||s_1+p_2||s_1+p_3|}{|s_1+z_1|} = \frac{\mathbf{BCD}}{\mathbf{A}}$$



근궤적의 성질

- $K=0$ 과 $K=\pm\infty$ 인 점
 - 근궤적 상 $K=0$ 인 점은 $G(s)H(s)$ 의 극점
 - 근궤적 상 $K=\pm\infty$ 인 점은 $G(s)H(s)$ 의 영점

$$G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

- 극점과 영점은 필요시 무한대에 있는 점도 포함

근궤적의 성질

예제 7-3-1

다음 방정식을 생각하자.

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \quad (7-26)$$

$K = 0$ 일 때 이 방정식의 세 개의 근은 $s = 0, -2$ 와 -3 에 있다. K 의 크기가 무한대이면 이 방정식의 세 개의 근은 $s = -1, \infty$ 와 ∞ 에 있다. s 평면에서 무한대는 점의 개념으로 생각하는 것이 유용하다. 유한 s 평면은 무한반경을 가지는 구의 아주 작은 부분으로 볼 수 있다. 이때 s 평면상 무한대는 우리가 직면한 구의 반대편의 한 점이 된다.

식 (7-26)의 양변을 K 를 포함하지 않은 항으로 나누어 주면 다음을 얻는다.

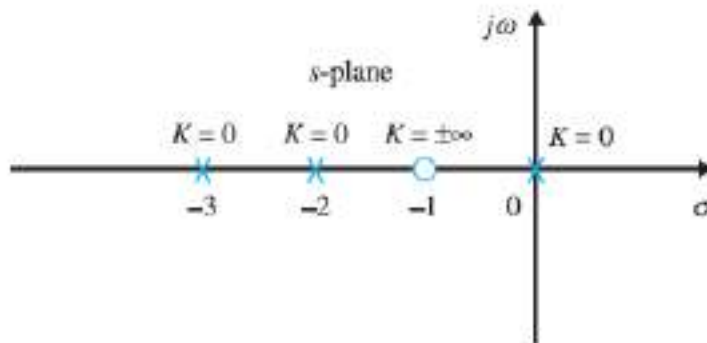
$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad (7-27)$$

이 식은

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad (7-28)$$

근궤적의 성질

그러므로 $K = 0$ 일 때 식 (7-26)의 세 개의 근은 함수 $G(s)H(s)$ 의 극과 같다. $K = \pm\infty$ 일 때 식 (7-26)의 세 개의 근은 무한대를 포함하는 세 개의 $G(s)H(s)$ 의 영점에 있다. $K = 0$ 에서의 근궤적 상 세 개의 점과 $K = \pm\infty$ 에서의 점을 그림 7-2에 나타내었다.



[그림 7-2] $s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0$ 의
근궤적상 $K = 0$ 과 $K = \pm\infty$.

근궤적의 성질

- 근궤적의 지로의 수
 - $F(s) = P(s) + KQ(s) = 0$ 의 근궤적의 지로의 수는 다항식의 차수와 같다.
 - Ex.
 - $s(s+2)(s+3)+K(s+1) = 0$
 - 방정식이 3차이기 때문에 근궤적의 지로의 수는 세 개
 - = 방정식의 근이 3개이기 때문에 근궤적의 지로의 수는 세 개

근궤적의 성질

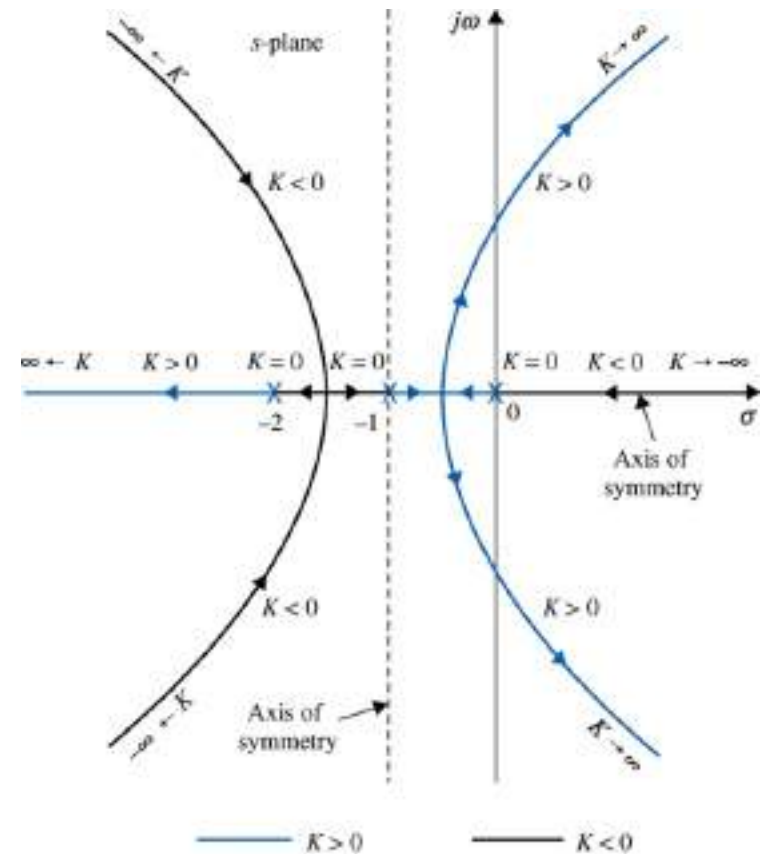
- 근궤적의 대칭

- 근궤적은 s 평면의 실수축에 대하여 대칭
- 일반적으로 근궤적은 $G(s)H(s)$ 의 극과 영점의 대칭축에 대하여 대칭

- Ex.

$$s(s+1)(s+2)+K=0$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



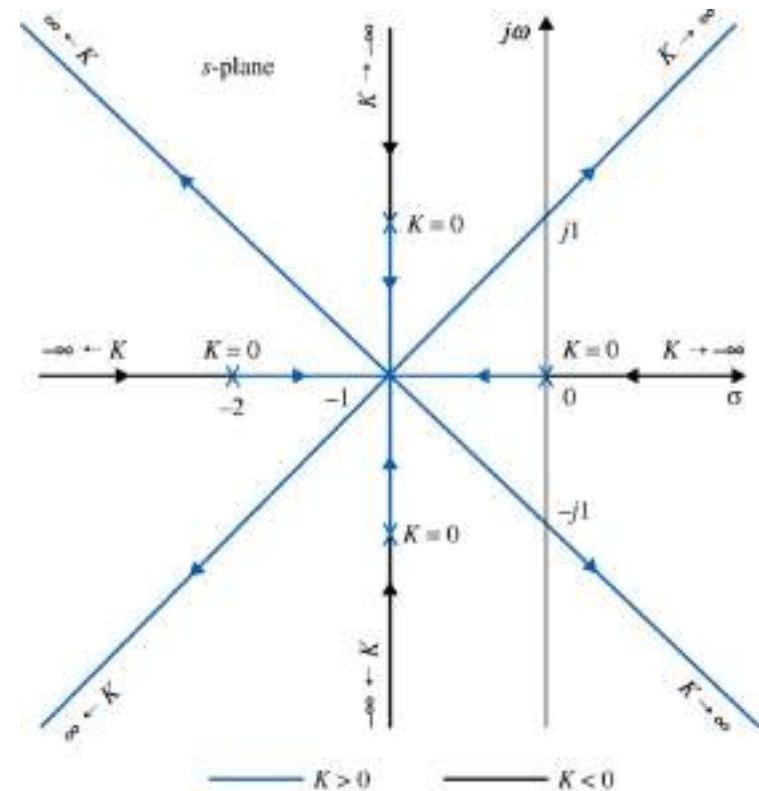
근궤적의 성질

- 근궤적의 대칭

- 근궤적은 s 평면의 실수축에 대하여 대칭
- 일반적으로 근궤적은 $G(s)H(s)$ 의 극과 영점의 대칭축에 대하여 대칭

- Ex.

$$s(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)+K=0$$



근궤적의 성질

- 근궤적의 점근선 각도 : $|s| = \infty$ 에서 근궤적의 성질
 - s 의 값이 커지면 $K \geq 0$ 에 대한 근궤적은 다음 식으로 주어지는 각도를 가진 점근선에 점근

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m|} \times 180^\circ \quad n \neq m$$

- $i = 0, 1, 2, \dots, |n-m|-1$
- $n : G(s)H(s)$ 의 유한극
- $m : G(s)H(s)$ 의 영점

- $K \leq 0$ 인 경우 근궤적의 점근선은 $K \geq 0$ 인 경우의 점근선의 연장선

근궤적의 성질

- 점근선의 교차점(도심)
 - 근궤적의 $2|n-m|$ 개 점근선의 교차점은 s 평면의 실수축 상,

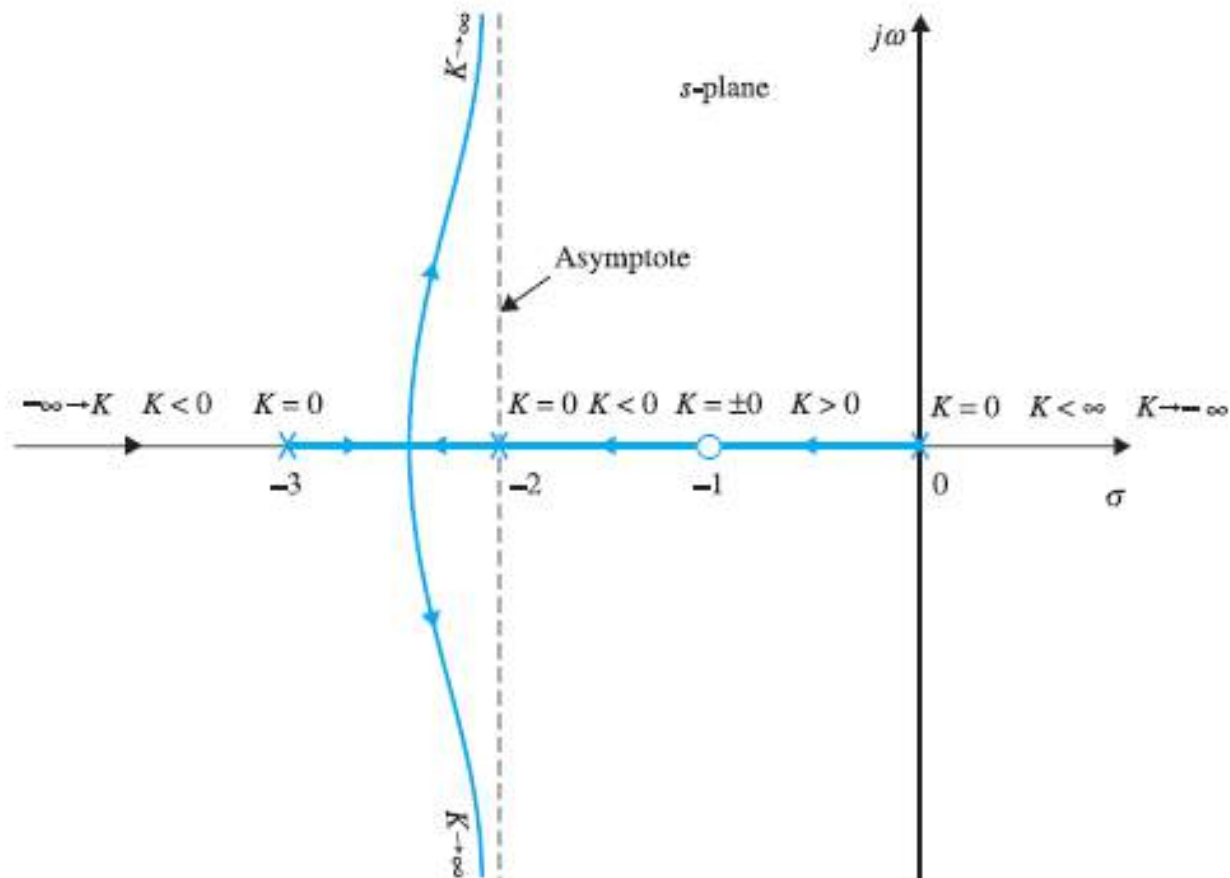
$$\sigma_1 = \frac{\Sigma \text{finite pole of } G(s)H(s) - \Sigma \text{finite zeros of } G(s)H(s)}{n - m}$$

- n : $G(s)H(s)$ 의 유한극의 수
- m : $G(s)H(s)$ 의 유한영점의 수
- σ_1 : 근궤적의 무게중심, 항상 실수

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma \text{real parts pole of } G(s)H(s) - \Sigma \text{real parts zeros of } G(s)H(s)}{n - m}$$

근궤적의 성질

- $-\infty < K < \infty$ 의 근궤적과 점근선
 - $s(s+2)(s+3)+K(s+1)=0$



근궤적의 성질

- Ex.

- $$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

- 특성방정식 : $s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$

- 근궤적의 6가지 특성

1. $K=0$: 근궤적 위의 $K=0$ 이 되는 점은 $G(s)H(s)$ 의 극점
 - $s=0, -4, -1+j, -1-j$
2. $K=\pm\infty$: 근궤적 위의 $K=\pm\infty$ 인 점은 $G(s)H(s)$ 의 영점
 - $s=-1, \infty, \infty, \infty$
3. 식이 4차식이므로 근궤적은 4개의 지로
4. 근궤적은 실수축에 대칭

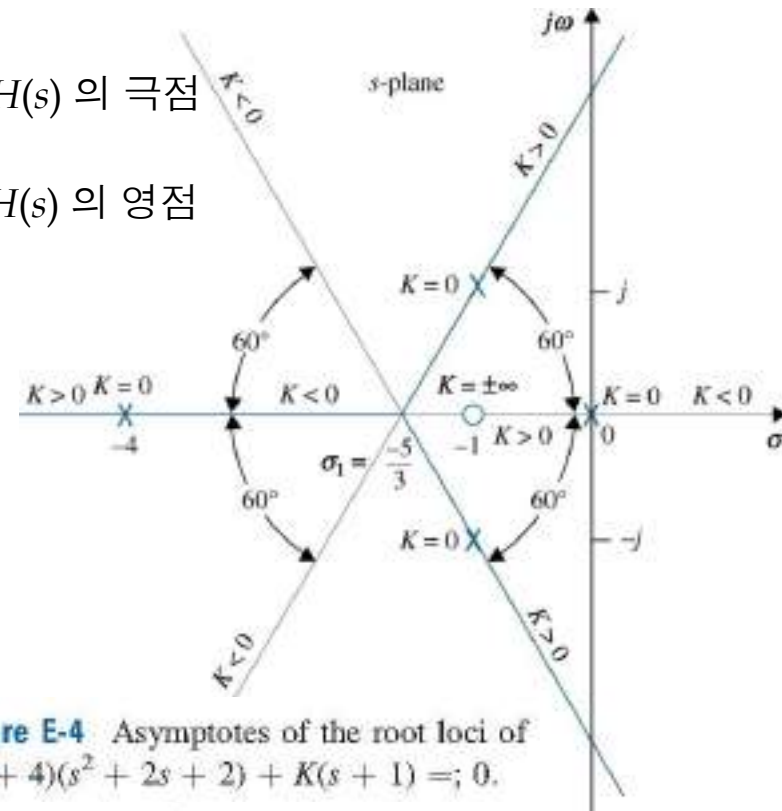


Figure E-4 Asymptotes of the root loci of $s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$.

근궤적의 성질

• Ex.

$$- G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

- 특성방정식 : $s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$

- 근궤적의 6가지 특성

5. $G(s)H(s)$ 의 유한극점의 수가 유한영점의 수보다 3개 많기 때문에 ($n-m=4-1=3$), $K=\pm\infty$ 일 때 근궤적은 $s=\infty$ 에 접근

- 근궤적($K \geq 0$)의 점근선의 각도

$$j=0: \theta_0 = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$j=1: \theta_1 = \frac{540^\circ}{3} = 180^\circ$$

$$j=2: \theta_2 = \frac{900^\circ}{3} = 300^\circ$$

- 근궤적($K \leq 0$)의 점근선의 각도

$$0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$$

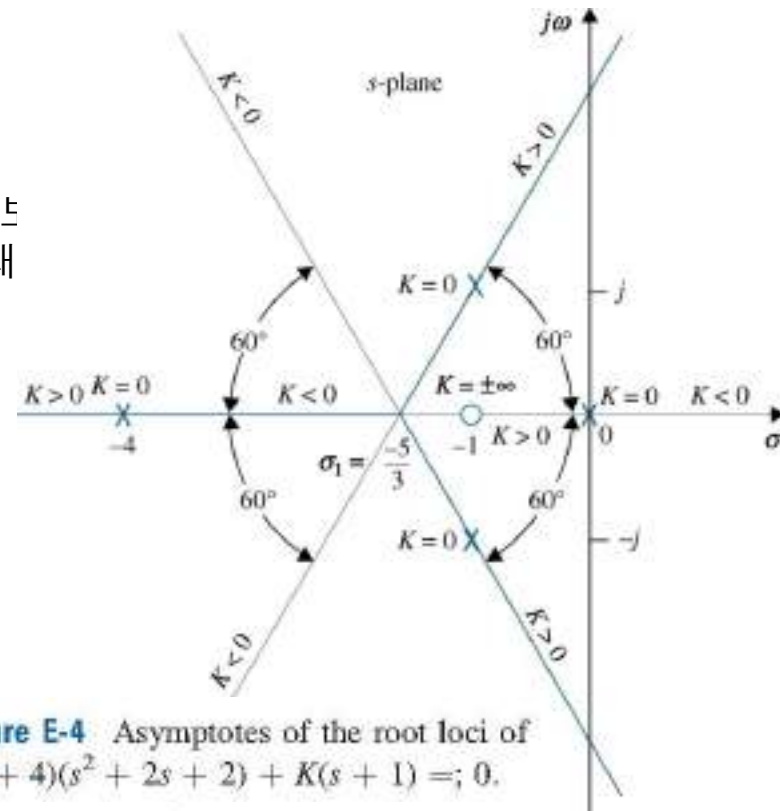


Figure E-4 Asymptotes of the root loci of $s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$.

근궤적의 성질

• Ex.

$$- G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

- 특성방정식 : $s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$

- 근궤적의 6가지 특성

6. 점근선의 교차점

$$\sigma_1 = \frac{(-4-1-4)-(-1)}{4-1} = -\frac{5}{3}$$

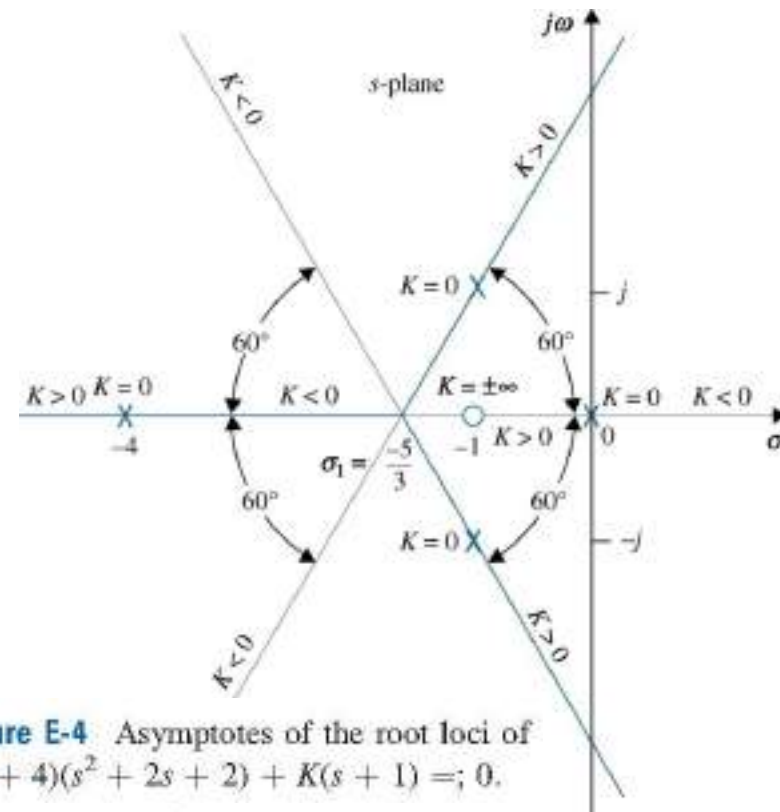


Figure E-4 Asymptotes of the root loci of $s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$.

근궤적의 성질

- 여러 방정식의 근궤적의 점근선

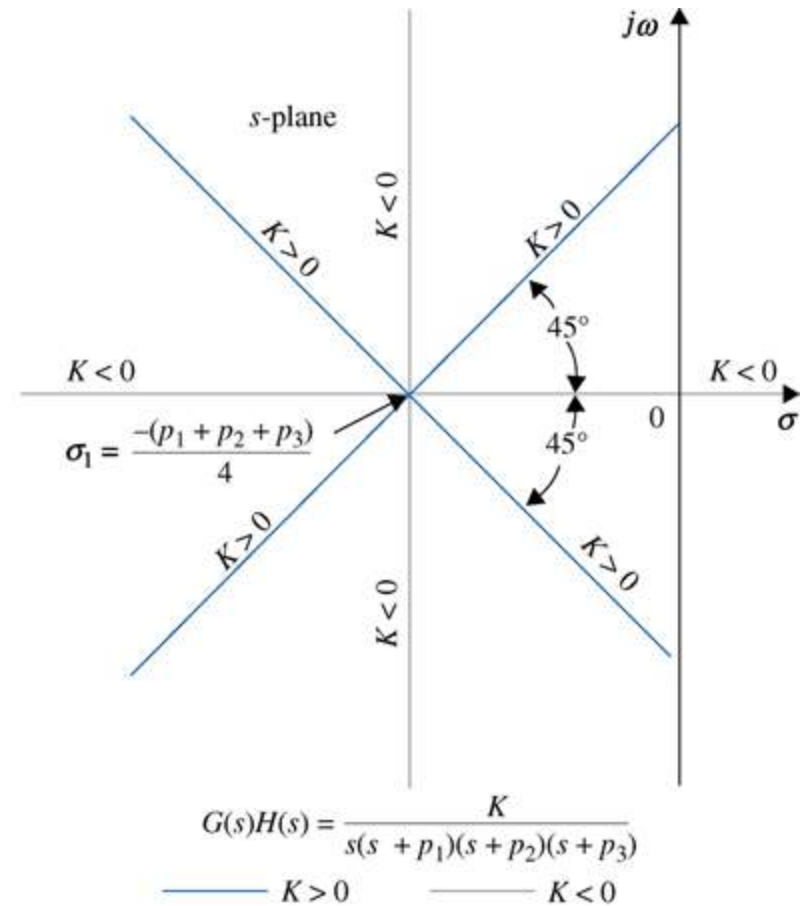
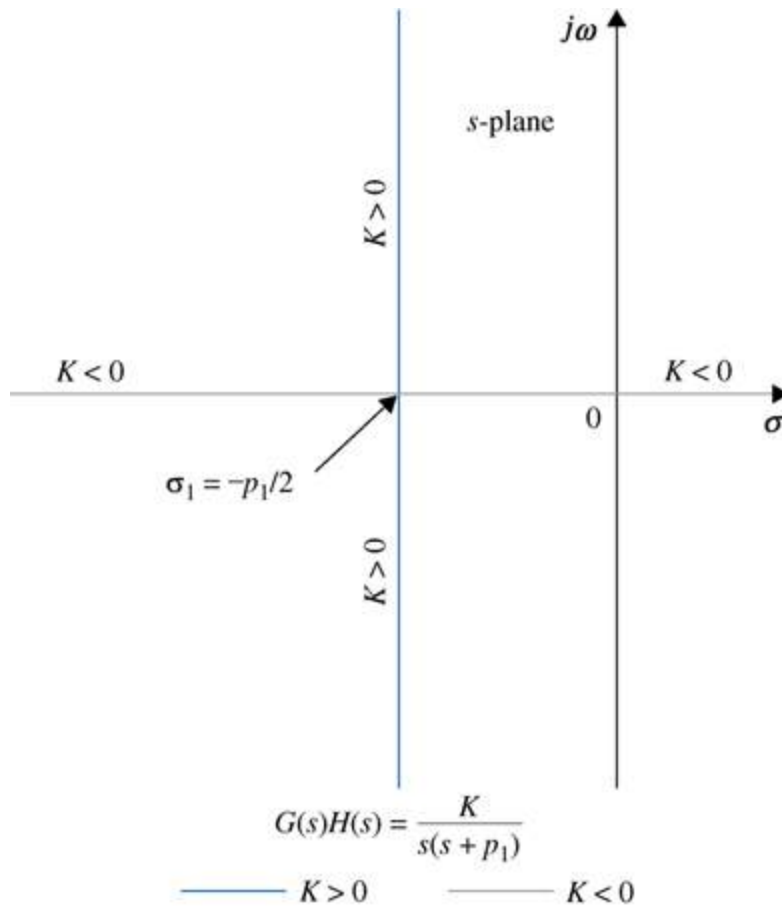


Figure E-5 Examples of the asymptotes of the root loci.

근궤적의 성질

- 여러 방정식의 근궤적의 점근선

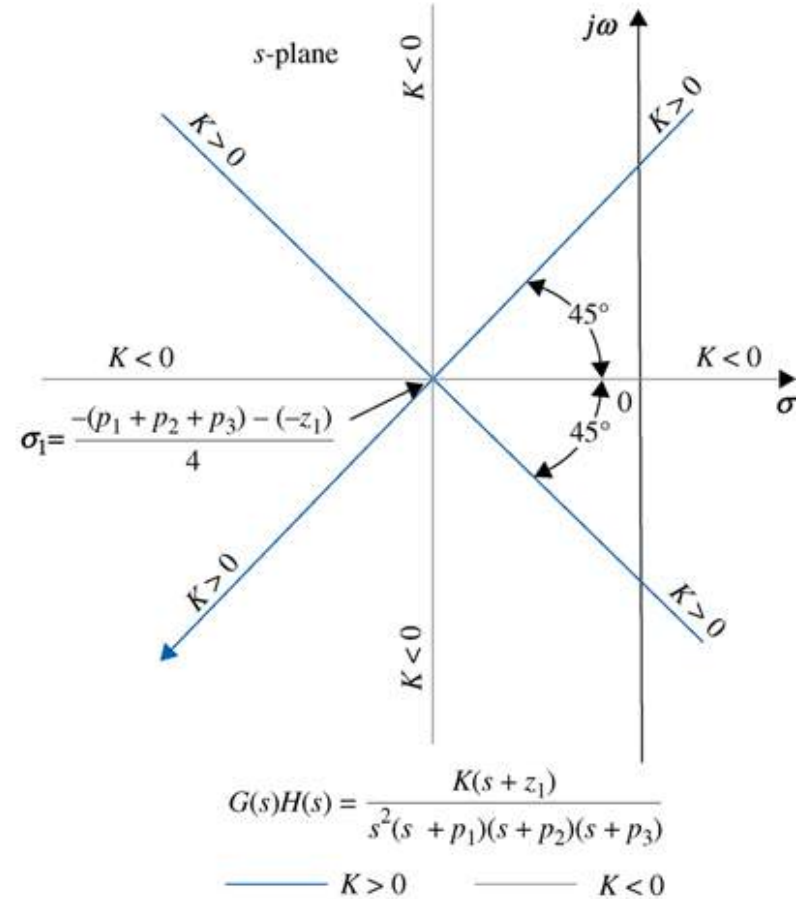
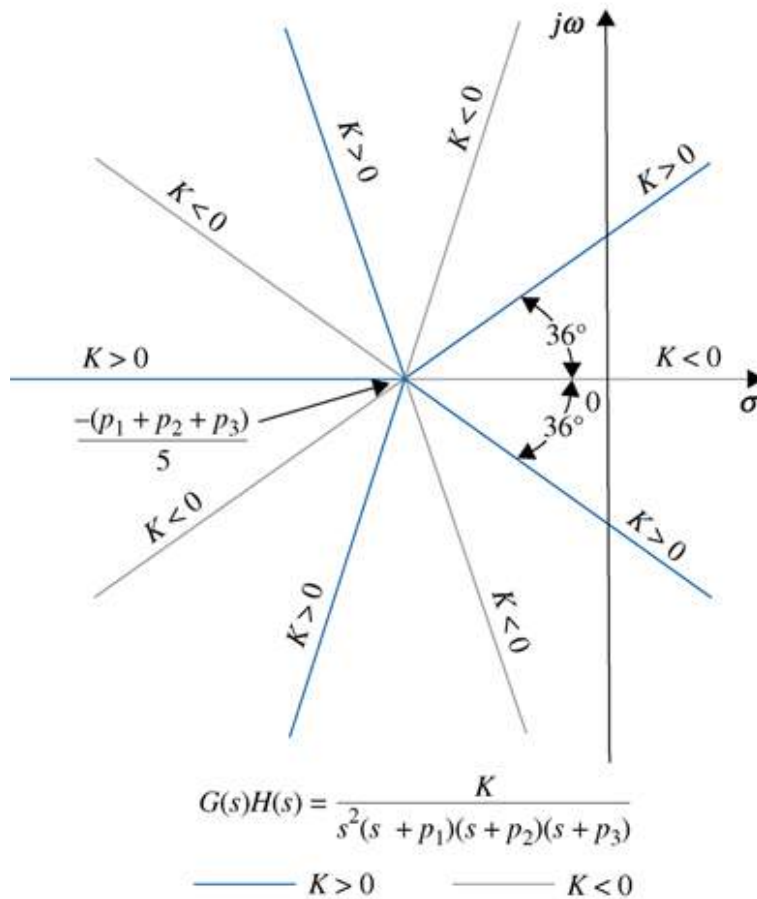


Figure E-5 Examples of the asymptotes of the root loci.

근궤적의 성질

- 실수축 상의 근궤적
 - s 평면의 전체 실수축은 K 의 모든 값의 근궤적으로 점유
 - $K \geq 0$ 의 근궤적
 - 실수축 상의 특정한 부분에 대해서 이 부분의 오른쪽에 위치한 $G(s)H(s)$ 의 극과 영점의 개수의 합이 기수일 경우에만 이 부분이 근궤적이 됨
 - $K \leq 0$ 의 근궤적
 - 실수축 상의 나머지 부분
 - $G(s)H(s)$ 의 공액복소쌍의 극과 영점은 실수축 상의 근궤적의 형태에 영향을 미치지 못함

근궤적의 성질

- 실수축 상의 근궤적

- Ex.

- 두 개의 극점과 영점을 가진 $G(s)H(s)$ 의 실수축 상의 근궤적
- 전체 실수축은 K 의 모든 값의 근궤적으로 점유

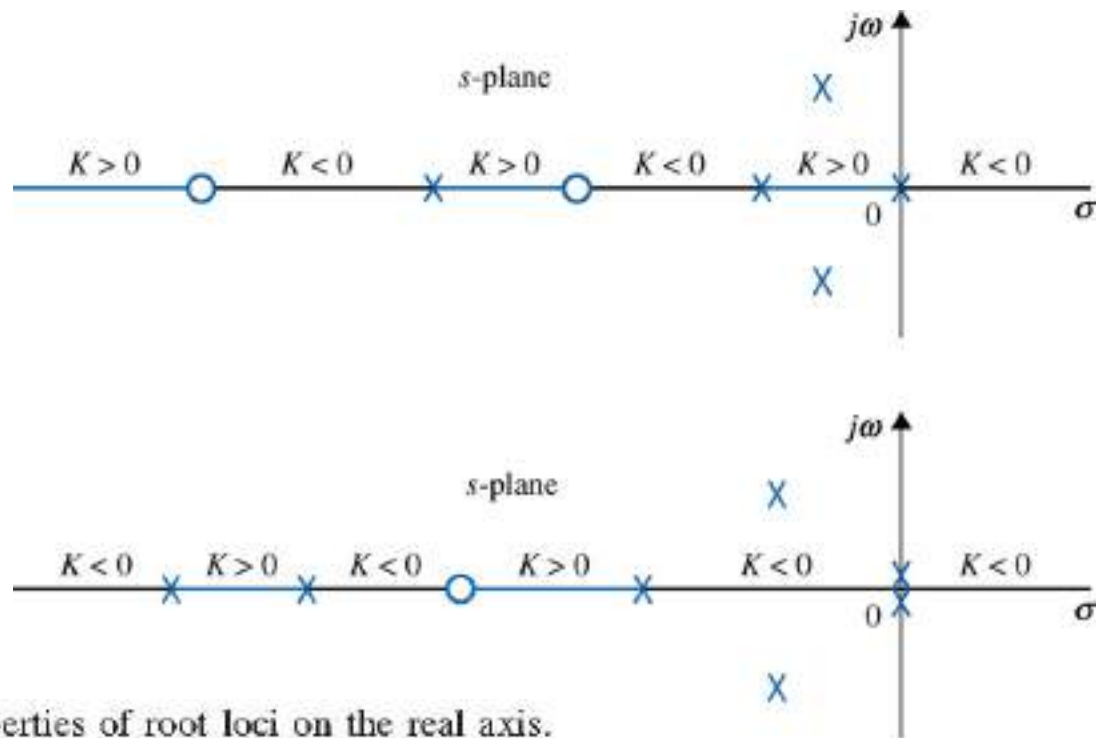


Figure E-6 Properties of root loci on the real axis.

— $K > 0$ — $K < 0$

근궤적의 성질

- 근궤적의 출발각과 도착각
 - $G(s)H(s)$ 의 극이나 영점에서 근궤적의 출발각과 도착각은 각각 그 점 부근의 궤적에서 접선각
 - 극 $s = -1 + j$ 부근의 근궤적은 극점을 떠나는 근궤적의 각도를 알면 좀더 정확히 그릴 수 있음
 - $s = -1 + j$ 에서 근궤적의 출발각도 : θ_2
 - s_1 은 $-1 + j$ 에서 극을 떠나는 근궤적상의 점
 - 극점과 매우 가까움
 - s_1 은 반드시 각도조건을 만족해야 함

$$\angle G(s_1)H(s_1) = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = (2i + 1)\pi$$

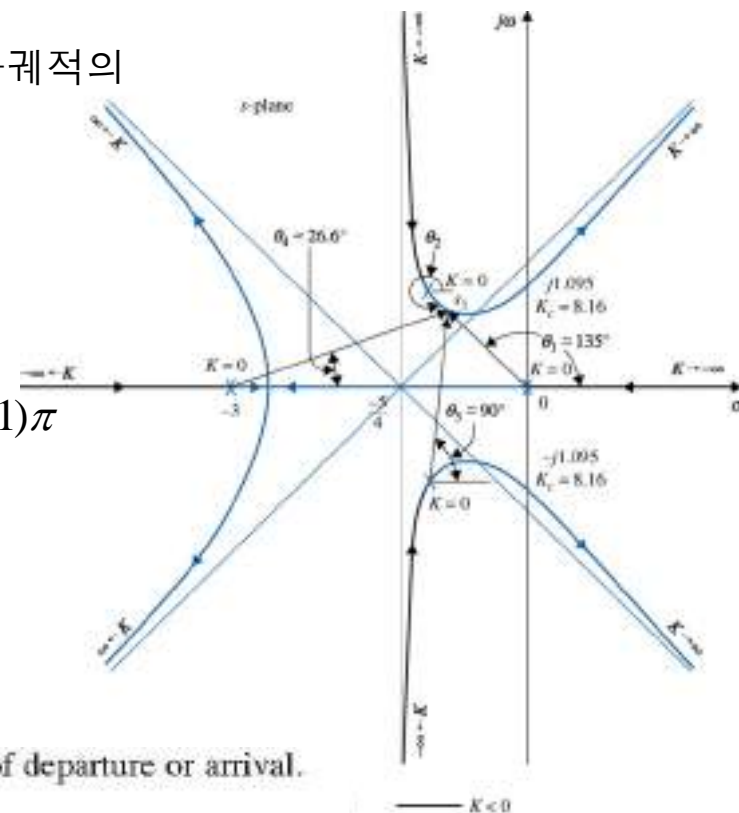


Figure E-7 Root loci of $s(s+3)(s^2+2s+2)+K=0$ to illustrate the angles of departure or arrival.

근궤적의 성질

- 근궤적의 출발각과 도착각
 - $G(s)H(s)$ 의 극이나 영점에서 근궤적의 출발각과 도착각은 각각 그 점 부근의 궤적에서 접선각
 - 극 $s = -1 + j$ 부근의 근궤적은 극점을 떠나는 근궤적의 각도를 알면 좀더 정확히 그릴 수 있음
 - $s = -1 + j$ 에서 근궤적의 출발각도 : θ_2
 - s_1 은 $-1 + j$ 에서 극을 떠나는 근궤적상의 점
 - 극점과 매우 가까움
 - s_1 은 반드시 각도조건을 만족해야 함

$$\begin{aligned}\angle G(s_1)H(s_1) &= -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = (2i + 1)\pi \\ &= -(135^\circ + \theta_2 + 90^\circ + 26.6^\circ) = (2i + 1)\pi\end{aligned}$$

- i 를 -1로 두면, $\theta_2 = -71.6^\circ$

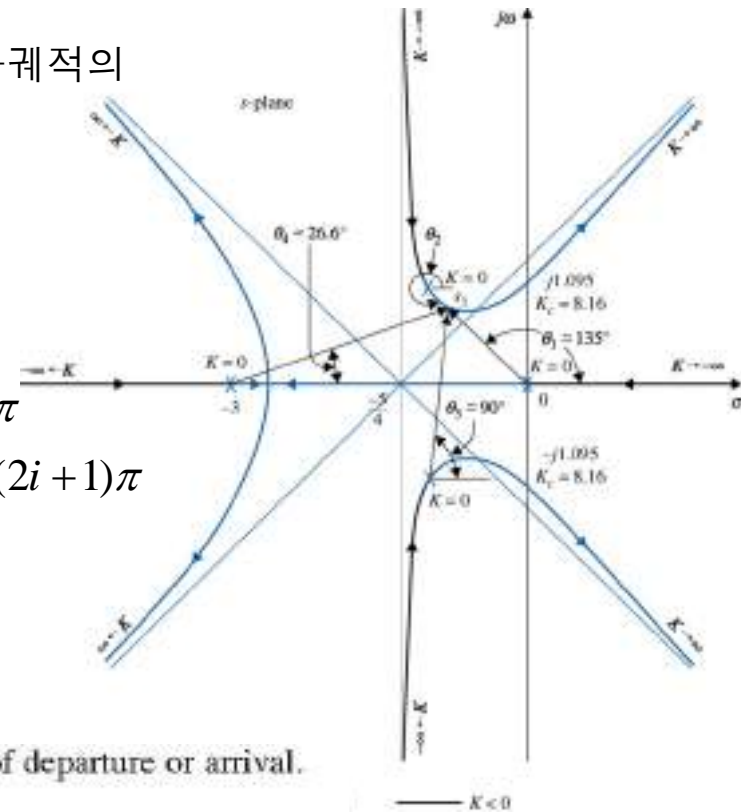


Figure E-7 Root loci of $s(s+3)(s^2+2s+2)+K=0$ to illustrate the angles of departure or arrival.

근궤적의 성질

- 근궤적의 출발각과 도착각
 - 단순극, 단순영점에서 $K \geq 0$ 에 대한 근궤적의 출발각, 도착각이 정해지면, $K \leq 0$ 에 대한 근궤적의 출발각, 도착각은 같은 점에서 180° 만큼 다르다.
 - $-1 + j$ 에서 $K \leq 0$ 에 대한 근궤적의 출발각
 - $180 - 71.6 = 108.4^\circ$

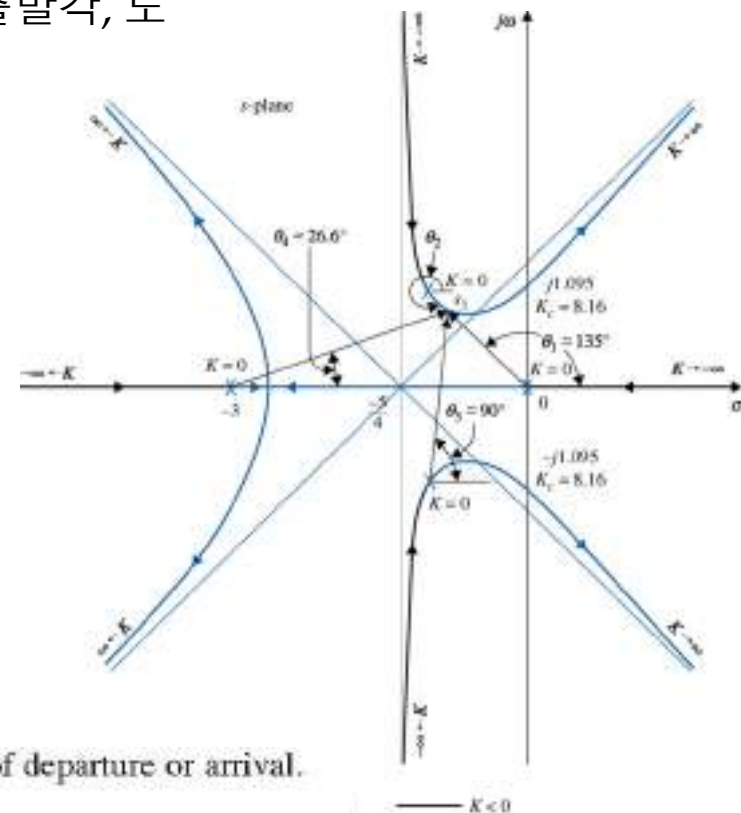


Figure E-7 Root loci of $s(s+3)(s^2+2s+2)+K=0$ to illustrate the angles of departure or arrival.

근궤적의 성질

- 근궤적과 허수축과의 교차
 - 근궤적이 s 평면 허수축과 교차하는 점이 있다면, 이에 대응되는 K 의 값은 Routh-Hurwitz 판별법으로 결정
 - 다중교차하는 경우 교차점과 K 의 임계값은 컴퓨터 프로그램을 이용

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad s(s+3)(s^2+2s+2)+K=0 \quad \Rightarrow s^4+5s^3+8s^2+6s+K=0 \quad \therefore K \leq 8.16
 \end{aligned}$$

s^4	1	8	K	
s^3	5	6	0	
s^2	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{5}$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & K \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{5}$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{5}$	
	$= 6.8$	$= K$	$= 0$	
s^1	$-\frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6.8 & K \end{vmatrix}}{6.8}$	$-\frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6.8 & 0 \end{vmatrix}}{6.8}$		0
	$= \frac{-(5K-40.8)}{6.8}$	$= 0$		
s^0	K	0	0	

근궤적의 성질

- 근궤적 상 이탈점
 - 방정식의 근궤적 상 이탈점은 그 방정식의 다중근에 대응

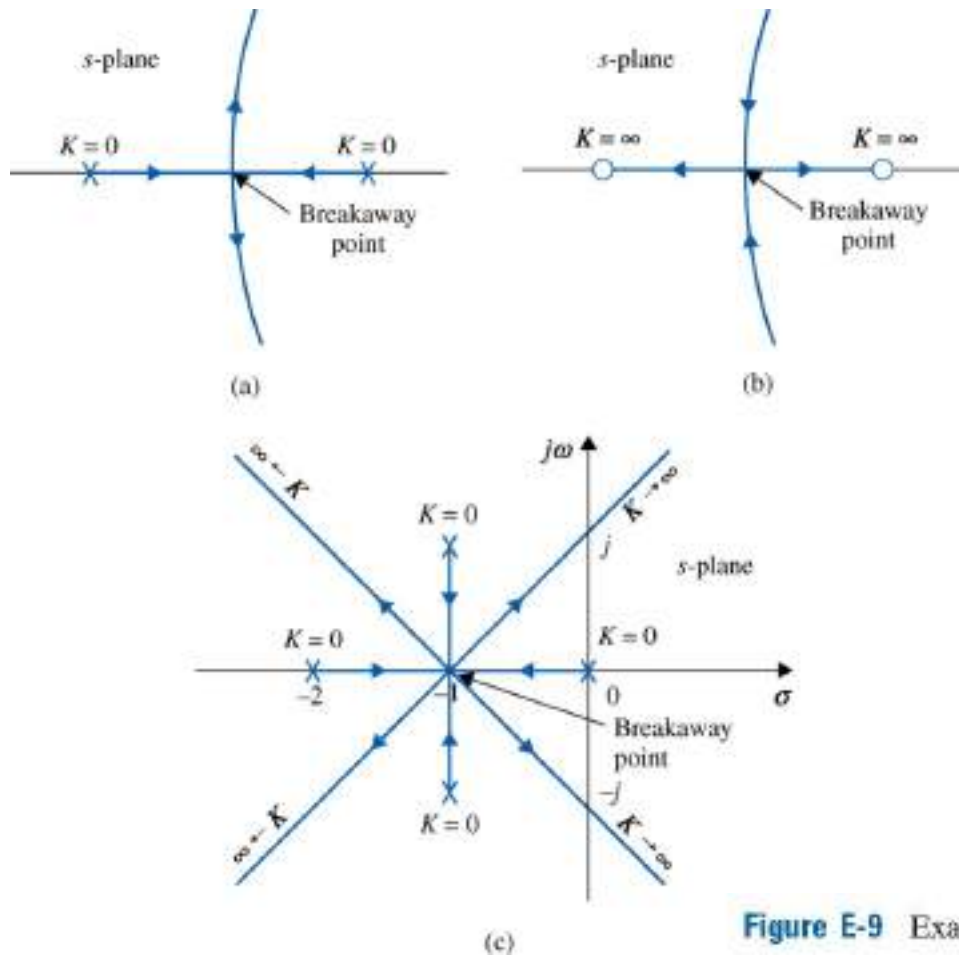


Figure E-9 Examples of breakaway points on the real axis in the s -plane.

근궤적의 성질

- 근궤적 상 이탈점
- $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$ 의 근궤적상 이탈점은 다음 식을 만족시켜야 함

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = 0 \quad (9-32)$$

- 필요조건
 1. 식(9-32)의 모든 실수해는 모든 K의 값에 대하여 근궤적 상 이탈점
 2. 식(9-32)의 모든 공액복소해는 특성방정식을 만족하거나 근궤적 상에 있는 경우에만 이탈점

근궤적의 성질

- 근궤적 상 이탈점

3. 근궤적의 조건이 아래 식과 같기 때문에 양변을 미분하면,

$$K = -\frac{1}{G_1(s)H_1(s)} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = \frac{dG_1(s)H_1(s)/ds}{[G_1(s)H_1(s)]^2}$$

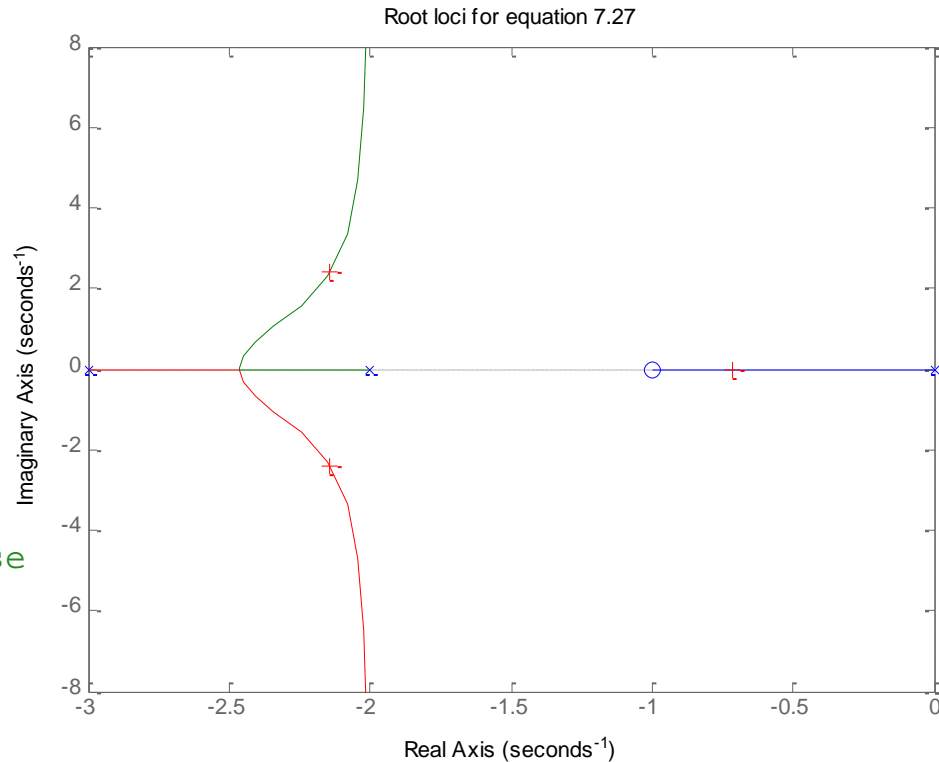
따라서, 이탈점의 조건은

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

근궤적의 성질

- Toolbox 7-3-1

```
%%Toolbox 7-3-1
%%그림 7-3 을 위한 MATLAB 명령
num = [1 1];
den = conv([1 0], [1 2]);
den = conv(den, [1 3]);
mysys = tf(num, den);
rlocus(mysys);
title('Root loci for equation 7.27');
axis([-3 0 -8 8]);
[k, poles]=rlocfind(mysys);
%rlocfind command in MATLAB can choose
%the desired poles on the locus
```



근궤적의 성질

[표 7-1] $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$ 인 근궤적의 성질

- | | |
|--|---|
| 1. $K = 0$ points | The $K = 0$ points are at the poles of $G(s)H(s)$, including those at $s = \infty$. |
| 2. $K = \pm\infty$ points | The $K = \infty$ points are at the zeros of $G(s)H(s)$, including those at $s = \infty$. |
| 3. Number of separate root loci | The total number of root loci is equal to the order of the equation $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$. |
| 4. Symmetry of root loci | The root loci are symmetrical about the axes of symmetry the of pole-zero configuration of $G(s)H(s)$. |
| 5. Asymptotes of root loci as $s \rightarrow \infty$ | For large values of s , the RL ($K > 0$) are asymptotic to asymptotes with angles given by |

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m|} \times 180^\circ$$

For $K < 0$, the RL are asymptotic to

$$\theta_i = \frac{2i}{|n-m|} \times 180^\circ$$

where $i = 0, 1, 2, \dots, |n-m| - 1$,

n = number of finite poles of $G(s)H(s)$, and

m = number of finite zeros of $G(s)H(s)$.

근궤적의 성질

[표 7-1] $1 + KG_1(s)H_1 = 0$ 인 근궤적의 성질

6. Intersection of the asymptotes

(a) The intersection of the asymptotes lies only on the real axis in the s -plane.

(b) The point of intersection of the asymptotes is given by

$$\sigma_1 = \frac{\sum \text{real parts of poles of } G(s)H(s) - \sum \text{real parts of zeros of } G(s)H(s)}{n-m}$$

7. Root loci on the real axis.

RL for $K \geq 0$ are found in a section of the real axis only if the total number of real poles and zeros of $G(s)H(s)$ to the **right** of the section is **odd**. If the total number of real poles and zeros to the right of a given section is **even**, RL for $K \leq 0$ are found.

근궤적의 성질

[표 7-1] $1 + KG_1(s)H_1 = 0$ 인 근궤적의 성질

8. Angles of departure

The angle of departure or arrival of the RL from a pole or a zero of $G(s)H(s)$ can be determined by assuming a point s_1 that is very close to the pole, or zero, and applying the equation

$$\begin{aligned}\angle G(s_1)H(s_1) &= \sum_{k=1}^m \angle(s_1 - z_k) - \sum_{j=1}^m \angle(s_1 - p_j) \\ &= 2(i+1)180^\circ \quad K \geq 0 \\ &= 2i \times 180^\circ \quad K \leq 0\end{aligned}$$

where $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

9. Intersection of the root loci with the imaginary axis

The crossing points of the root loci on the imaginary axis and the corresponding values of K may be found by use of the Routh-Hurwitz criterion.

10. Breakaway points

The breakaway points on the root loci are determined by finding the roots of $dK/ds = 0$, or $dG(s)H(s)/ds = 0$. These are necessary conditions only.

11. Calculation of the values of K

The absolute value of K at any point s_1 on the root loci is on the root loci determined from the equation

$$|K| = \frac{1}{|G_1(s_1)H_1(s_1)|}$$

근궤적의 성질

- 근의 민감도
 - K 가 변할 때 특성방정식 근의 민감도

$$S_K = \frac{ds/s}{dK/K} = \frac{K}{s} \frac{ds}{dK} \quad (7-35)$$

- 이탈점에서 근의 민감도는 무한대
- 특성방정식의 다중근에 대응하는 이탈점에서 동작하는 K 의 값은 피해야 함
- 시스템이 파라미터 변화에 민감하지 않아야 하는 것이 중요
- 강인시스템(robust system)
 - 파라미터 변화에 민감하지 않은 시스템

근궤적의 성질

예제 7-3-2

그림 7-4는 다음 식의 근궤적을 나타낸 것이다.

$$s(s+1) + K = 0 \quad (7-36)$$

여기서는 K 가 -20 에서 20 까지 100 개의 균일한 값으로 증분하면서 변할 때의 근궤적선도를 설명한다. 이 근궤적은 프로그램에 계산되고 이산적으로 작성된 것이다. 근궤적 상 모든 점은 K 의 주어진 값에 대한 한 근을 나타낸다. 그러므로 K 의 크기가 크면 근의 민감도는 낮아짐을 알 수 있다. K 의 크기가 감소하면 똑같은 K 의 변화에 대하여 근의 이동이 커진다. $s = -0.5$ 인 이탈점에서 근의 민감도는 무한대가 된다.

그림 7-5는 다음 방정식의 K 가 -40 에서 50 까지 200 개의 균일한 값으로 증분할 때의 근궤적선도이다.

$$s^2(s+1)^2 + K(s+2) = 0 \quad (7-37)$$

또 다시 이 궤적도 근들이 $s = 0, -0.543, -1.0$ 과 -2.457 인 이탈점에 접근할수록 근의 민감도가 증가함을 보여주고 있다. 근의 민감도에 대해 더 구체적인 것은 식 (7-34)의 표현을 이용하여 조사할 수 있다. 식 (7-36)의 2차 방정식에 대하여

$$\frac{dK}{ds} = -2s - 1 \quad (7-38)$$

근궤적의 성질

Toolbox 7-3-2

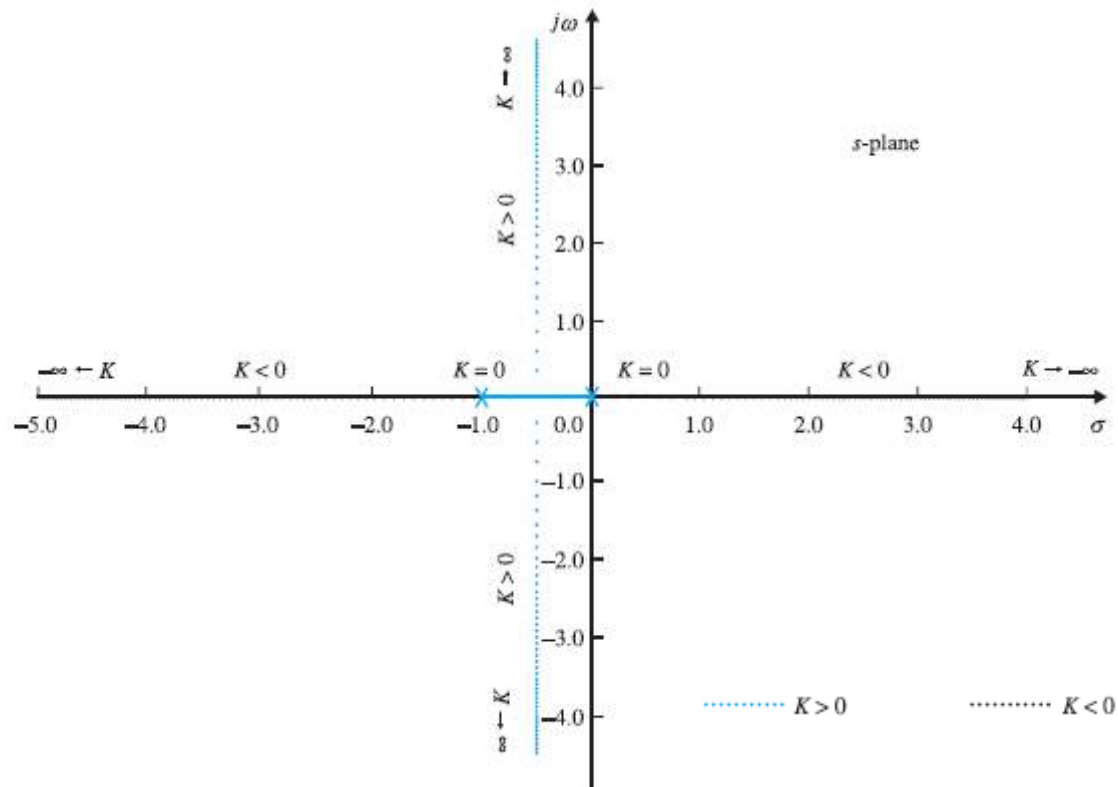
식 7-36과 식 7-37에 대한 *MATLAB* 명령

```
num1=[1];  
den1=conv([1 0],[1 1]);  
mysys1=tf(num1,den1);  
subplot(2,1,1);  
rlocus(mysys1);  
title('Root loci for equation 7.36');  
[k,poles] = rlocfind(mysys1) %rlocfind command in MATLAB can choose the  
desired poles on the locus.
```

```
num2=[1 2];  
den2=conv([1 0 0],[1 1]);  
den2=conv(den2,[1 1]);  
subplot(2,1,2);  
mysys2=tf(num2,den2);  
rlocus(mysys2);  
title('Root loci for equation 7-37');  
axis([-3 0 -8 8])  
[k,poles] = rlocfind(mysys2)
```

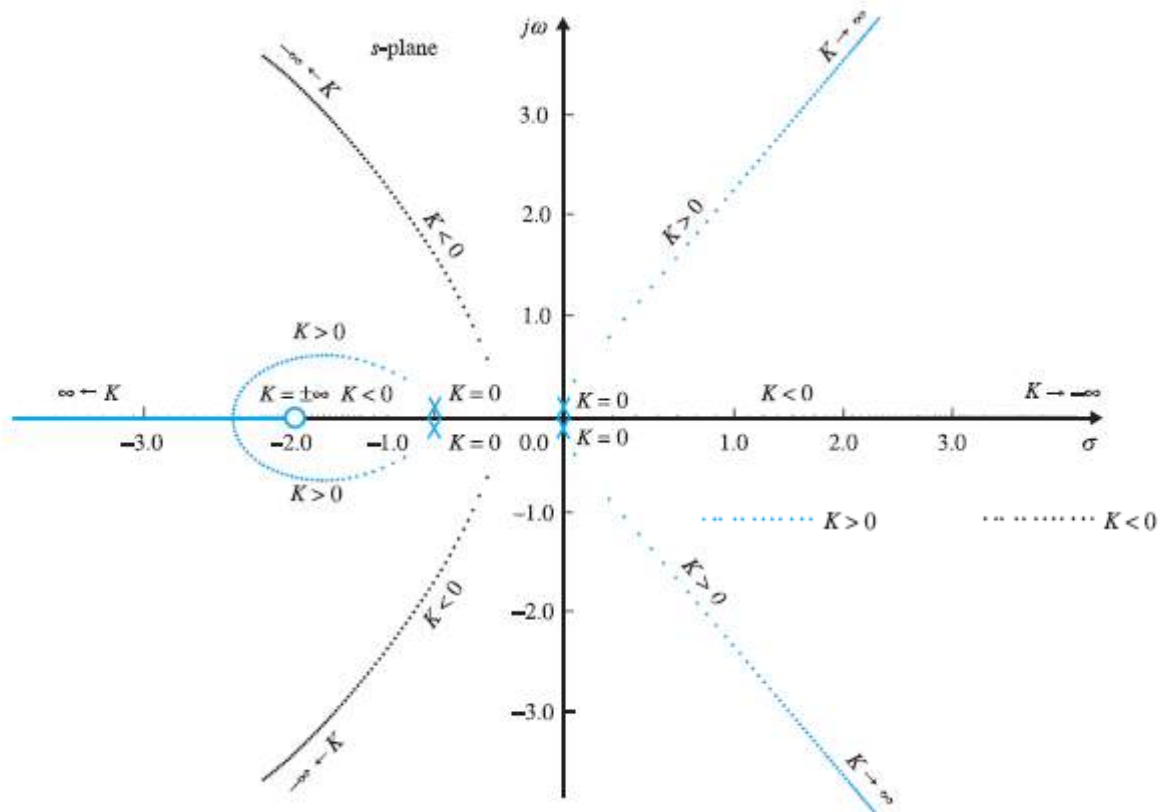


근궤적의 성질



[그림 7-4] K 에 대한 근의 민감도를 보여주는 $s(s+1) + K = 0$ 의 근궤적.

근궤적의 성질



[그림 7-5] K 에 대한 근의 민감도를 보여주는 $s^2(s+1)^2 + K(s+2) = 0$ 의 근궤적.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향
- $G(s)H(s)$ 에 극 추가
 - 근궤적을 우반면 쪽으로 이동시키는 효과

예제 7-4-1

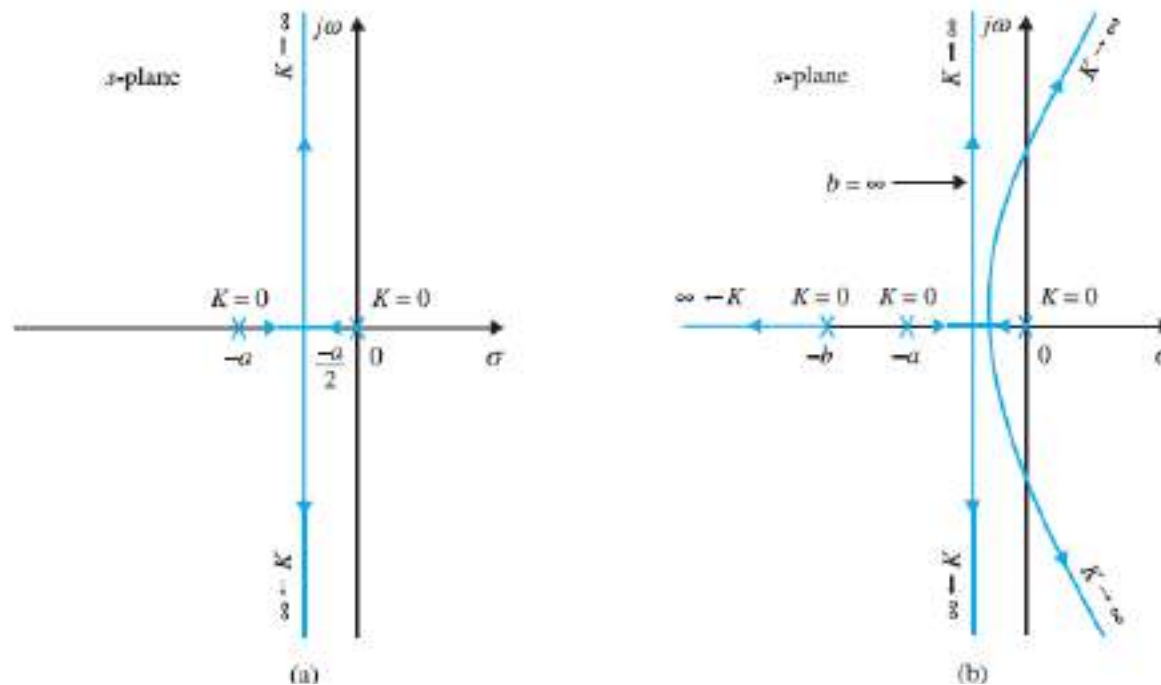
다음의 함수를 생각하자.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad a > 0 \quad (7-42)$$

$1 + G(s)H(s) = 0$ 의 RL은 그림 7-6(a)에 나타내었다. 이들 궤적은 $s = 0$ 과 $s = -a$ 에 있는 $G(s)H(s)$ 의 극에 근거하여 그려진다. 이제 $b > a$ 인 $s = -b$ 에 한 개의 극을 도입하자. 함수 $G(s)H(s)$ 는 다음과 같이 된다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

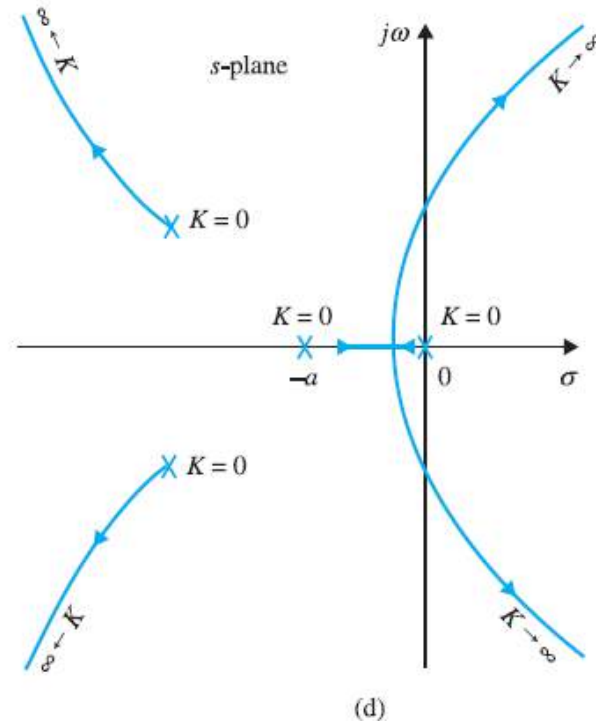
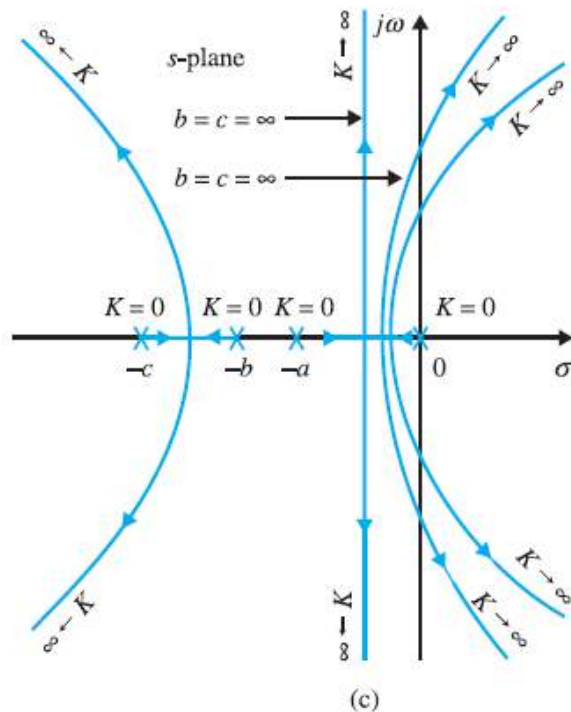
- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



[그림 7-6] $G(s)H(s)$ 에 극을 추가함으로써 생기는 효과를 보여주는 근궤적선도.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



[그림 7-6] $G(s)H(s)$ 에 극을 추가함으로써 생기는 효과를 보여주는 근궤적선도.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)} \quad (7-43)$$

그림 7-6(b)는 $s = -b$ 에 있는 극이 근궤적의 복소 부분을 s 평면 우반면 쪽으로 구부러지게 하는 것을 보여 준다. 복소근에 대한 점근선 각도는 $\pm 90^\circ$ 에서 $\pm 60^\circ$ 로 변한다. 점근선 교차점도 실수축 상 $-a/2$ 에서 $-(a+b)/2$ 로 옮겨진다.

만일 $G(s)H(s)$ 가 피드백 제어시스템의 루프 전달함수라면 그림 7-6(b)의 근궤적을 가지는 시스템은 K 의 값이 안정임계값보다 크면 불안정해진다. 반면에 그림 7-6(a)의 근궤적을 가지는 시스템은 $K > 0$ 에서 항상 안정이다. 그림 7-6(c)는 $s = -c$ 이고 $c > b$ 인 다른 극을 $G(s)H(s)$ 에 가했을 때 근궤적을 나타낸 것이다. 이 시스템은 이제 4차이고 두 개의 복소근궤적은 우측으로 더욱 구부러진다. 이들 두 복소근궤적의 점근선 각도는 이제 $\pm 45^\circ$ 이다. 4차 시스템에서 시스템의 안정도 조건은 3차 시스템의 안정도 조건보다 더욱 심각해진다. 그림 7-6(d)는 식 (7-42) 전달 함수에 복소공역쌍의 극을 추가시켜도 같은 효과를 초래함을 설명하고 있다. 그러므로 함수 $G(s)H(s)$ 에 극을 추가하면 s 평면 우반면 쪽으로 근궤적을 이동시키는 효과가 나타난다는 일반적인 결론을 내릴 수 있다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

%%Toolbox 7-4-1

%%식 7-6을 위한 MATLAB 명령

a = 2; b = 3; c = 5;

num4 = [1];

den4 = conv([1 0], [1 a]);

subplot(221);

mysys4 = tf(num4, den4);

rlocus(mysys4);

axis([-3 0 -8 8]);

num3 = [1];

den3 = conv([1 0], conv([1 a], [1 a/2]));

subplot(222);

mysys3 = tf(num3, den3);

rlocus(mysys3);

axis([-3 0 -8 8]);

num2 = [1];

den2 = conv([1 0], conv([1 a], [1 b]));

subplot(223);

mysys2 = tf(num2, den2);

rlocus(mysys2);

axis([-3 0 -8 8]);

num1 = [1];

den1 = conv([1 0], conv([1 a], [1 b]));

den1 = conv(den1, [1 c]);

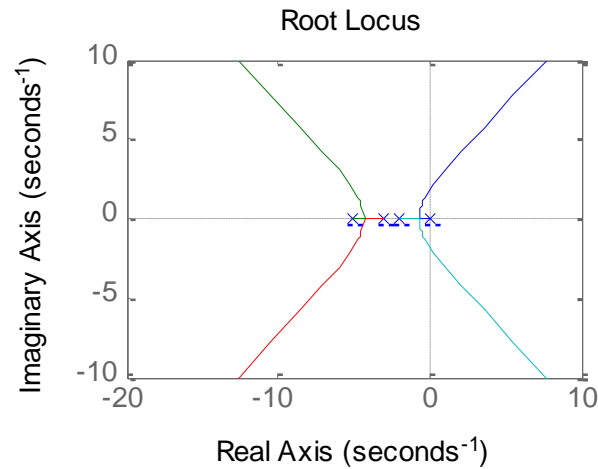
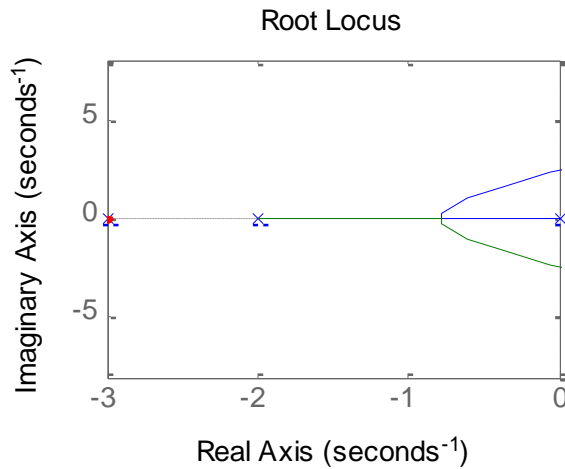
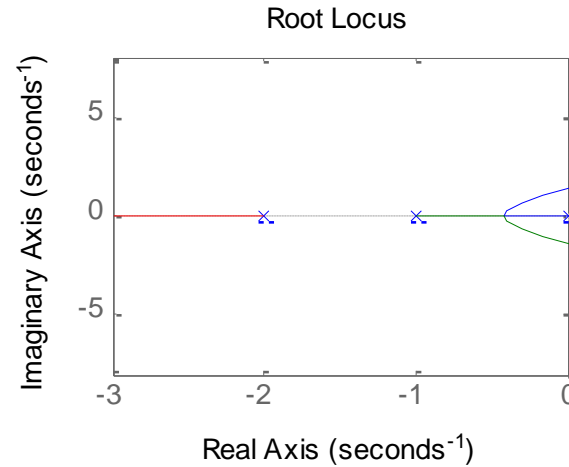
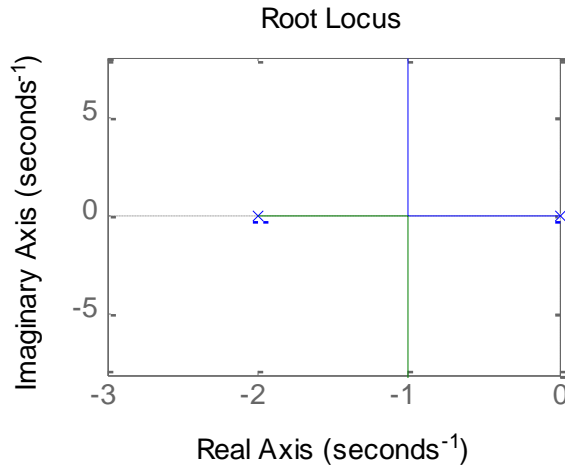
subplot(224);

mysys1 = tf(num1, den1);

rlocus(mysys1);

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



근궤적 작도에 있어서 중요한 점

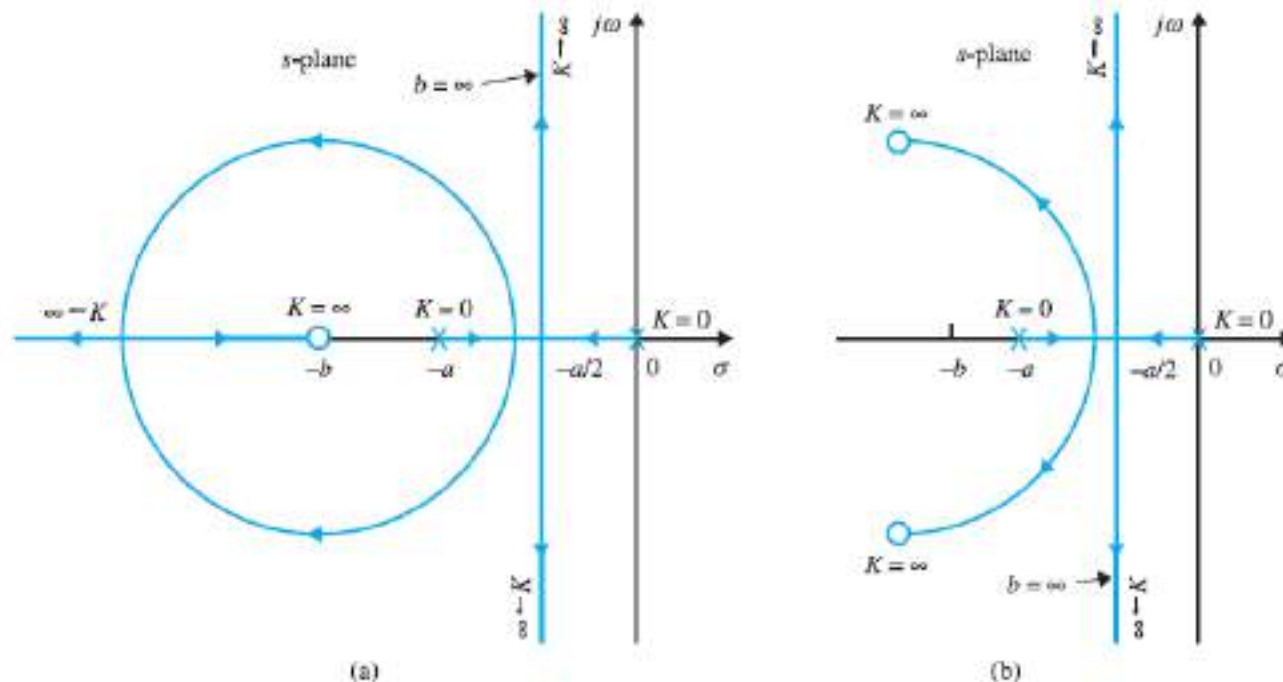
- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향
- $G(s)H(s)$ 에 영점 추가
 - 근궤적을 좌반면 쪽으로 구부리고 이동

예제 7-4-2

그림 7-7(a)는 식 (7-42)의 $G(s)H(s)$ 의 $s = -b(b > a)$ 에 영점을 추가한 경우의 RL이다. 원래 시스템의 RL의 복소공액 부분이 왼쪽으로 구부러져서 원을 형성한다. 그러므로 $G(s)H(s)$ 가 제어시스템의 루프 전달함수라면 이 시스템의 상대안정도는 영점의 추가로 향상된다. 그림 7-7(b)는 복소공액쌍의 영점을 식 (7-42)의 함수에 추가한다면 유사한 효과가 생기는 것을 보인 것이다. 그림 7-7(c)는 $s = -c$ 에 있는 영점을 식 (7-43)의 전달함수에 추가했을 때의 RL을 나타낸다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

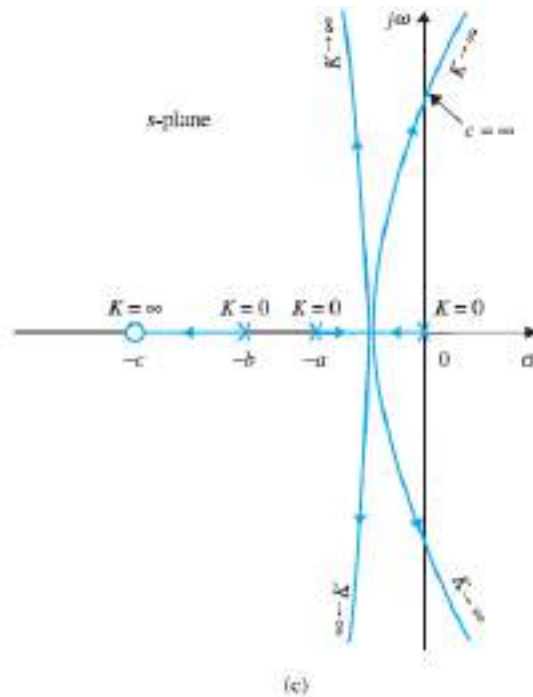
- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



[그림 7-7] $G(s)H(s)$ 에 영점 추가로 생기는 효과를 보여주는 근궤적선도.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



[그림 7-7] $G(s)H(s)$ 에 영점 추가로 생기는 효과를 보여주는 근궤적선도.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화
 - 한 개 이상의 파라미터가 $-\infty$ 에서 ∞ 까지 연속적으로 변화
 - 그 근궤적을 근콘투어(RC : root contours)
 - 방정식

$$P(s) + K_1 Q_1(s) + K_2 Q_2(s) = 0 \quad (7-50)$$

$K_2 = 0$

- K_1, K_2 : 가변파라미터
- $P(s), Q_1(s), Q_2(s)$: s 의 다항식

$$P(s) + K_1 Q_1(s) = 0 \quad (7-51)$$

- 근궤적

$$1 + \frac{K_1 Q_1(s)}{P(s)} = 0 \quad (7-52)$$

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화
 - 한 개 이상의 파라미터가 $-\infty$ 에서 ∞ 까지 연속적으로 변화
 - 그 근궤적을 근콘투어(RC : root contours)
 - 방정식

$$P(s) + K_1 Q_1(s) + K_2 Q_2(s) = 0 \quad (7-50)$$

K_1 : 일정

- K_1, K_2 : 가변파라미터
- $P(s), Q_1(s), Q_2(s)$: s 의 다항식

$$1 + \frac{K_2 Q_2(s)}{P(s) + K_1 Q_1(s)} = 0 \quad (7-53)$$

- 근콘투어(K_2 가 변할 때 K_1 은 고정)

$$G_2(s)H_2(s) = \frac{Q_2(s)}{P(s) + K_1 Q_1(s)} \quad (7-54)$$

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화

예제 7-5-1

다음 방정식을 생각하자.

$$s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_1 = 0 \quad (7-55)$$

여기서 K_1 과 K_2 는 0에서 ∞ 까지 변할 수 있는 가변 파라미터이다. 첫 번째 단계로 $K_2 = 0$ 으로 놓으면 식 (7-55)는

$$s^3 + K_1 s + K_1 = 0 \quad (7-56)$$

이 식의 양변을 K_1 을 포함하지 않은 s^3 으로 나누어 주면

$$1 + \frac{K_1(s+1)}{s^3} = 0 \quad (7-57)$$

식 (7-56)의 근콘투어는

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{s+1}{s^3} \quad (7-58)$$

의 극-영점 배치에 근거하여 그림 7-10(a)와 같이 그려진다. 다음 K_1 은 영이 아닌 정수로 놓고 K_2 를 0에서 ∞ 까지 변화시키자. 식 (7-55) 양변을 K_2 를 포함하지 않은 항으로 나누어 주면 다음 식을 얻는다.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화

$$1 + \frac{K_2 s^2}{s^3 + K_1 s + K_1} = 0 \quad (7-59)$$

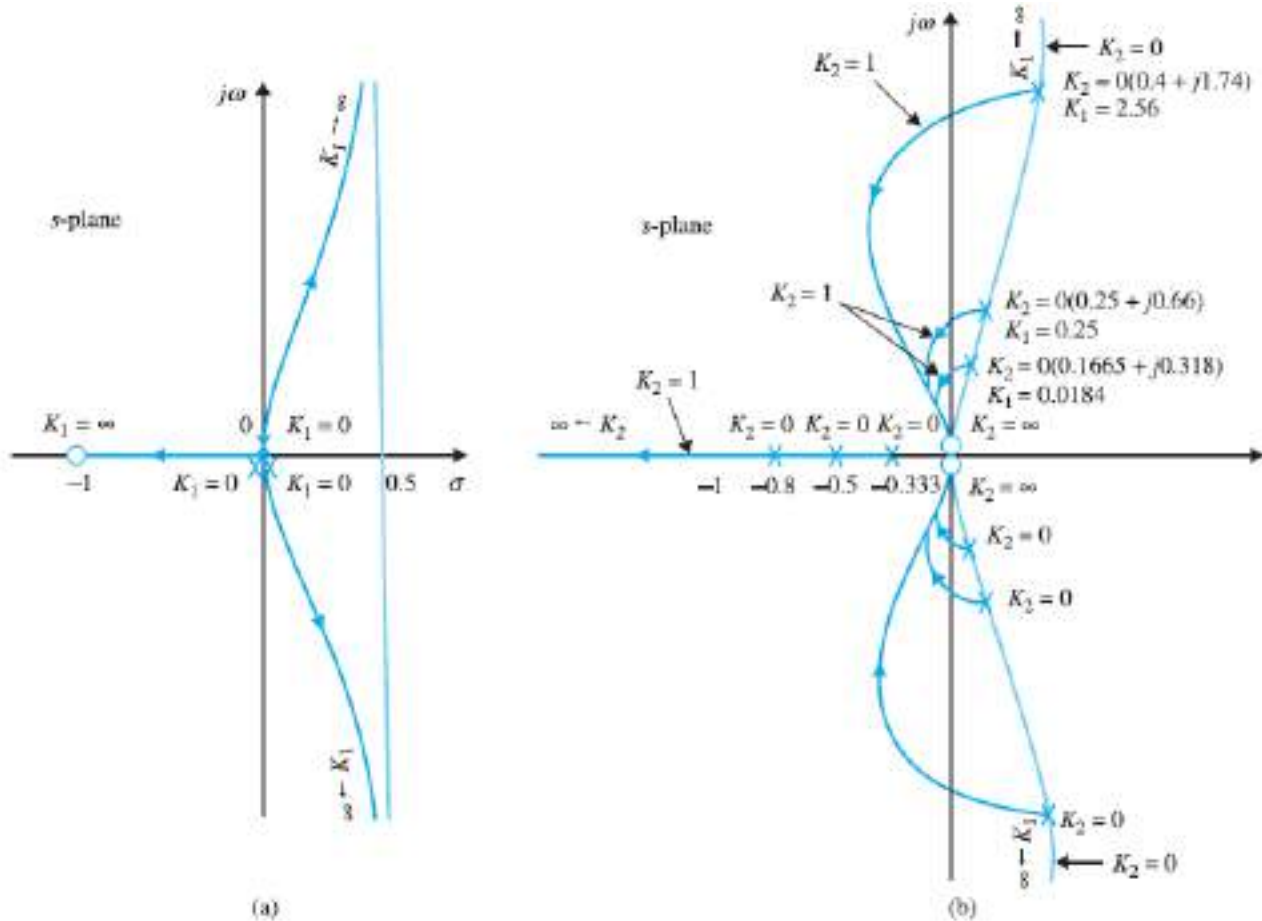
그러므로 K_2 가 변할 때 식 (7-55)의 근콘투어는

$$G_2(s)H_2(s) = \frac{s^2}{s^3 + K_1 s + K_1} \quad (7-60)$$

의 극-영점 배치로부터 그려진다. $G_2(s)H_2(s)$ 의 영점은 $s = 0, 0$ 이지만 극은 $1 + K_1 G_1(s)H_1(s)$ 의 영점에 있으므로 그림 7-10(a)의 근궤적에서 구한다. 그러므로 K_1 이 고정인 동안 K_2 가 변하는 근콘투어는 그림 7-10(a)의 근콘투어로부터 모두 시작한다. 그림 7-10(b)는 K_2 가 0에서 ∞ 까지 변하고 $K_1 = 0.0184, 0.25$ 및 2.56 일 때 식 (7-55)의 근콘투어를 그린 것이다.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



[그림 7-10] $s^2 + K_2s^2 + K_1s + K_1 = 0$ 의 근콘투어. (a) $K_2 = 0$. (b) K_1 은 일정이고 K_2 는 가변.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화

```
%Toolbox 7-5-1  
%%식 7-10을 위한 MATLAB 명령  
for k1 = [0.0184 0.25 2.56];  
    num = [1 0 0];  
    den = [1 0 k1 k1];  
    mysys = tf(num, den);  
    rlocus(mysys);  
    hold on;  
end;
```

