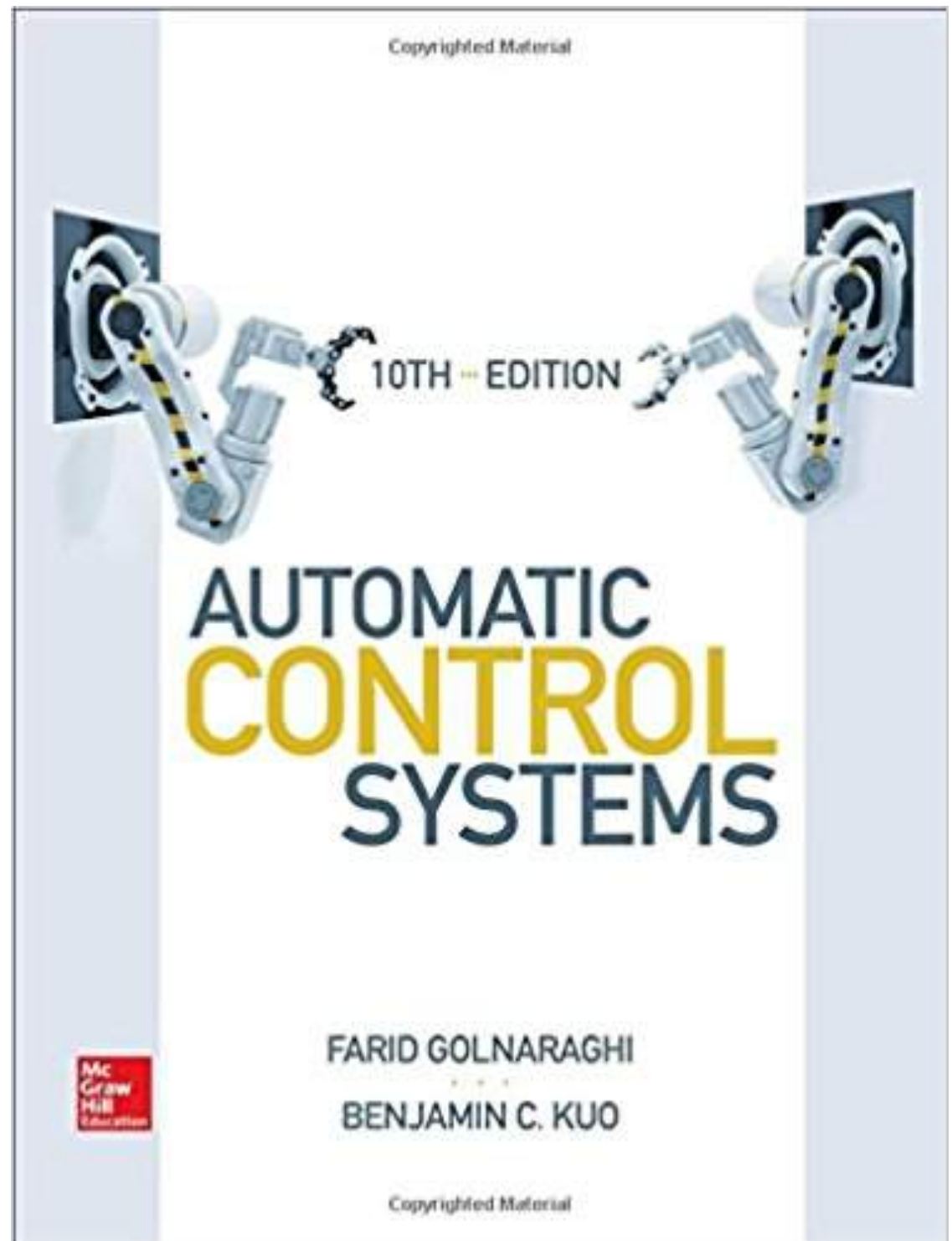


자동제어 (Automatic Control) 2장 동적시스템의 모델링

김동한



기계적 시스템 요소의 모델링

- 병진운동(Translational Motion)
 - 직선 또는 곡선을 따라 일어나는 운동
 - 가속도, 속도, 변위
 - 뉴턴의 운동법칙: 주어진 방향에서 강체에 작용하는 힘의 대수적 합은 물체의 질량과 동일 방향의 가속도의 곱과 같다.

$$\sum \text{forces} = Ma$$

- 질량, 스프링, 마찰

1. 질량. 질량은 병진운동의 운동에너지를 저장하는 요소의 성질로 생각된다. 질량은 전기회로망의 인덕턴스와 유사하다. 만일 W 가 물체의 무게를 나타내면, M 은 다음과 같이 주어진다.

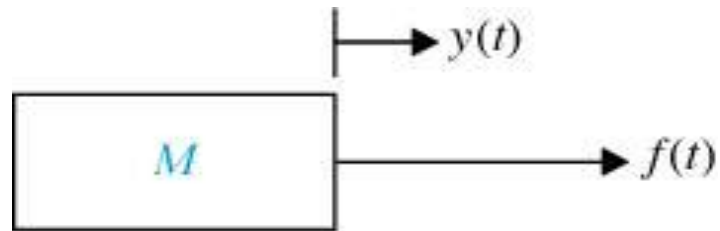
$$M = \frac{W}{g} \quad (4-15)$$

여기서 g 는 중력으로 인한 물체의 자유낙하의 가속도이다(영국단위계에서 $g=32.174 \text{ ft/sec}^2$ 이고, SI 단위계에서 $g=9.8066 \text{ m/sec}^2$ 이다).

기본 영국단위와 SI 단위계의 일치표(세트)는 다음과 같다.

Units	Mass M	Acceleration	Force
SI	kilogram (kg)	m/sec^2	Newton (N)
British	slug	ft/sec^2	pound (lb force)

질량



$$f(t) = Ma(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = M \frac{dv(t)}{dt}$$

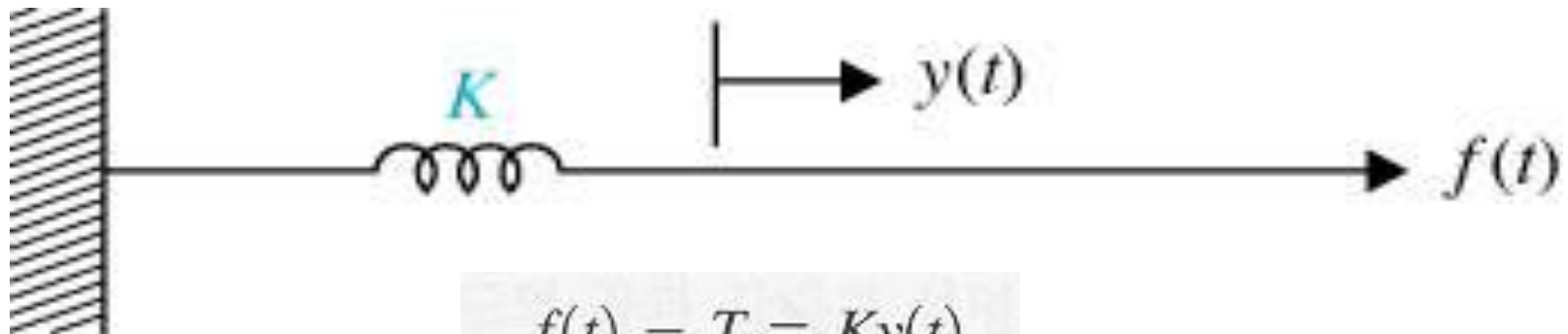
선형스프링

- 위치에 에너지를 저장하는 요소

$$f(t) = Ky(t)$$

K 는 스프링정수(spring constant) 또는 단순히 강성(stiffness)

Units	Spring Constant K
SI	N/m
British	lb/ft



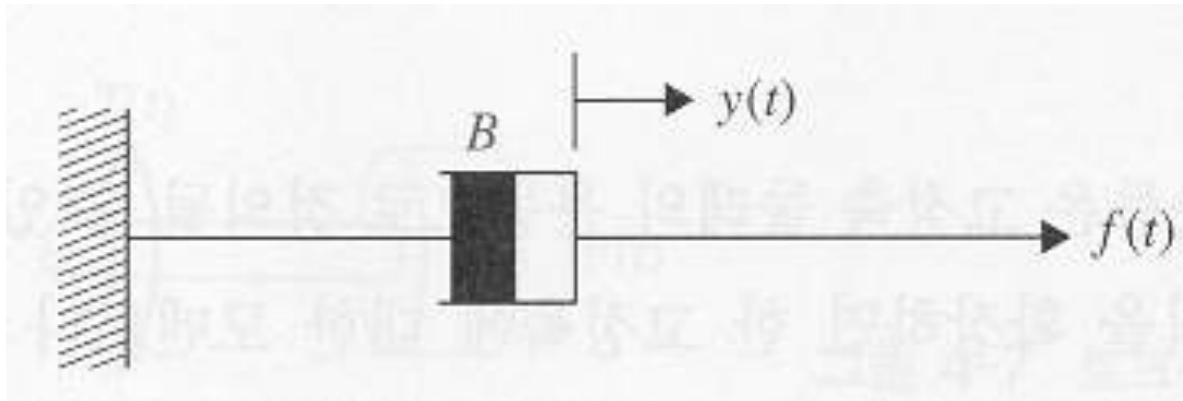
$$f(t) - T = Ky(t)$$

마찰

- 두 물리적 요소 사이에 움직임이나 움직이는 경향이 있을 때에는 언제나 존재
- 점성마찰, 정지마찰, 쿨롱마찰
 - 점성마찰: 가해진 힘과 속도 사이에 선형관계가 있는 지연력

$$f(t) = B \frac{dy(t)}{dt}$$

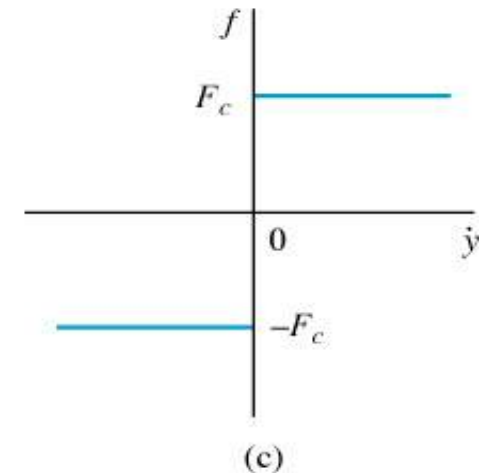
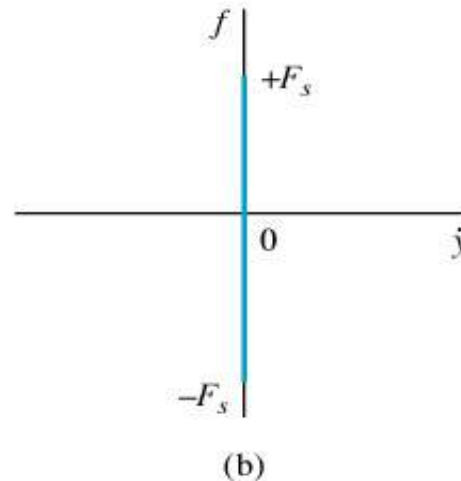
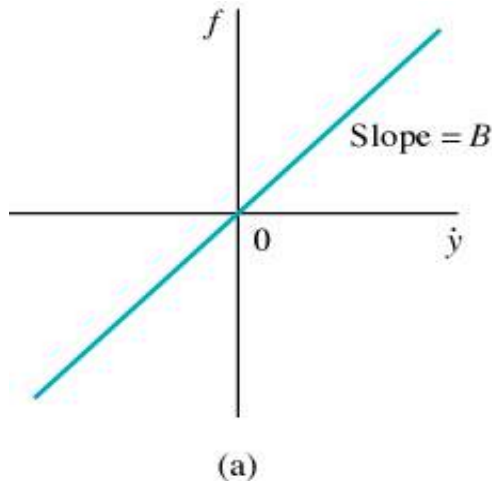
B 가 점성마찰계수(viscous frictional coefficient)



Units	Viscous Frictional Coefficient B
SI	N/m/sec
British	lb/ft/sec

- 정지마찰: 움직이기 시작할 때 막으려고 하는
지연력

$$f(t) = \pm (F_s) |_{\dot{y}=0}$$



- 쿨롱마찰: 속도의 변화에 대하여 일정진폭을
가지며 마찰력의 부호가 속도방향의 반대로
되는 지연력

$$f(t) = F_c \frac{\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)}{\left|\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\right|}$$

F_c 가 쿨롱마찰계수

병진운동 예제

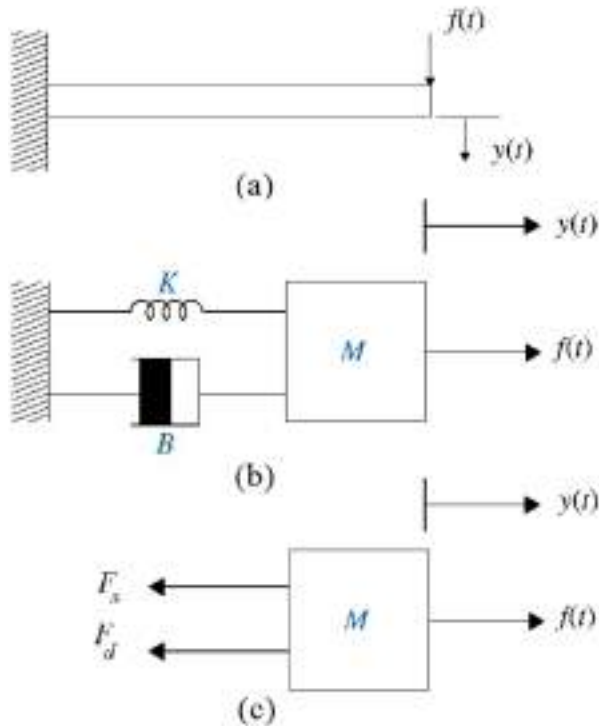


Figure 2-2 Force applied to a cantilever beam, modeled as a spring-mass-damper system.

$$f(t) - F_s - F_d = Ma(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{B}{M} \dot{y}(t) + \frac{K}{M} y(t) = \frac{K}{M} r(t)$$

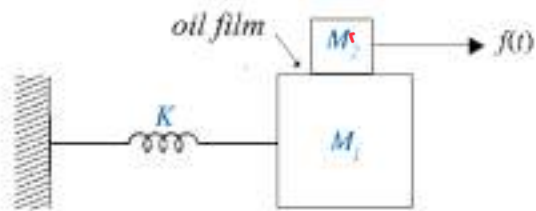
$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 r(t)$$

where ω_n and ζ are the *natural frequency*(고유주파수) and the *damping ratio*(감쇠비) of the system, respectively.

The above equation is also known as the **prototype second order system**(표준형 2차 시스템).

We define $y(t)$ as the **output** and $r(t)$ as the **input** of the system.

병진운동 예제



(a)

$$\sum_{\text{External}} \text{forces} = M_1 \ddot{y}_1(t)$$

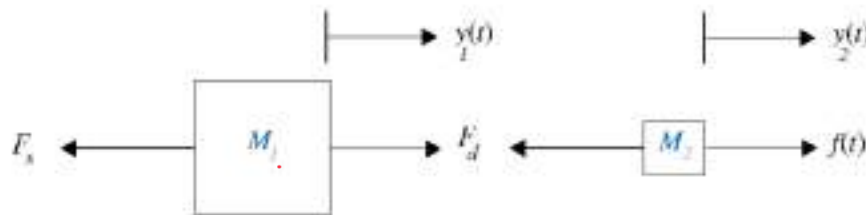
$$-Ky_1(t) + B(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) = M_1 \ddot{y}_1(t)$$



(b)

$$\sum_{\text{External}} \text{forces} = M_2 \ddot{y}_2(t)$$

$$-B(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + f(t) = M_2 \ddot{y}_2(t)$$



(c)

Figure 2-5 A two degree of freedom mechanical system with spring and damper elements.

$$M_1 \ddot{y}_1(t) + B(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + Ky_1(t) = 0$$

$$M_2 \ddot{y}_2(t) + B(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) = f(t)$$

회전운동

- 고정축에 대한 모멘트나 토크의 대수적 합이 그 축에 대한 관성과 각가속도의 곱과 같다.

$$\sum \text{torques} = J\alpha$$

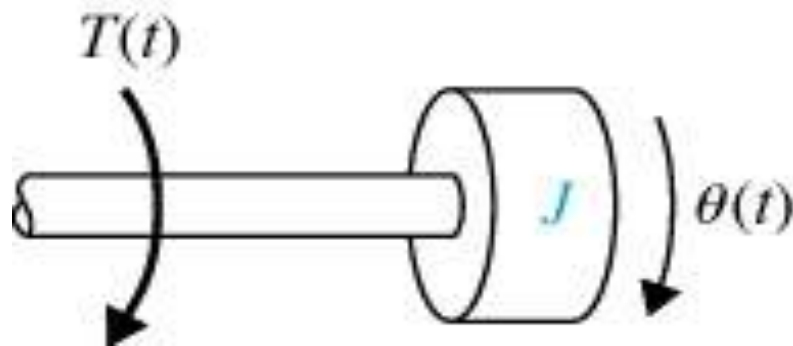
J 는 관성 이며 α 는 각가속도

토크(torque) T , 각속도(angular velocity) ω 각변위(angular displacement) θ

- 관성 (inertia), 스프링, 마찰

관성

- 질량 M 의 강체는 고정된 회전축에 관해서 관성 J 를 갖음
- J 는 회전운동의 운동에너지를 저장하는 요소의 성질
- 회전축에 대한 기하학적 구조에 따라 결정
- 예제:



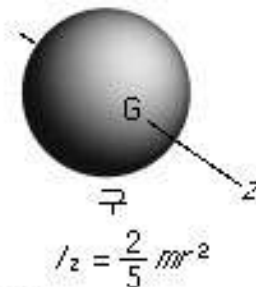
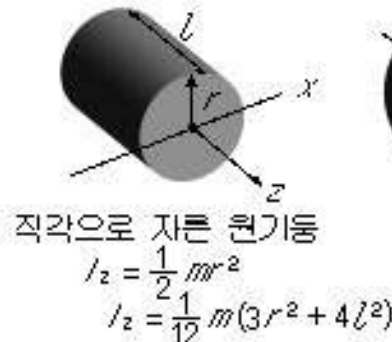
$$J = \frac{1}{2}Mr^2$$

- 관성에 대한 토크방정식

$$T(t) = J\alpha(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

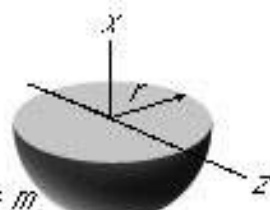
관성의 예제

m : 질량(내부가 균질인 것)
 r : 반지름
 l : 길이
 I_z : x 축 둘레의 관성 모멘트
 I_x : x 축 둘레의 관성 모멘트



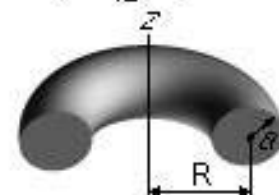
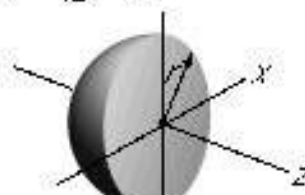
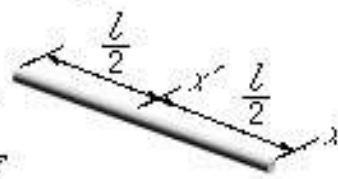
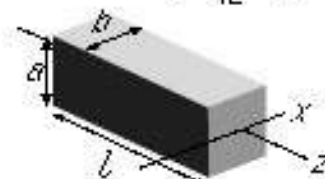
절반으로 자른 원기둥

$$I_z = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 2mr^2 \right) = \frac{1}{2} mr^2$$



반구

$$I_z = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \times 2mr^2 \right) = \frac{2}{5} mr^2$$



Units	Inertia	Torque	Angular Displacement
SI	kg-m ²	N-m	radian
		dyne-cm	radian
British	slug-ft ²	lb-ft	
	lb-ft-sec ²	oz-in.	radian
	oz-in.-sec ²		

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} = 57.3 \text{ deg}$$

각속도

$$1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} = 0.1047 \text{ rad/sec}$$

$$1 \text{ rpm} = 6 \text{ deg/sec}$$

토크

$$1 \text{ g-cm} = 0.0139 \text{ oz-in.}$$

$$1 \text{ lb-ft} = 192 \text{ oz-in.}$$

$$1 \text{ oz-in.} = 0.00521 \text{ lb-ft}$$

관성능률

$$1 \text{ g-cm} = 1.417 \times 10^{-5} \text{ oz-in.-sec}^2$$

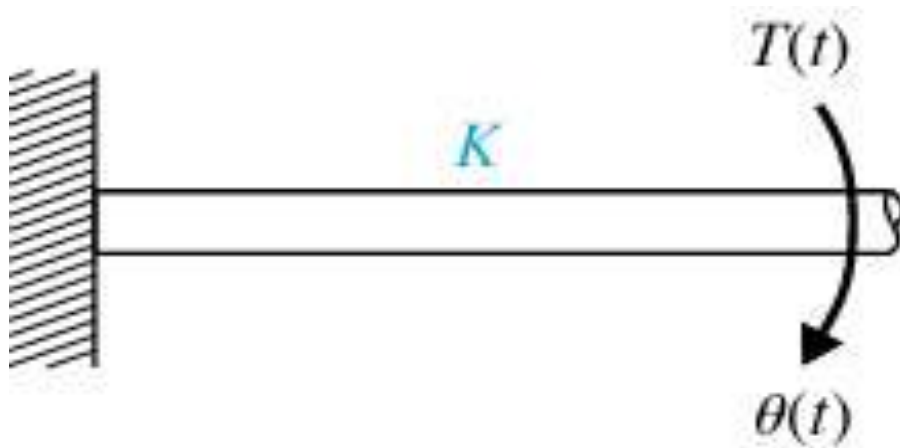
$$1 \text{ lb-ft-sec}^2 = 192 \text{ oz-in.-sec}^2 = 32.2 \text{ lb-ft}^2$$

$$1 \text{ oz-in.-sec}^2 = 386 \text{ oz-in.}^2$$

$$1 \text{ g-cm-sec}^2 = 980 \text{ g-cm}^2$$

비틀림스프링

- 단위 각변위당 토크인 비틀림상수 K 는 토크가 인가되었을 때 축의 변형정도 표현



$$T(t) = K\theta(t)$$

$$T(t) - TP = K\theta(t)$$

Units	Spring Constant K
SI	N-m/rad
British	ft-lb/rad

마찰

점성마찰

$$T(t) = B \frac{d\theta(t)}{dt}$$

정지마찰

$$T(t) = \pm (F_s) |_{\dot{\theta}=0}$$

쿨롬마찰

$$T(t) = F_c \frac{\frac{d\theta(t)}{dt}}{\left| \frac{d\theta(t)}{dt} \right|}$$

회전운동 예제

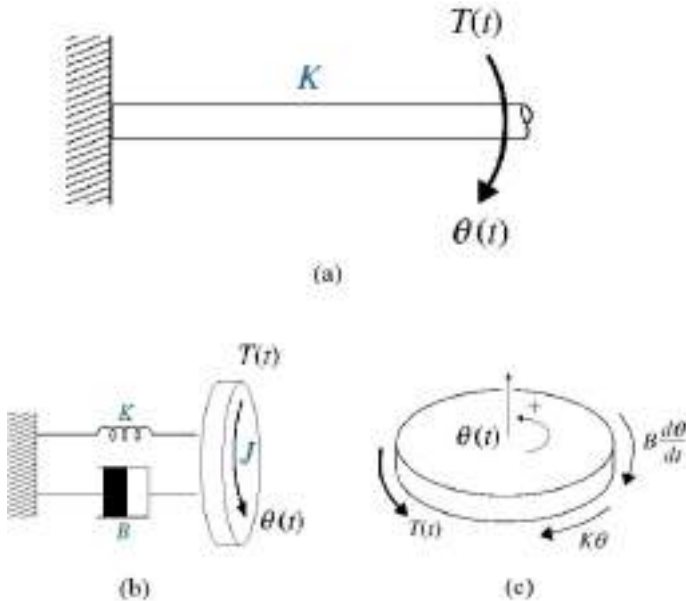


Figure 2-9 Torque torsional spring system.

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} + K \theta(t) = T(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{B}{J} \dot{\theta}(t) + \frac{K}{J} \theta(t) = \frac{K}{J} r(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{\theta}(t) + \omega_n^2 \theta(t) = \omega_n^2 r(t)$$

where ω_n and ζ are the *natural frequency*(고유주파수) and the *damping ratio*(감쇠비) of the system, respectively. The above equation is also known as the **prototype second order system**(표준형 2차 시스템). We define $\theta(t)$ as the **output** and $r(t)$ as the **input** of the system. Notice that this system is **analogous** to the translational system in Fig. 2-2.

회전운동 예제

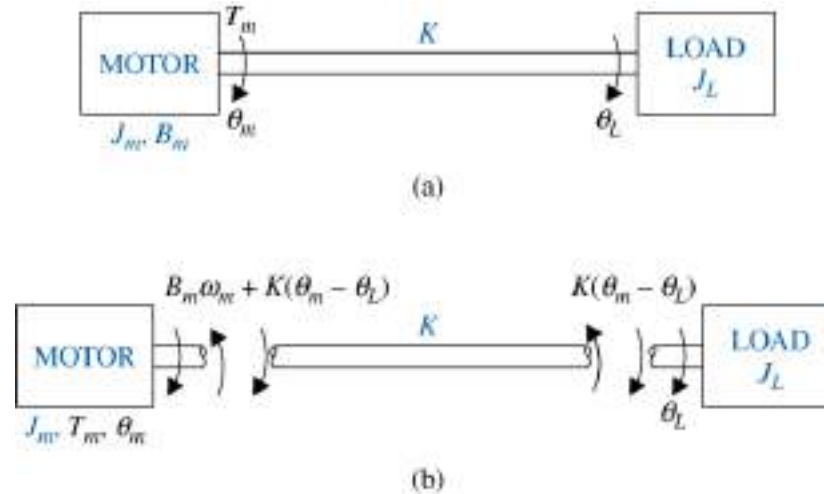


Figure 2-10 (a) Motor-load system. (b) Free-body diagram.

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = -\frac{B_m}{J_m} \frac{d\theta_m(t)}{dt} - \frac{K}{J_m} [\theta_m(t) - \theta_L(t)] + \frac{1}{J_m} T_m(t)$$

$$K[\theta_m(t) - \theta_L(t)] = J_L \frac{d^2\theta_L(t)}{dt^2}$$

If the motor shaft
is **rigid**: $\theta_m = \theta_L$



$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + \frac{B_m}{J_m + J_L} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_m + J_L} T_m(t)$$

병진운동과 회전운동 사이의 변환

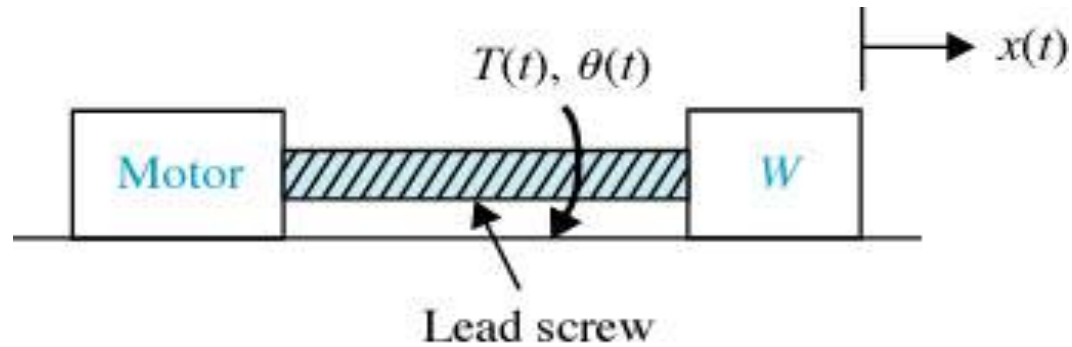


Figure 2-11 Rotary-to-linear motion control system (lead screw).

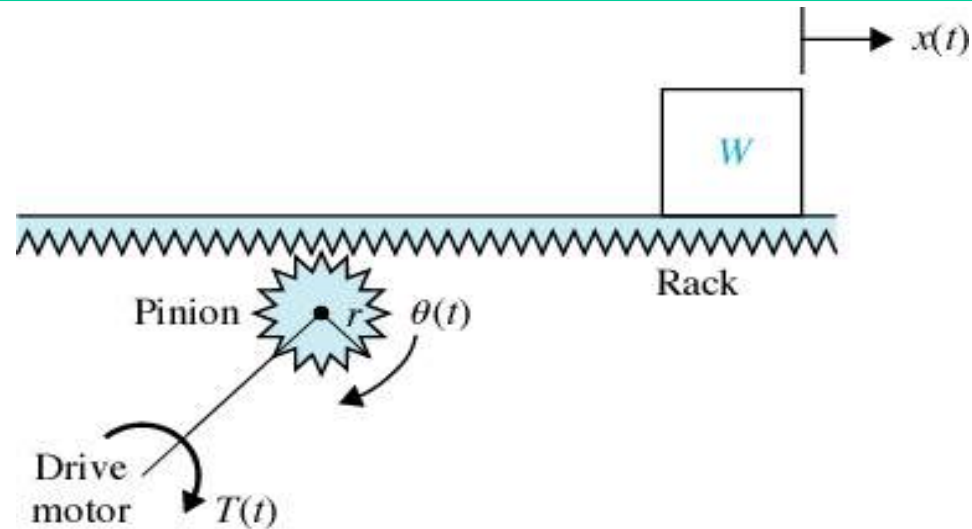
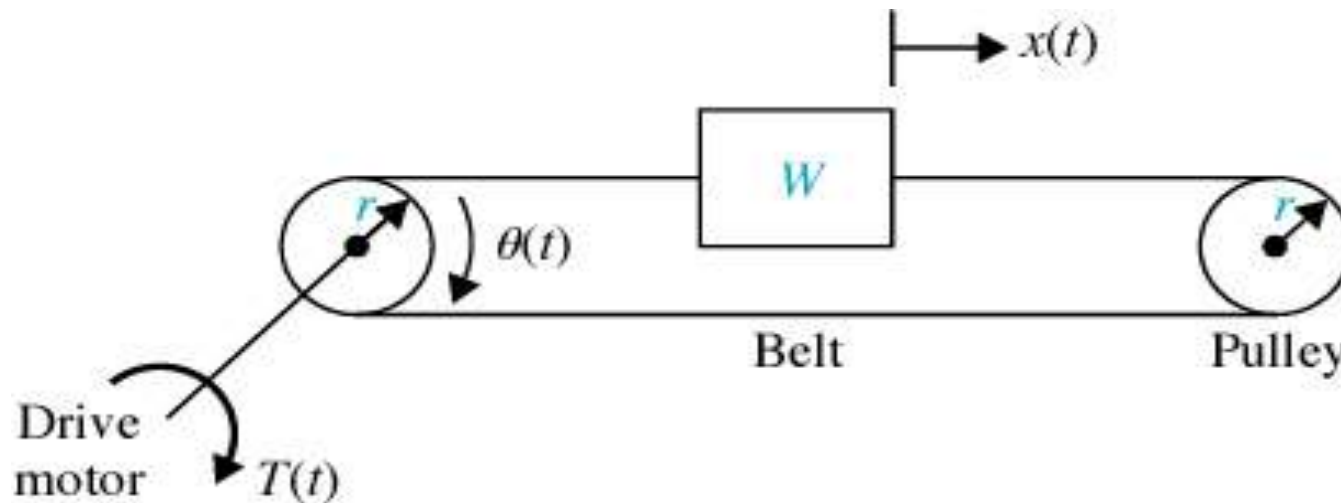


Figure 2-12 Rotary-to-linear motion control system (rack and pinion).

Figure 2-13 Rotary-to-linear motion-control system (belt and pulley).



- 도르래의 반지름은 r 이고, 도르래 자체의 관성을 무시하면 모터가 보는(느끼는) 등가관성은

$$J = Mr^2$$

- rack and pinion의 경우도 동일. Lead screw의 경우는 스크루의 회전당 이동하는 질량의 직선거리($2\pi r$)를 고려하면

$$J = M \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2$$

예제 2-1-5

- Quarter-car model

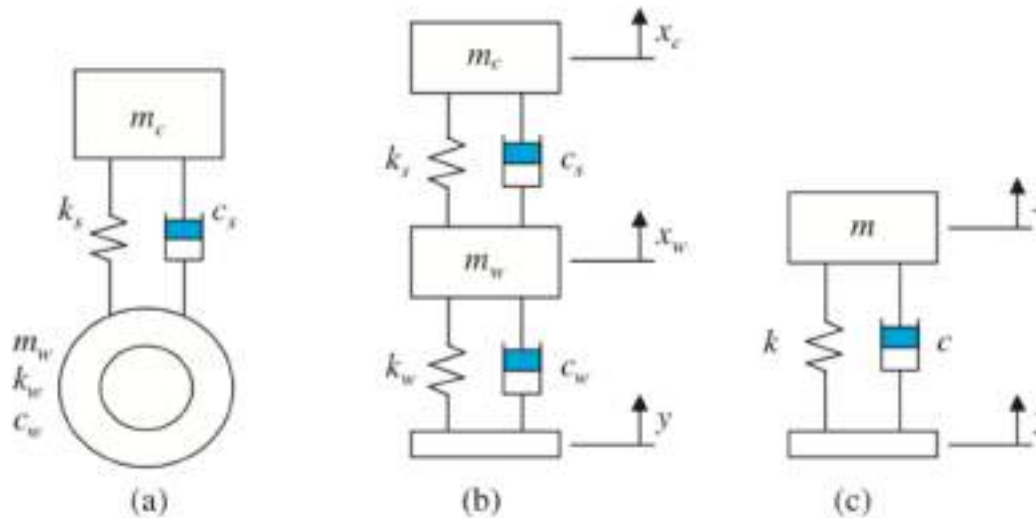


Figure 2-14 Quarter-car model realization. (a) Quarter car. (b) Two degrees of freedom model. (c) One degree of freedom model.

$$m\ddot{x}(t) = c(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) + k(y(t) - x(t))$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{y}(t) + ky(t)$$

예제 2-1-5

- $x-y$ 를 상대변위 또는 튀어 오름의 향으로 정의하면 $z(t) = x(t) - y(t)$

$$\ddot{z}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{z}(t) + \omega_n^2 z(t) = -\ddot{y}(t) = -a(t)$$

- 위의 식은 차 바퀴가 과속방지턱 등의 장애물에 부딪힌 후에 지면으로부터 입력 가속도가 주어졌을 때 지면에 대해서 얼마나 튀어 오르는가를 반영하는 식
- 모터와 같은 전기기계 시스템을 포함하는 경우 능동제어 (active control) 가능

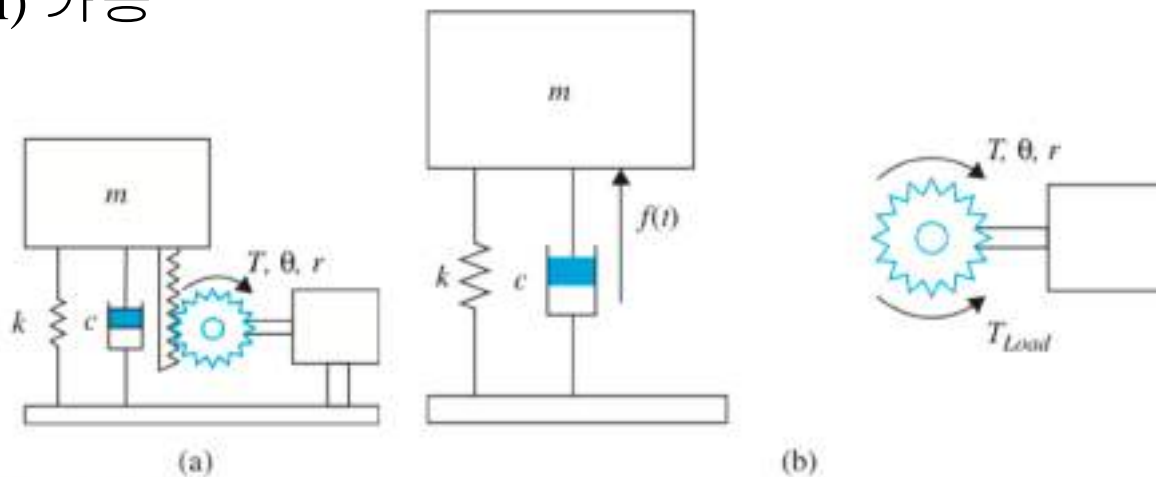
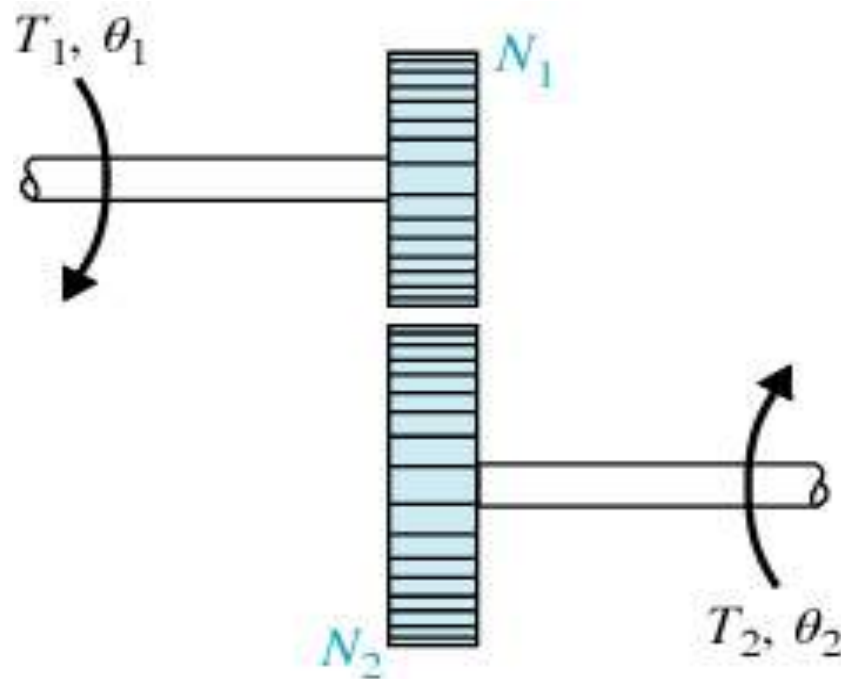


Figure 2-15 Active control of the 1-DOF quarter-car model via a dc motor and rack. (a) Schematics. (b) Free-body diagram.

기어 열(Gear)

- 도르래, 기어 열(gear), 지레, 타이밍벨트: 에너지를 전달하는 기계장치로 힘, 토크, 속도, 변위가 바뀜
- Gear: 관성과 마찰은 이상적인 경우에는 무시



토크 T_1 과 T_2 , 각변위 θ_1 과 θ_2 , 그리고 치차열의 치의 수 N_1 과 N_2 사이의 상호관계는 다음 사실로부터 유도된다.

1. 치차표면 위에 있는 치의 수는 그 치차의 반지름 r_1 과 r_2 에 비례한다. 즉

$$r_1 N_2 = r_2 N_1 \quad (4-32)$$

2. 각 치차의 둘레에 따라 이동한 거리는 같다. 즉

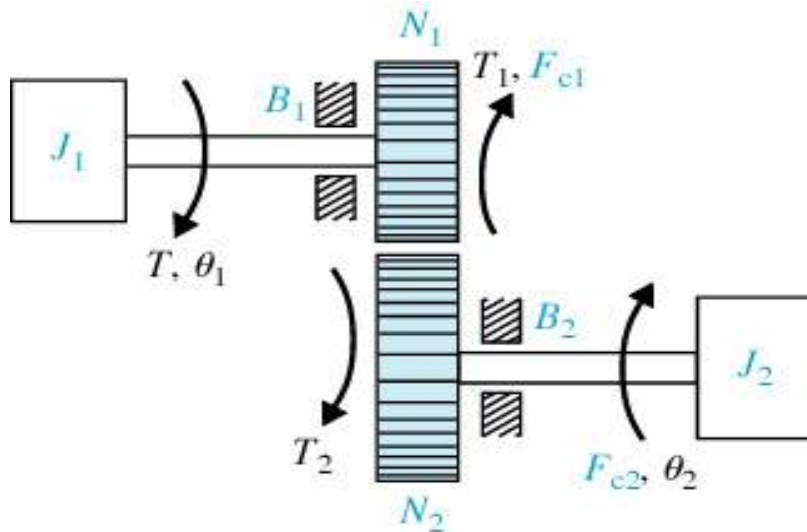
$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \quad (4-33)$$

3. 손실이 없다고 가정하면 한 치차가 행한 일은 다른 치차가 행한 일과 같다.

$$T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2 \quad (4-34)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

마찰과 관성을 가지는 기어(gear)



$$T_2(t) = J_2 \frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} + B_2 \frac{d\theta_2(t)}{dt} + F_{c2} \frac{\omega_2}{|\omega_2|}$$

1 쪽에서의 토크방정식은 다음과 같다.

$$T(t) = J_1 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} + F_{c1} \frac{\omega_1}{|\omega_1|} + T_1(t)$$

$$T_1(t) = \frac{N_1}{N_2} T_2(t) = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 J_2 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 B_2 \frac{d\theta_1(t)}{dt} + \frac{N_1}{N_2} F_{c2} \frac{\omega_2}{|\omega_2|}$$

기어(Gear)의 특성

- 관성, 마찰, 컴플라이언스, 토크, 속도, 변위를 다른 쪽으로 반사시킴

$$\text{Inertia: } \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2$$

$$\text{Viscous friction coefficient: } \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2$$

$$\text{Torque: } \frac{N_1}{N_2} T_2$$

$$\text{Angular displacement: } \frac{N_1}{N_2} \theta_2$$

$$\text{Angular velocity: } \frac{N_1}{N_2} \omega_2$$

$$\text{Coulomb friction torque: } \frac{N_1}{N_2} F_{c2} \frac{\omega_2}{|\omega_2|}$$

뒤튐(backlash)과 불감대(dead zone) (비선형 특성)

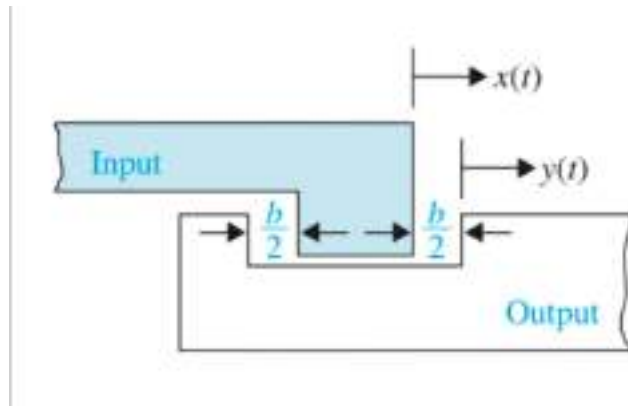


Figure 2-18 Physical model of backlash between two mechanical elements.

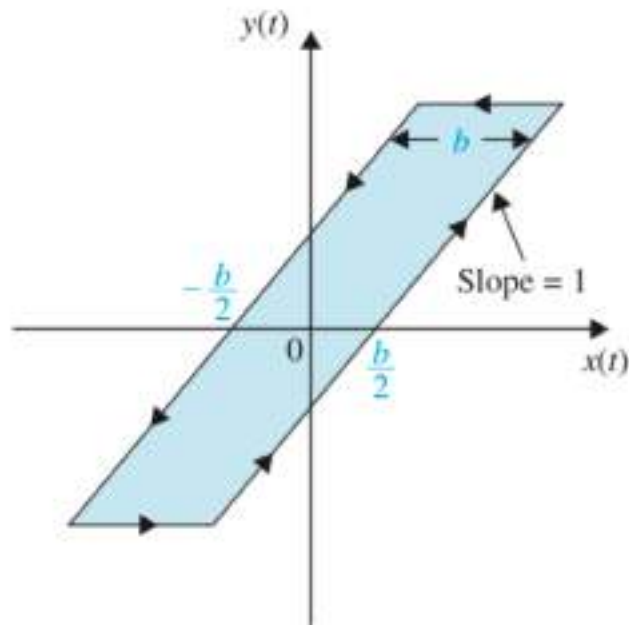


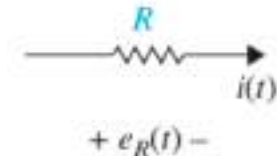
Figure 2-19 Input-output characteristic of backlash.

전기회로망에 관한 모델링

- 키르히호프의 두 법칙(KCL, KVL)을 이용한 루프법이나 마디법을 기초로 표현
- 수동소자인 R, L, C의 소자법칙이용

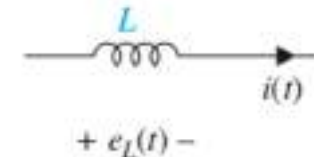
Resistors. Ohm's law states that the voltage drop, $e_R(t)$, across a resistor R is proportional to the current $i(t)$ going through the resistor. Or

$$e_R(t) = i(t)R$$



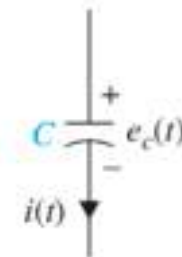
Inductors. The voltage drop, $e_L(t)$, across an inductor L is proportional to the time rate of change of current $i(t)$ going through the inductor. Thus,

$$e_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

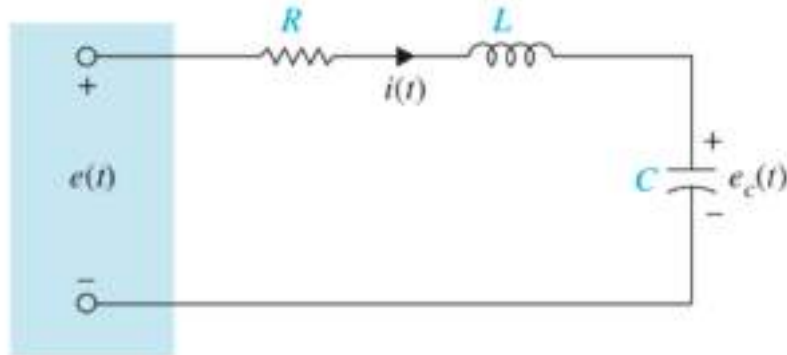


Capacitor. The voltage drop, $e_C(t)$, across a capacitor C is proportional to the integral current $i(t)$ going through the capacitor with respect to time. Therefore,

$$e_C(t) = \int \frac{i(t)}{C} dt$$



예제 2-2-1



인덕터에 흐르는 전류 $i(t)$, 그리고
커패시터 양단의 전압 $e_c(t)$ 를 변수로
지정

$$e(t) = +e_c(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

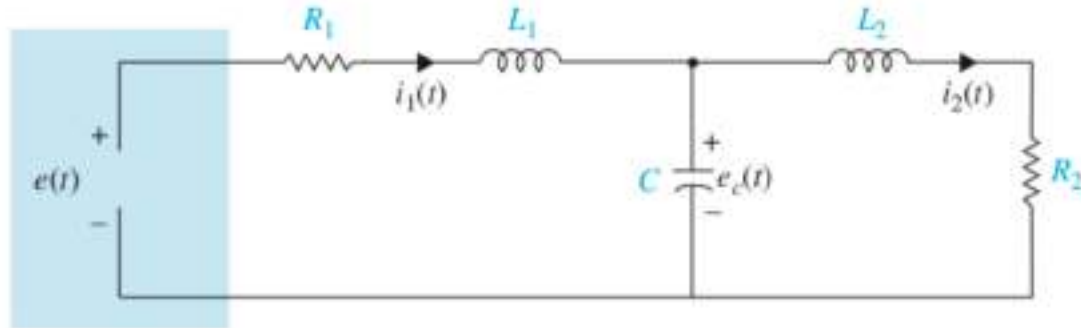
$$LC \frac{d^2 e_c(t)}{dt^2} + RC \frac{de_c(t)}{dt} + e_c(t) = e(t)$$

$$\ddot{e}_c(t) + \frac{R}{L} \dot{e}_c(t) + \frac{1}{LC} e_c(t) = \frac{1}{LC} e(t)$$

$$\ddot{e}_c(t) + 2\zeta\omega_n \dot{e}_c(t) + \omega_n^2 e_c(t) = \omega_n^2 e(t)$$

where ω_n and ζ are the *natural frequency* and the *damping ratio* of the system, respectively. Eq. (2-72) is known as the **prototype second-order system**. We define $e_c(t)$ as the **output** and $e(t)$ as the **input** of the system. Notice that this system is also **analogous to the translational Mechanical system**

예제 2-2-2



$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + e_c(t) = e(t)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) = e_c(t)$$

$$C \frac{de_c(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t)$$



$$L_1 \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + R_1 \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) - i_2(t) = e(t)$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + R_2 \frac{di_2(t)}{dt} - i_1(t) + i_2(t) = 0$$

비선형시스템의 선형화

- 대부분의 요소들은 비선형적 특성을 갖지만, 제한된 동작범위에서만 선형시스템으로 모델링하여 해석
- 대표적인 선형화 방법은 테일러 급수를 이용한 선형화
- 비선형 함수 $f(x(t))$ 를 기준 값 혹은 동작점 $x_0(t)$ 근방에서 전개하는데 사용됨. 따라서 비선형 함수 $f(x(t))$ 를 다음과 같이 표현할 수 있음

$$f(x(t)) = \sum_{i=1}^n c_i (x(t) - x_0(t))^i$$

- 상수 c_i 는 $x(t)$ 에 대한 $f(x(t))$ 의 미분과 동작점 $x_0(t)$ 에서의 값임

$$c_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i f(x_0)}{dx^i}$$

- 혹은

$$\begin{aligned} f(x(t)) = & f(x_0(t)) + \frac{df(x_0(t))}{dt}(x(t) - x_0(t)) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x_0(t))}{dt^2}(x(t) - x_0(t))^2 \\ & + \frac{1}{6} \frac{d^3 f(x_0(t))}{dt^3}(x(t) - x_0(t))^3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0(t))}{dt^n}(x(t) - x_0(t))^n \end{aligned}$$

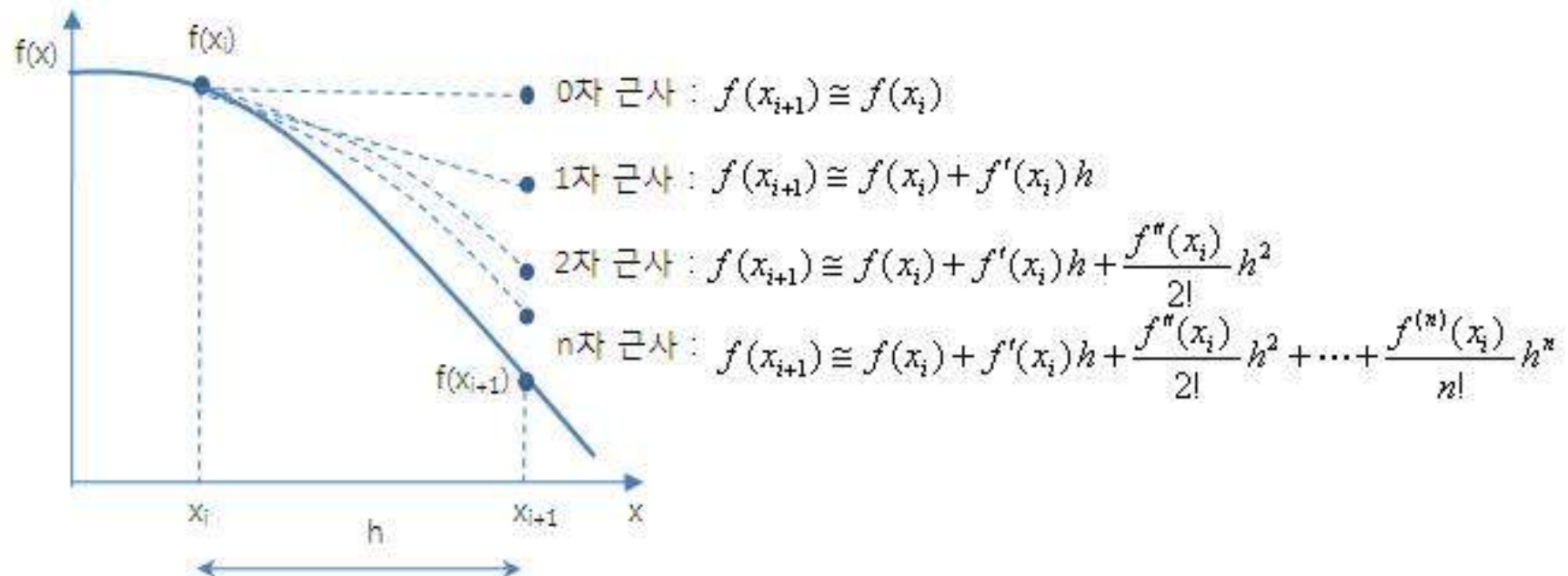
비선형시스템의 선형화

- 만일 $\Delta(x) = x(t) - x_0(t)$ 가 매우 작다면, $f(x(t))$ 대신에 처음 두 항을 $f(x(t))$ 로 대체함으로서 선형화할 수 있음

$$f(x(t)) \approx f(x_0(t)) + \frac{df(x_0(t))}{dt}(x(t) - x_0(t))$$

$$= c_0 + c_1 \Delta x$$

- 테일러 급수의 간단한 설명 그림



예제 2-4-1

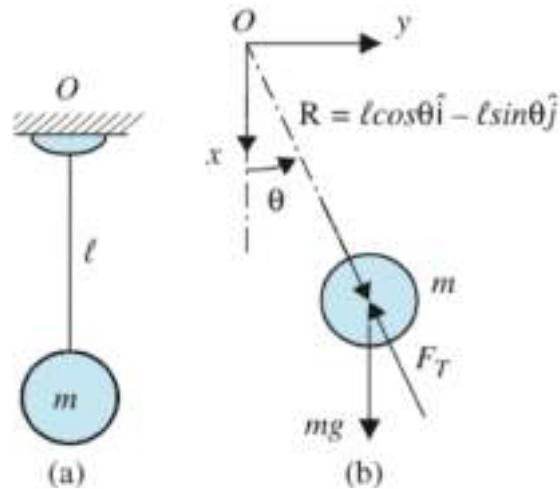


Figure 2-38 (a) A simple pendulum. (b) Free-body diagram of mass m .

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2 (l \cos \theta \hat{i} + l \sin \theta \hat{j})}{dt^2}$$

$$= (-l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta) \hat{i} + (l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta) \hat{j}$$

$$a_x = (-l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$a_y = (l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

- 진자(m)에 가해진 외부 힘은 중력(mg)과 장력(F_T)임

$$\sum F_x = -F_T \cos \theta + mg$$

$$\sum F_y = -F_T \sin \theta$$

예제 2-4-1

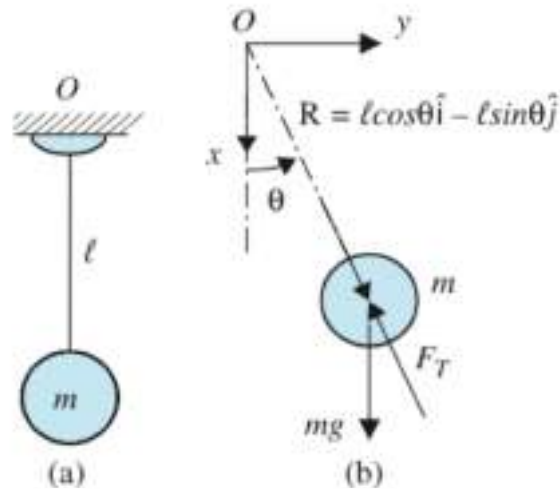


Figure 2-38 (a) A simple pendulum. (b) Free-body diagram of mass m .

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2 (l \cos \theta \hat{i} + l \sin \theta \hat{j})}{dt^2}$$

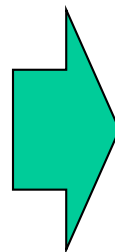
$$= (-l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta) \hat{i} + (l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta) \hat{j}$$

$$a_x = (-l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$a_y = (l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$



$$-F_T \cos \theta + mg = m(-l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$-F_T \sin \theta = m(l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

예제 2-4-1

Premultiplying Eq. (2-164) by $(-\sin\theta)$ and Eq. (2-165) by $(\cos\theta)$ and adding the two, we get

$$-mg \sin\theta = m\ell \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$$

- 동작점으로서 정적평형 위치인 $\theta=0$ 을 사용하면 테일러 급수에서 $\sin\theta \approx \theta$ 를 의미함.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ rad/s is the natural frequency}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

기계시스템과 전기회로망과의 유사성

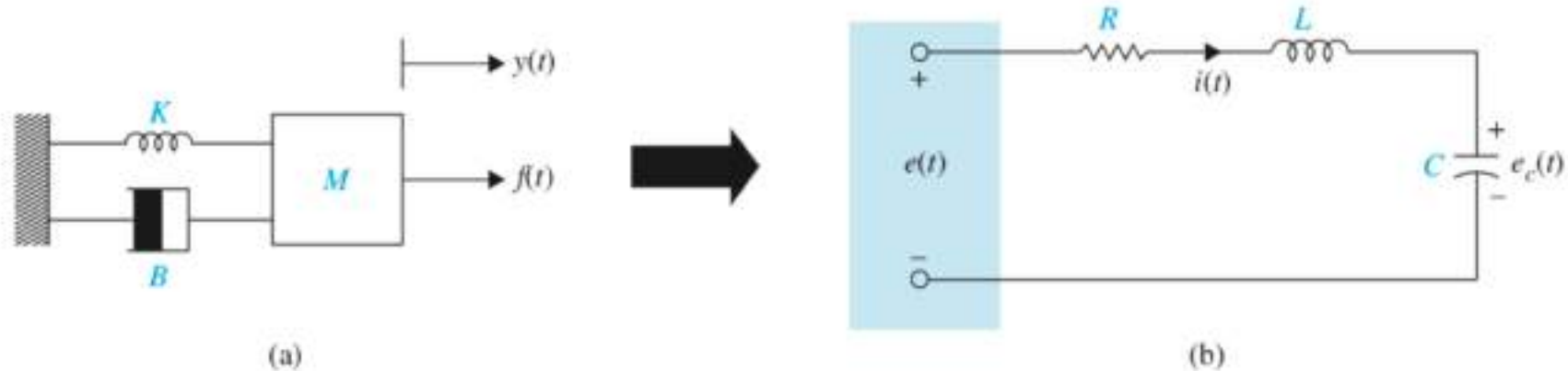


Figure 2-40 Analogy of a spring-mass-damper system to a series RLC network. (a) A spring-mass-damper system. (b) A series RLC equivalent.

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t)$$

기계시스템과 전기회로망과의 유사성

- 질량 M : 인덕턴스 L
- 스프링정수 K : 커패시턴스의 역 $1/C$
- 점성마찰계수 B : 저항 R
- 속도 $v(t)$, 작용하는 힘 $f(t)$: 전류 $i(t)$, 전압, $e(t)$

TABLE 2-6 Mechanical, Thermal, and Fluid Systems and Their Electrical Equivalents

System	Parameter Relation to Electrical R, L, C	Variable Analogy
Mechanical (translation)	$Ri(t) = Bv(t)$	$e(t)$ analogous $f(t)$
$M \frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) + K \int v(t) dt = f(t)$	$R = B$	$i(t)$ analogous $v(t)$
analogous to	$\frac{1}{C} \int i(t) dt = K \int v(t) dt$	where
$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t)$	$C = \frac{1}{K}$	$e(t) = \text{voltage}$
	$L \frac{di(t)}{dt} = M \frac{dv(t)}{dt}$	$i(t) = \text{current}$
	$L = M$	$f(t) = \text{force}$
		$v(t) = \text{linear velocity}$
Mechanical (rotation)	$R = B$	$e(t)$ analogous $T(t)$
$J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) + K \int \omega(t) dt = T(t)$	$C = \frac{1}{K}$	$i(t)$ analogous $\omega(t)$
analogous to	$L = J$	where
$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t)$		$e(t) = \text{voltage}$
		$i(t) = \text{current}$
		$T(t) = \text{torque}$
		$\omega(t) = \text{angular velocity}$