

자동제어(Automatic Control)

10장 주파수영역 분석

교재: Automatic Control Systems

서론

- 설계 문제에 있어서 최대 오버슈트와 상승시간, 지연시간, 정정시간 등의 시간영역 사양을 만족시키는 통일된 설계방법은 없음
- 주파수영역에서는 저차의 시스템에만 국한되지 않게 이용할 수 있는 도식적인 방법이 풍부함
- 주파수영역의 특성을 기초로 시간영역의 성능을 예측할 수 있는 것과 같이 주파수영역과 시간영역 성능의 상관관계를 이해하는 것이 중요
- 주파수영역은 잡음과 파라미터 변화에 대한 민감도를 측정하는 데 더 편리
- 주파수영역에서 제어시스템의 해석과 설계를 수행하는 주된 동기는 기존의 해석도구의 편의성과 가용성
- 제어시스템의 복소수해석과 설계를 통해 가치 있고 핵심적인 정보를 제공하는 제어시스템 문제의 다른 관점을 제공

서론

- 주요 항목
 - 주파수 응답
 - 주파수 영역 설계 사양
 - 최소 위상 시스템을 위한 Nyquist plot 및 도구(Polar plot) 활용
 - 위상 및 이득마진
 - Nichol's charts
 - MATLAB codes

서론

- 선형 시불변 시스템

- 입력 : 진폭 R , 주파수 ω_0 인 정현파

$$r(t) = R \sin \omega_0 t$$

- 출력 : 동일 주파수, 다른 진폭과 위상

$$y(t) = Y \sin(\omega_0 t + \phi)$$

- SISO 시스템의 전달함수 $M(s)$

$$Y(s) = M(s)R(s)$$

- 정현파 정상상태 해석을 위한 대치

$$Y(j\omega) = M(j\omega)R(j\omega)$$

서론

- 선형 시불변 시스템
 - 함수 $Y(j\omega)$ 의 극좌표 표현

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega)$$

- 입력과 출력의 진폭 사이의 관계

$$|Y(j\omega)| = |M(j\omega)| |R(j\omega)|$$

- 입력과 출력의 위상 사이의 관계

$$\angle Y(j\omega) = \angle M(j\omega) + \angle R(j\omega)$$

- 입력과 출력 신호에 대한 출력 정현파
 - 진폭: $Y = R |M(j\omega_0)|$
 - 위상: $\phi = \angle M(j\omega_0)$

페루프 시스템의 주파수 응답

- 단일루프 제어시스템의 페루프 전달함수

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

- 정현파 정상상태 $s = j\omega$

$$M(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)}$$

$$\Leftrightarrow M(j\omega) = |M(j\omega)| \angle M(j\omega)$$

$$\Leftrightarrow M(j\omega) = \text{Re}[M(j\omega)] + j \text{Im}[M(j\omega)]$$

- 크기

$$|M(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)} \right| = \frac{|G(j\omega)|}{|1+G(j\omega)H(j\omega)|}$$

- 위상

$$\angle M(j\omega) = \phi_M(j\omega) = \angle G(j\omega) - \angle[1+G(j\omega)H(j\omega)]$$

페루프 시스템의 주파수 응답

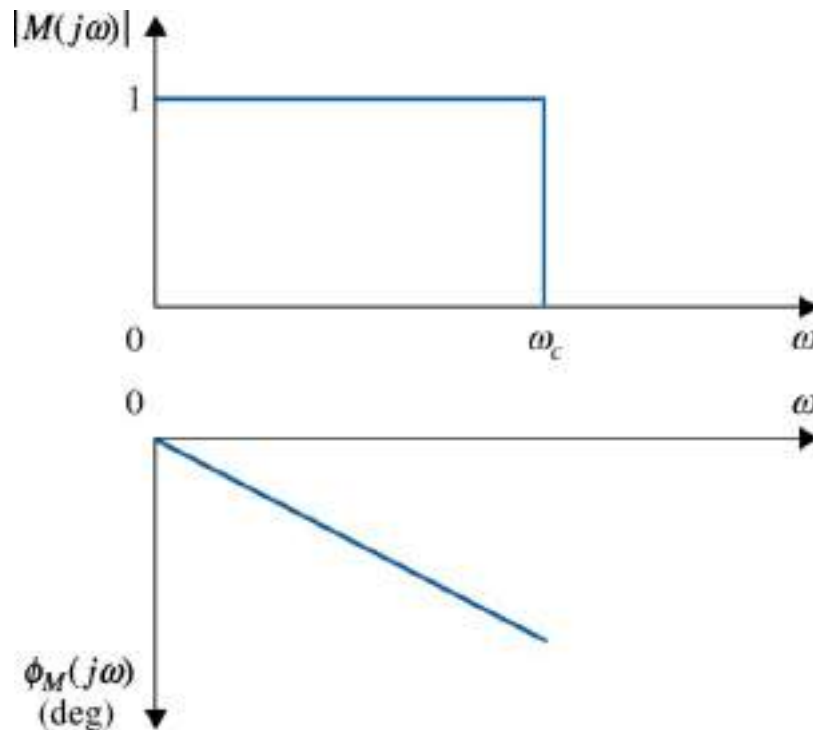


Figure 8-1 Gain-phase characteristics of an ideal low-pass filter.

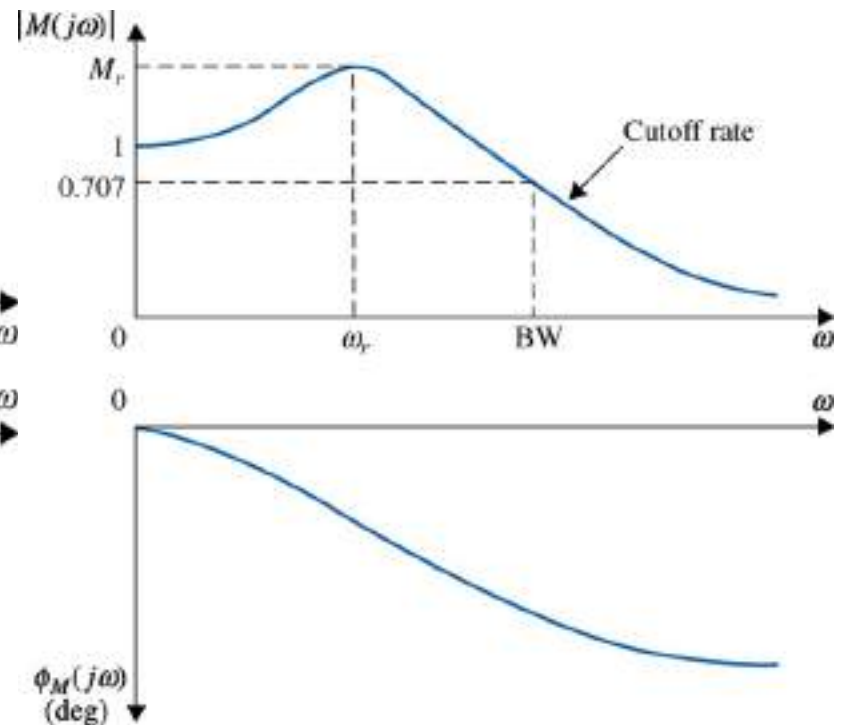


Figure 8-2 Typical gain-phase characteristics of a feedback control system.

주파수영역 사양

- 첨두공진치(Resonant Peak) M_r
 - 첨두공진치 M_r 은 $|M(j\omega)|$ 의 최대치
 - M_r 의 크기는 안정한 피드백 제어시스템의 상대적 안정도의 척도
 - 큰 M_r 은 시간영역에서 계단응답의 큰 최대오버슈트에 대응
 - 대부분의 제어시스템에서 M_r 은 1.1 ~ 1.5
- 공진주파수 ω_r
 - 공진주파수 ω_r 은 첨두공진치 M_r 이 일어날 때의 주파수
- 대역폭 BW
 - 대역폭 BW 는 $|M(j\omega)|$ 의 크기가 주파수 0 일 때 값의 70.7% 또는 3dB 떨어질 때의 주파수
 - 시간영역의 과도응답 성질의 지표 제공
 - 잡음제거 특성, 시스템의 강인성 제공
- 차단율(Cutoff Rate)
 - 높은 주파수에서 $|M(j\omega)|$ 의 기울기

첨두공진치와 공진주파수

- 표준형 2차시스템의 페루프 전달함수
- ζ : 감쇠비
• ω_n : 비감쇠 고유주파수

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- 정현파 정상상태

$$M(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{1 + j2(\omega/\omega_n)\zeta - (\omega/\omega_n)^2}$$

$$M(ju) = \frac{1}{1 + j2u\zeta - u^2}$$

$$|M(ju)| = \frac{1}{[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2}}$$

$$\angle M(ju) = \phi_M(ju) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2}$$

첨두공진치와 공진주파수

- $|M(ju)|$ 의 u 에 대한 미분을 '0'으로 놓아서 공진주파수를 결정

$$\frac{d|M(ju)|}{du} = -\frac{1}{2} \left[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2 \right]^{-3/2} (4u^3 - 4u + 8u\zeta^2) = 0 \quad (8-21)$$

$$4u^3 - 4u + 8u\zeta^2 = 4u(u^2 - 1 + 2\zeta^2) = 0 \quad (8-22)$$

- 정규화 주파수에서 식(8-22)의 근은

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \end{cases} \quad (8-23)$$

- $u_r = 0$ 의 해는 $\omega = 0$ 에서 ω 에 대한 $|M(ju)|$ 의 곡선의 기울기가 '0'
- 만일 ζ 의 크기가 0.707 보다 작다면 실최대치가 아님

- 공진주파수

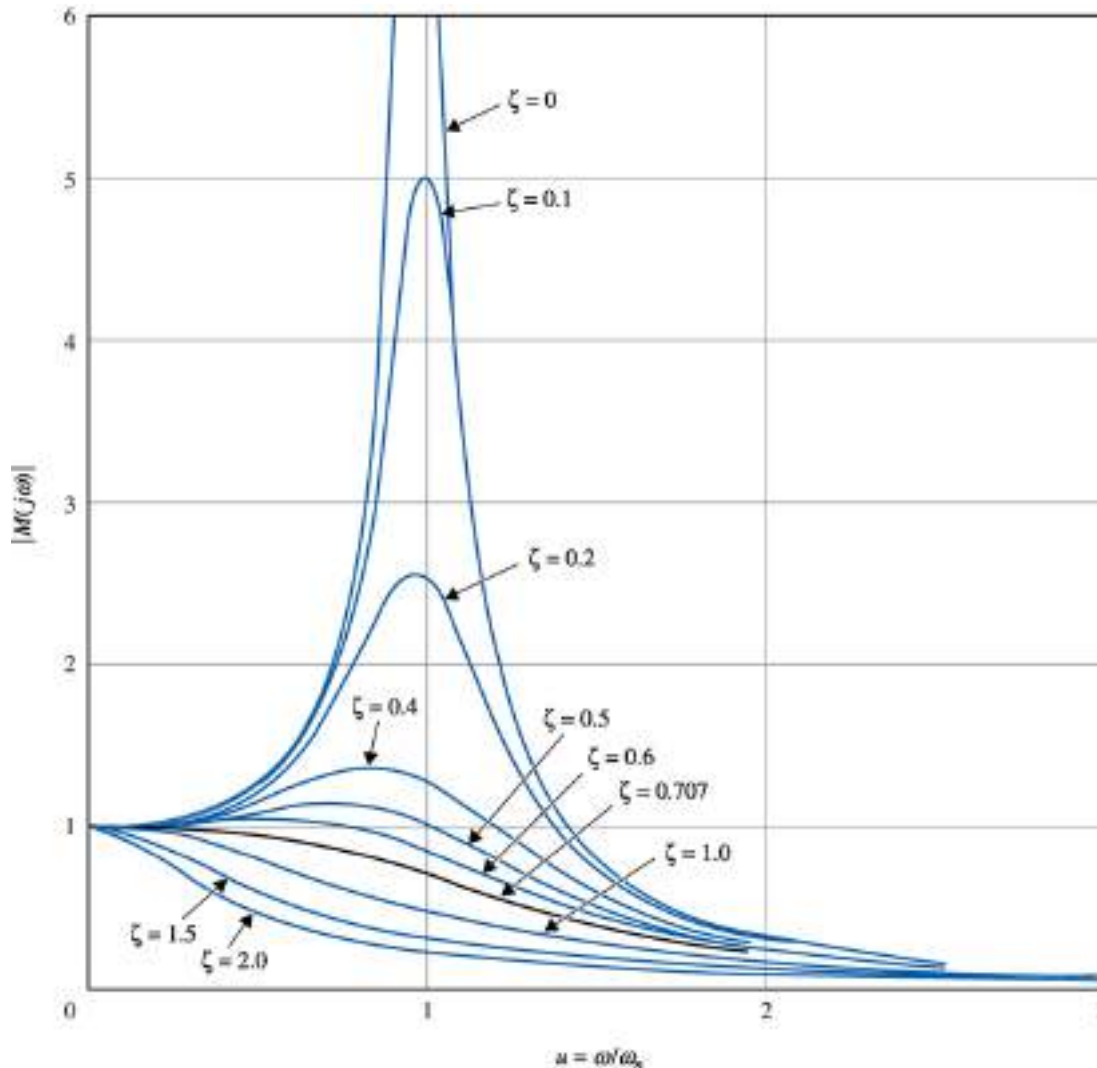
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (8-24)$$

첨두공진치와 공진주파수

- 주파수는 실수값이므로 식(8-24)는,
 - $2\zeta^2 \leq 1$
 - $\zeta \leq 0.707$
- $\zeta > 0.707$ 인 모든 값에서의 공진주파수
 - $\omega_r = 0$
 - $M_r = 1$
- 식(8-23) 을 식(8-20)에 대입

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \zeta \leq 0.707 \quad (8-25)$$

첨두공진치와 공진주파수

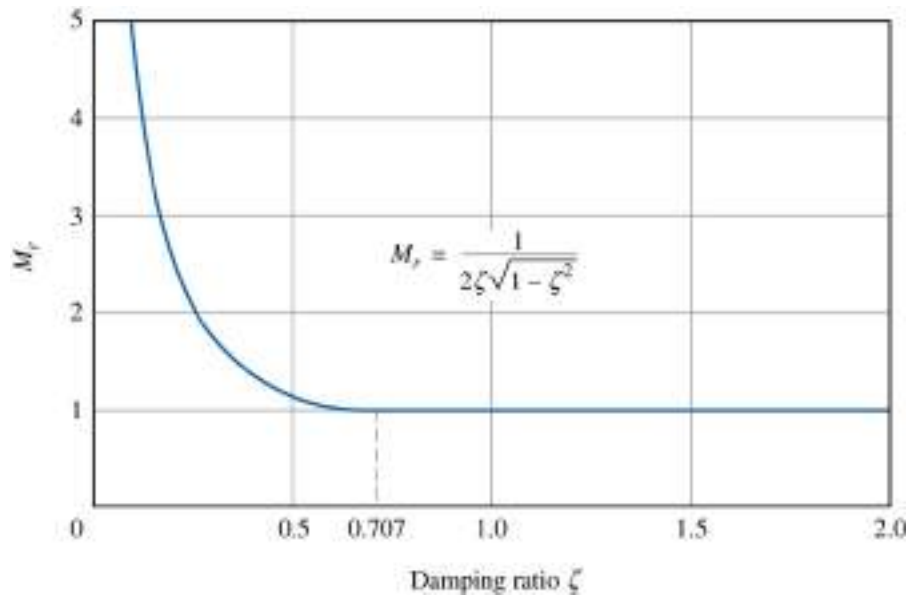


식(8-19)를 u 에 대하여 ζ 의 값에 따라 도식

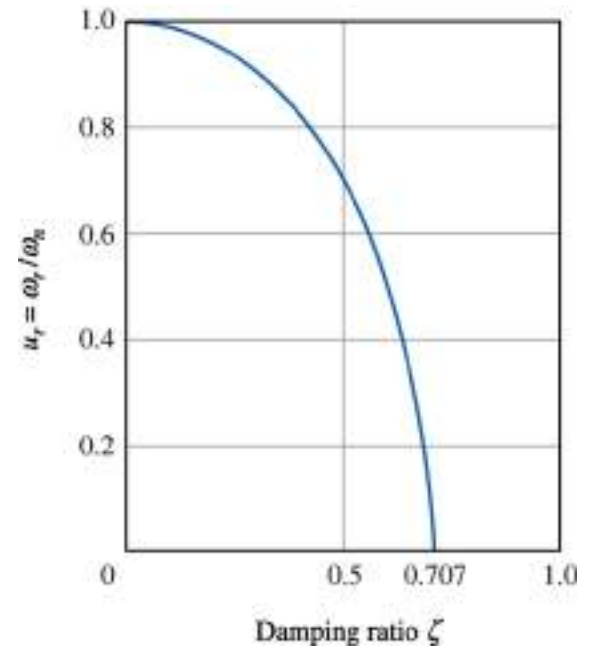
$$|M(ju)| = \frac{1}{[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2}}$$

[그림 8-3] 2차 제어시스템의 정규화 주파수에 대한 크기 특성.

첨두공진치와 공진주파수



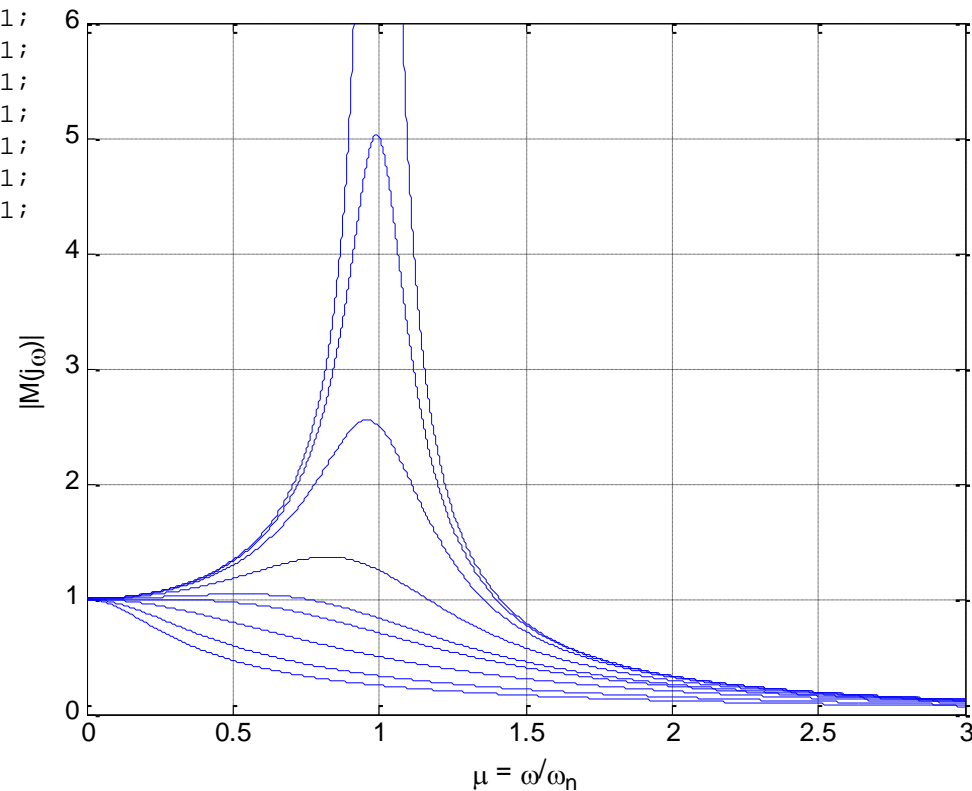
[그림 8-4] 2차 시스템의 감쇠비에 대한 M_r .



[그림 8-5] 2차 시스템에서 감쇠비에 대한 정규화 공진주파수 $u_r = \sqrt{1-2\zeta^2}$.

첨두공진치와 공진주파수

```
%Toolbox 8-2-1
%MATLAB statements for Fig. 8-3
i=1;
zeta = [0 0.1 0.2 0.4 0.6 0.707 1 1.5 2.0];
for u=0:0.001:3
    z=1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    M(z,i)= abs(1/(1+(j*2*zeta(z)*u)-(u^2)));z=z+1;
    i=i+1;
end
u=0:0.001:3;
for i = 1:length(zeta)
    plot(u,M(i,:));
    hold on;
end
xlabel('\mu = \omega/\omega_n');
ylabel('|M(j\omega)|');
axis([0 3 0 6]);
grid
```



대역폭

- 대역폭의 정의에 따라, $|M(ju)|$ 의 값을 0.707 로 놓으면,

$$|M(ju)| = \frac{1}{\left[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8-26)$$

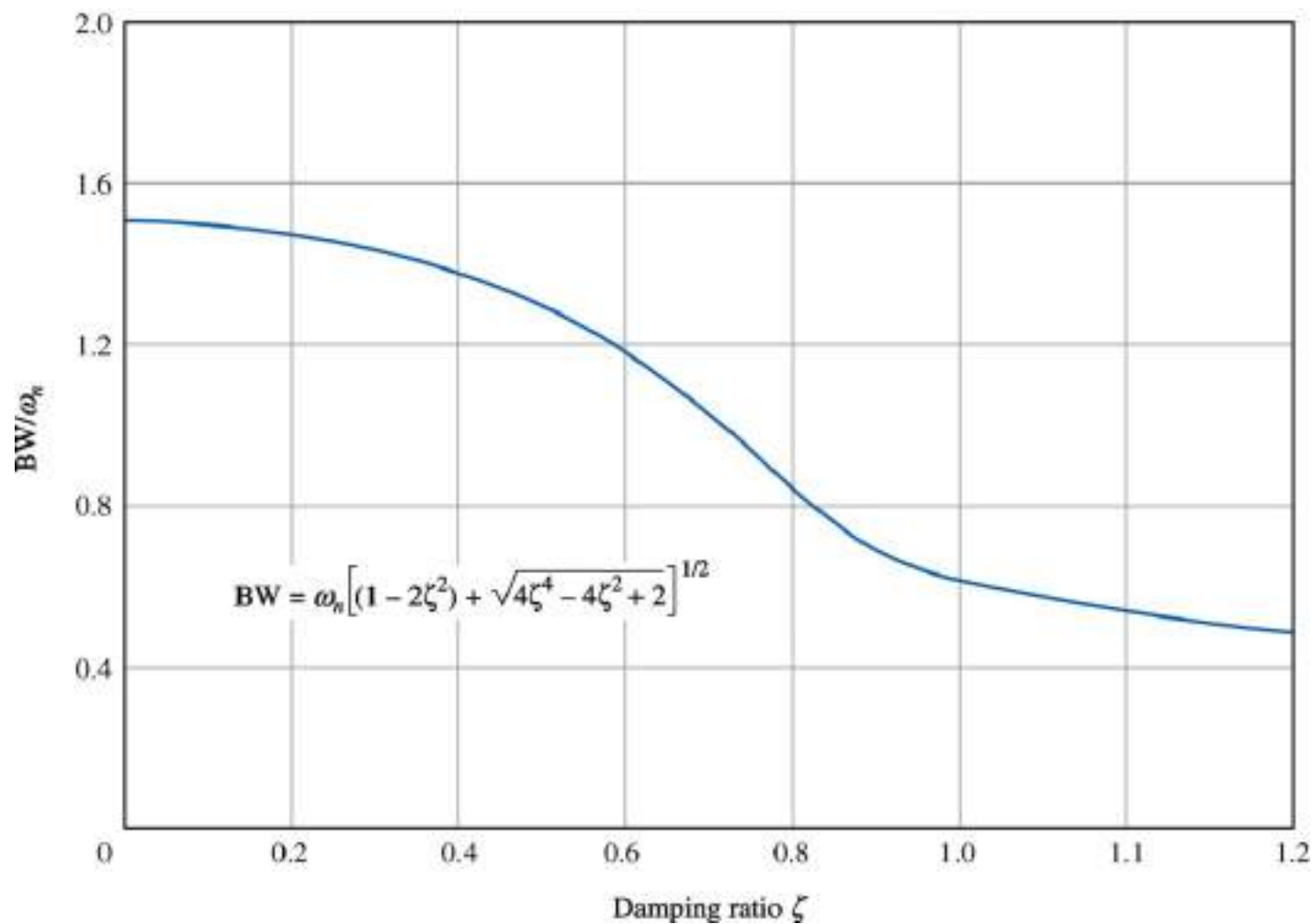
$$\therefore \left[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2\right]^{1/2} = \sqrt{2} \quad (8-27)$$

$$\therefore u^2 = (1-2\zeta^2) \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \quad (8-28)$$

- u 는 어떤 ζ 에 대해서도 양의 실수이므로 2차 시스템의 대역폭

$$\therefore BW = \omega_n \left[(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2} \quad (8-29)$$

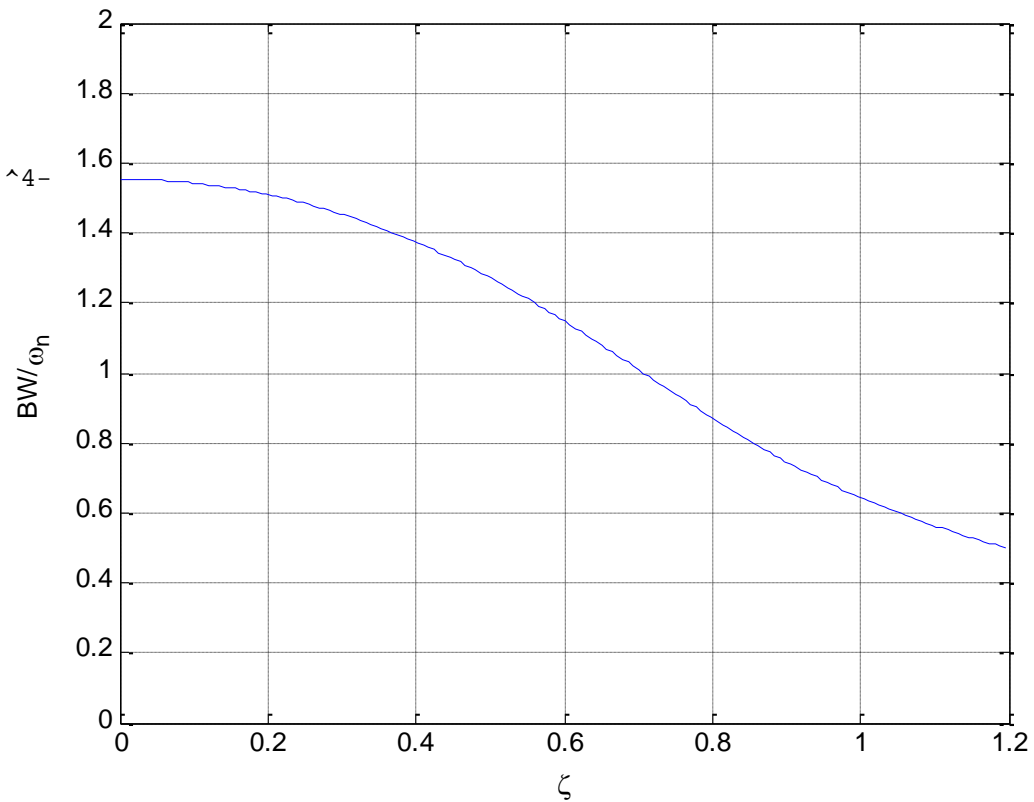
대역폭



[그림 8-6] 2차 시스템에 대한 감쇠비에 따른 대역폭/ ω_n .

대역폭

```
%Toolbox 8-2-2
%MATLAB statements for Fig. 8-6
clear all
i=1;
for zetai=0:sqrt(1/2)/100:1.2
    M(i) = sqrt((1-2*zetai.^2)+sqrt(4*zetai.^4-
    4*zetai.^2+2));
    zeta(i)=zetai;
    i=i+1;
end
TMP_COLOR = 1;
plot(zeta,M);
xlabel('\zeta');
ylabel('BW/\omega_n');
axis([0 1.2 0 2]);
grid
```



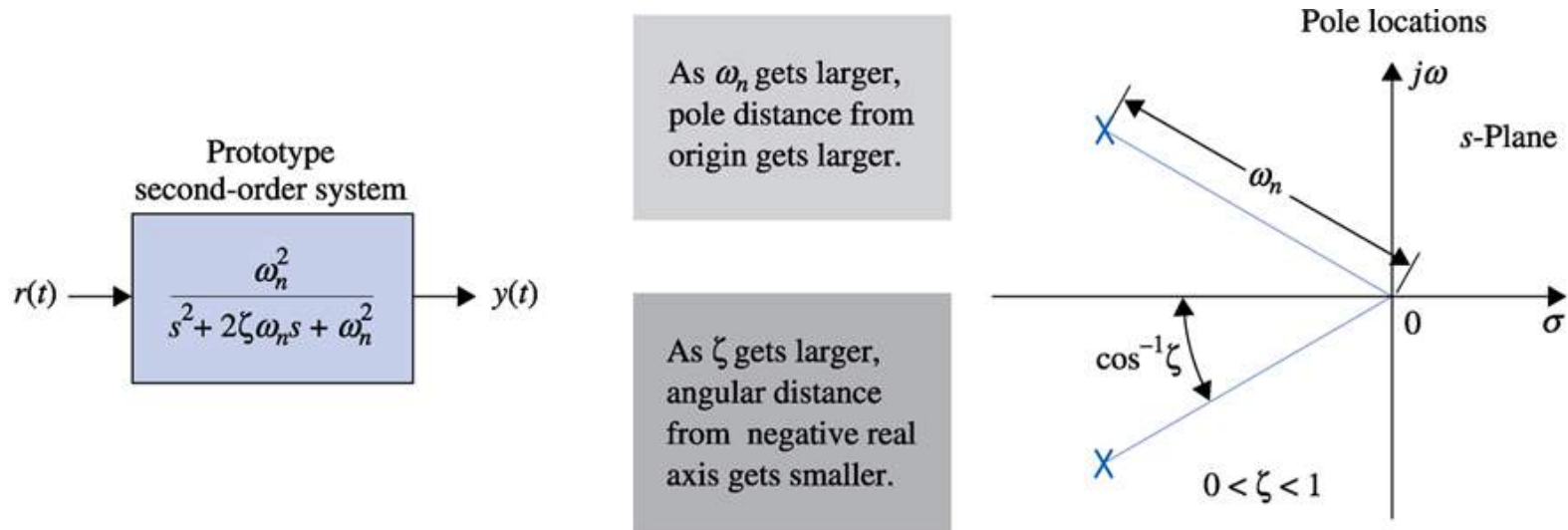
대역폭

- 2차 시스템의 시간영역 응답과 주파수영역 특성 사이의 관계

1. 페루프 주파수응답의 첨두공진치 M_r 은 ζ 에만 의존한다[식 (8-25)]. ζ 가 영일 때 M_r 은 무한대이다. ζ 가 음이면 시스템은 불안정하고 M_r 의 값은 무의미하다. ζ 가 증가하면 M_r 은 감소한다.
2. $\zeta \geq 0.707$ 에서 $M_r = 1$ (그림 8-4 참조)이고 $\omega_r = 0$ (그림 8-5 참조)이다. 단위계단 시간응답과 비교하면 식 (5-103)에서 최대오버슈트가 역시 ζ 에만 의존한다. 그러나 $\zeta \geq 1$ 에서는 최대오버슈트가 영이다.
3. 대역폭은 ω_n 에 직접 비례한다[식 (8-29)]. 즉 BW는 ω_n 에 따라 증가하고 감소한다. 또한 고정된 ω_n 에서 BW는 ζ 의 증가에 따라 감소한다(그림 8-6 참조). 단위계단응답에 대해서는 ω_n 이 감소할 때 상승시간이 증가한다[식 (5-108)과 그림 5-21]. 따라서 BW와 상승시간은 서로 반비례관계에 있다.
4. $0 \leq \zeta \leq 0.707$ 에서 대역폭과 M_r 은 서로 비례관계에 있다.

대역폭

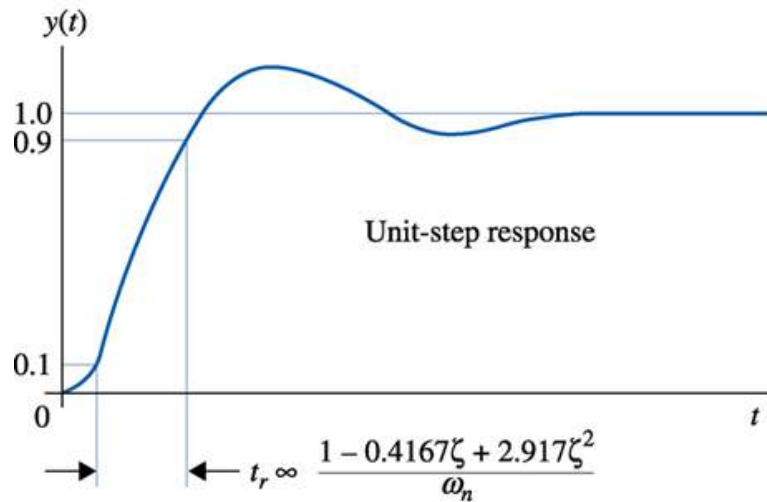
- 2차 시스템의 극의 위치, 단위계단응답, 주파수응답의 크기 사이의 관계



[그림 8-7] 2차 시스템에 대한 극의 위치, 단위계단응답 및 주파수응답의 크기 사이의 상관관계.

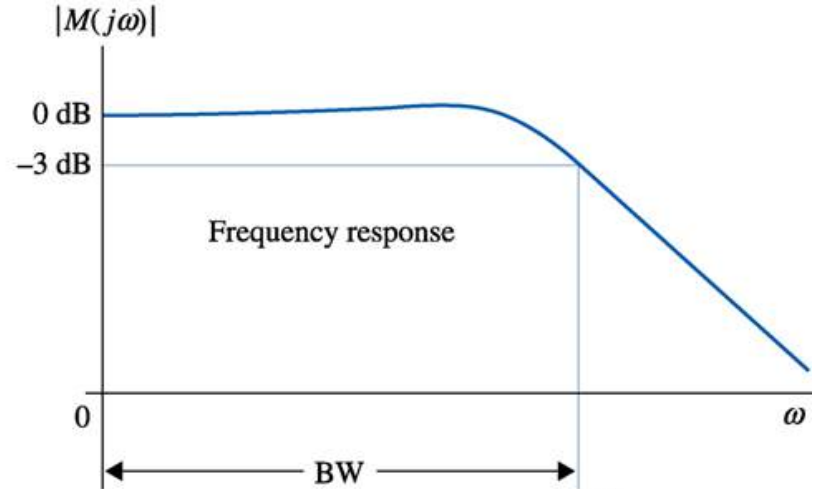
대역폭

- 2차 시스템의 극의 위치, 단위계단응답, 주파수응답의 크기 사이의 관계



As ω_n gets larger, t_r gets smaller and the system responds faster.

As ζ gets larger, t_r gets larger and the system responds slower.



As ω_n gets larger, BW gets larger.

As ζ gets larger, BW gets smaller.

[그림 8-7] 2차 시스템에 대한 극의 위치, 단위계단응답 및 주파수응답의 크기 사이의 상관관계.

대역폭

- 2차 시스템의 극의 위치, 단위계단응답, 주파수응답의 크기 사이의 관계

Bandwidth and rise time are inversely proportional.

Therefore, the larger the bandwidth is, the faster the system will respond.

Increasing ω_n increases BW and decreases t_r .

Increasing ζ decreases BW and increases t_r .

[그림 8-7] 2차 시스템에 대한 극의 위치, 단위계단응답 및 주파수응답의 크기 사이의 상관관계.

전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과

- 2차 전방경로 전달함수를 갖는 단위피드백 제어시스템

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (8-30)$$

- $s = -1/T$ 인 한 영점을 추가

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\omega_n^2 (1 + Ts)}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (8-31)$$

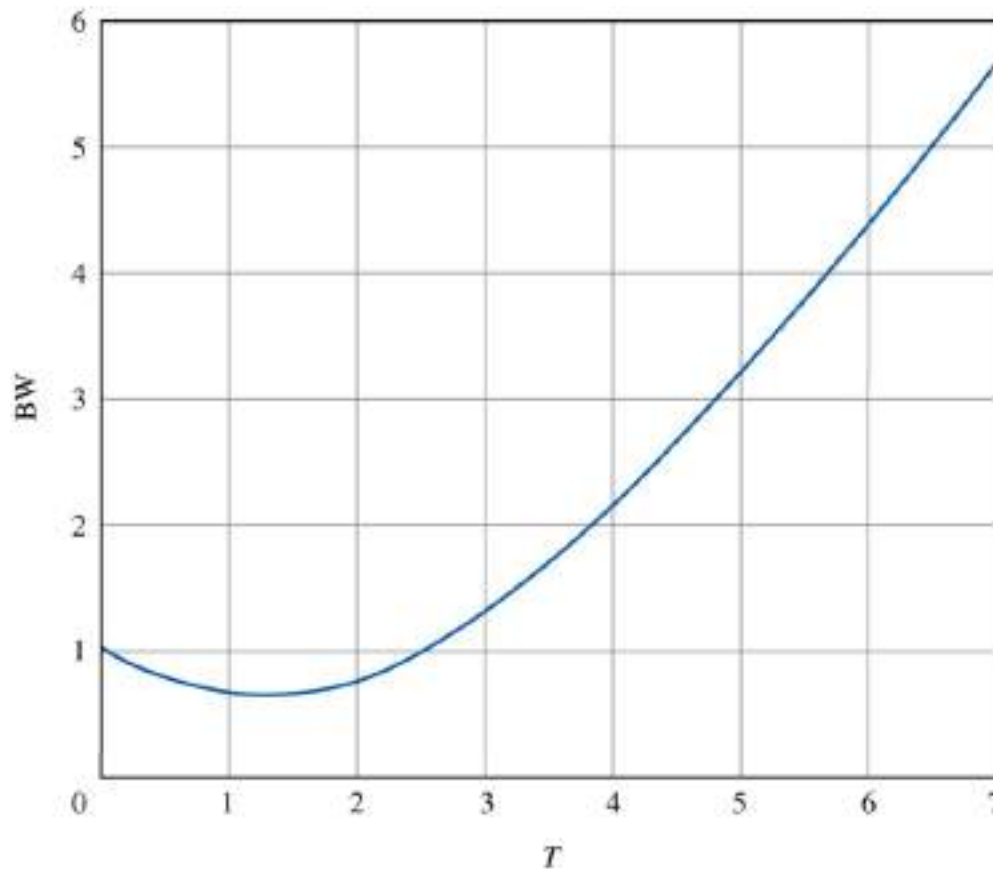
- 페루프 전달함수

$$M(s) = \frac{\omega_n^2 (1 + Ts)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + T\omega_n^2)s + \omega_n^2} \quad (8-32)$$

$$\text{BW} = \left(-b + \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4\omega_n^4} \right)^{1/2} \quad (8-33)$$

$$b = 4\zeta^2\omega_n^2 + 4\zeta\omega_n^3T - 2\omega_n^2 - \omega_n^4T^2 \quad (8-34)$$

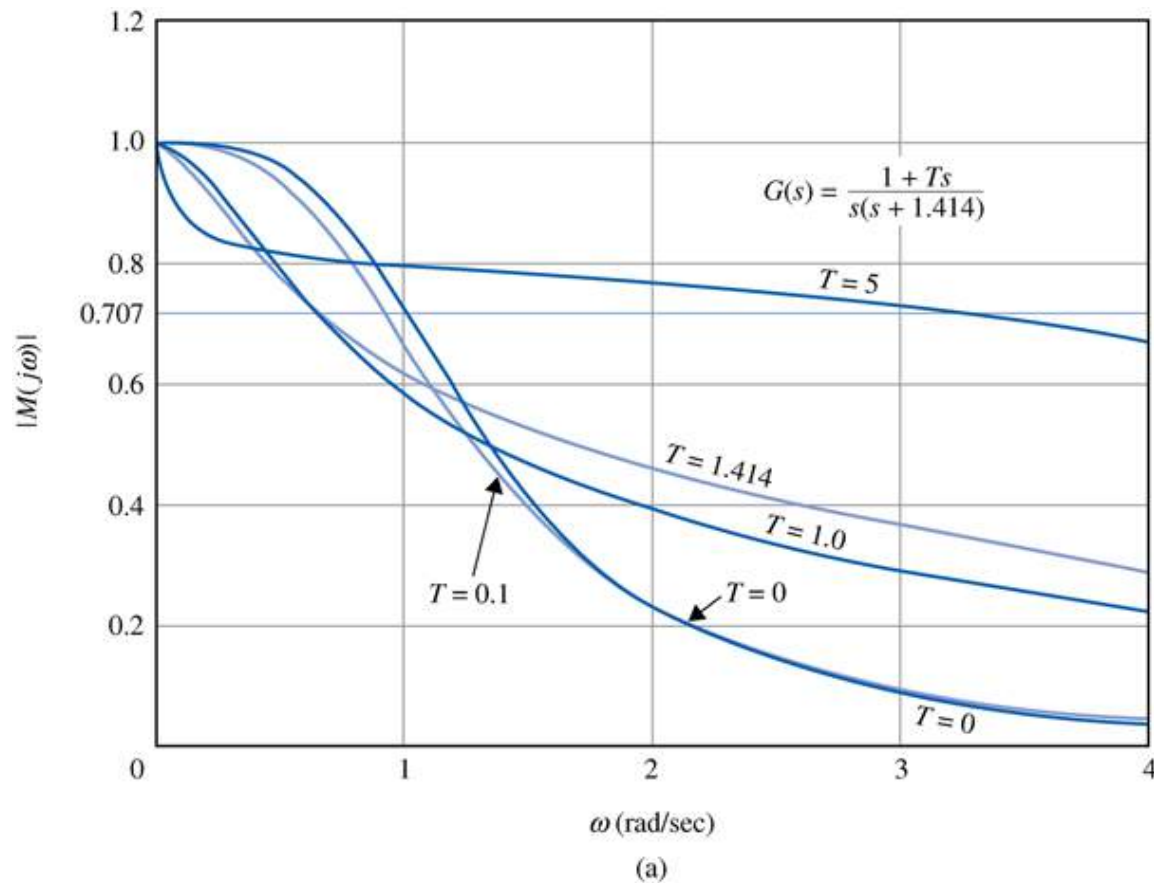
전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과



[그림 8-8] 개루프 전달함수 $G(s) = (1 + T_s)/[s(s + 1.414)]$ 인 2차 시스템의 대역폭.

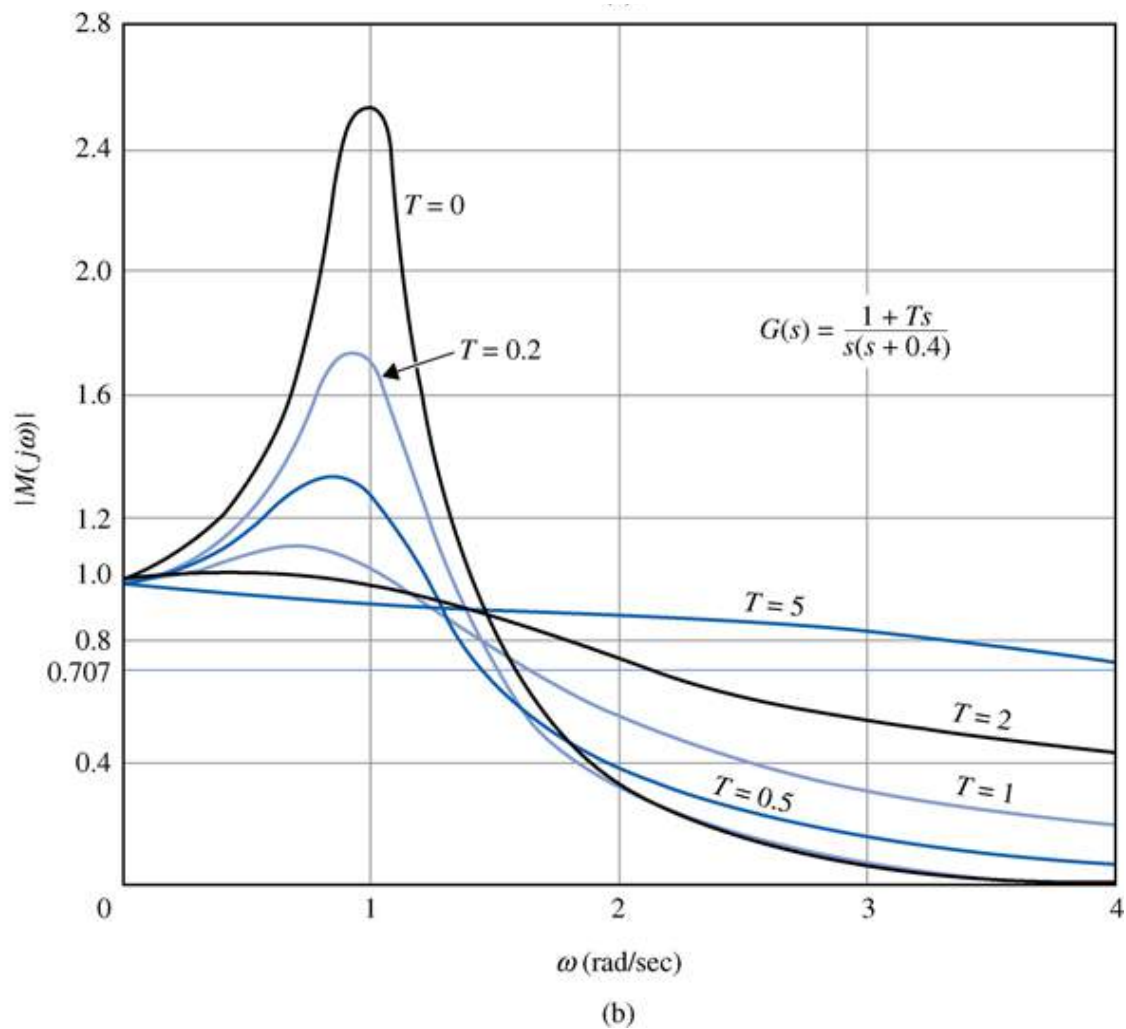
- 전방경로 전달함수에 하나의 영점을 추가하면 페루프 시스템의 대역폭을 증가시키는 일반적인 효과가 있다.

전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과



[그림 8-9] 전방경로 전달함수가 식 (8-31)의 $G(s)$ 인 2차 시스템의 진폭특성. (a) $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.707$.

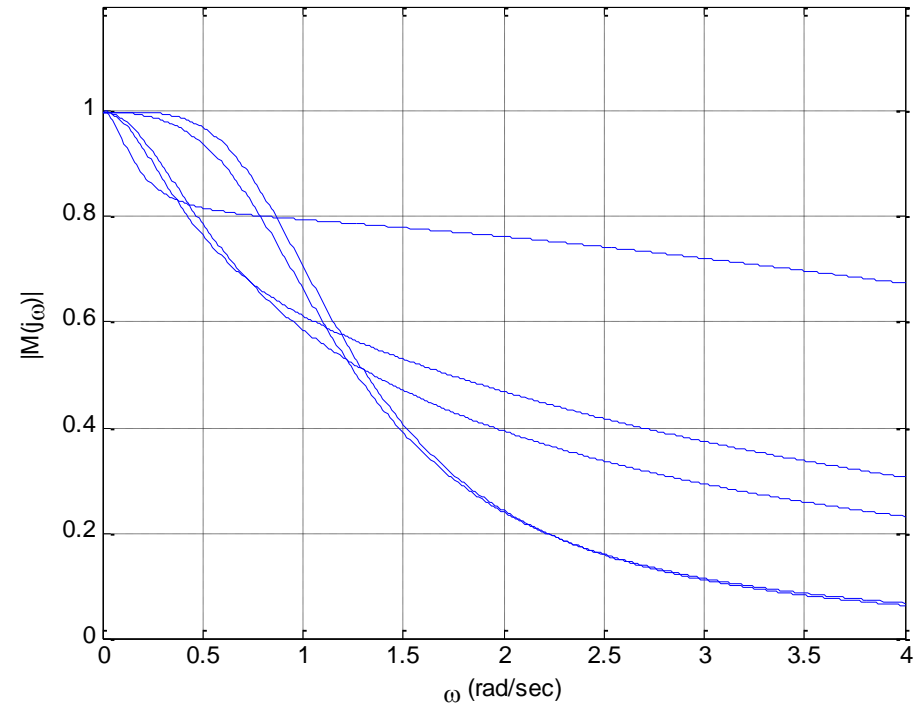
전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과



[그림 8-9] 전방경로 전달함수가 식 (8-31)의 $G(s)$ 인 2차 시스템의 진폭특성. (b) $\omega_n = 1, \zeta = 0.2$.

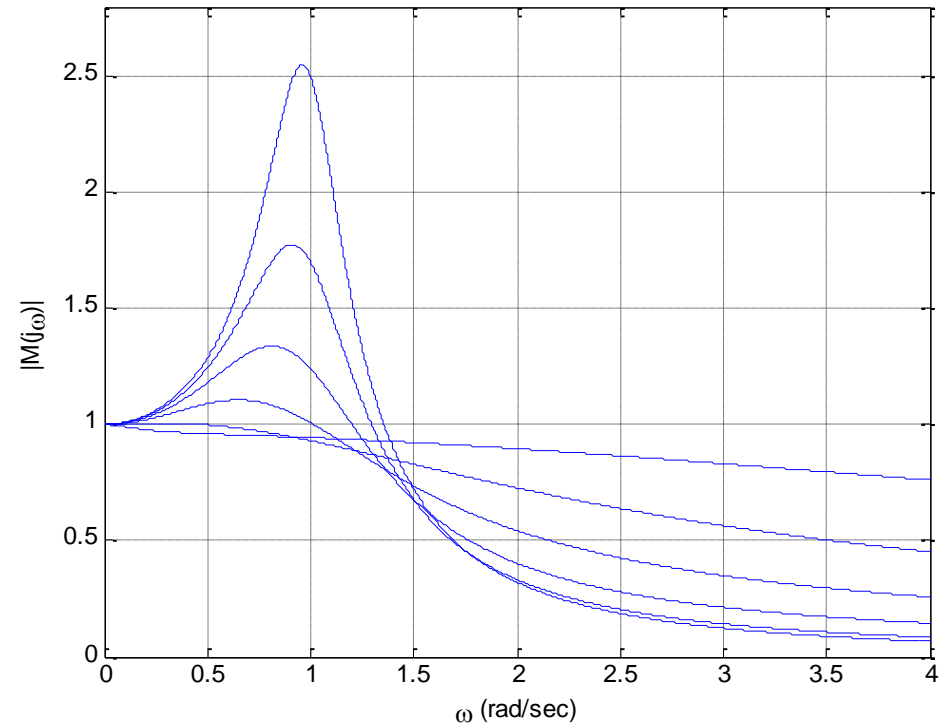
전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과

```
%Toolbox 8-3-1
%MATLAB statements for Fig. 8-9(a)
clear all
i=1;T=[5 1.414 1 0.1 0];zeta=0.707;
for w=0:0.01:4
    t=1; s=j*w;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    i=i+1;
end
w=0:0.01:4;
for i = 1:length(T)
    plot(w,M(i,:),:);
    hold on;
end
xlabel('\omega (rad/sec)');ylabel('|M(j\omega)|');
axis([0 4 0 1.2]);
grid
```



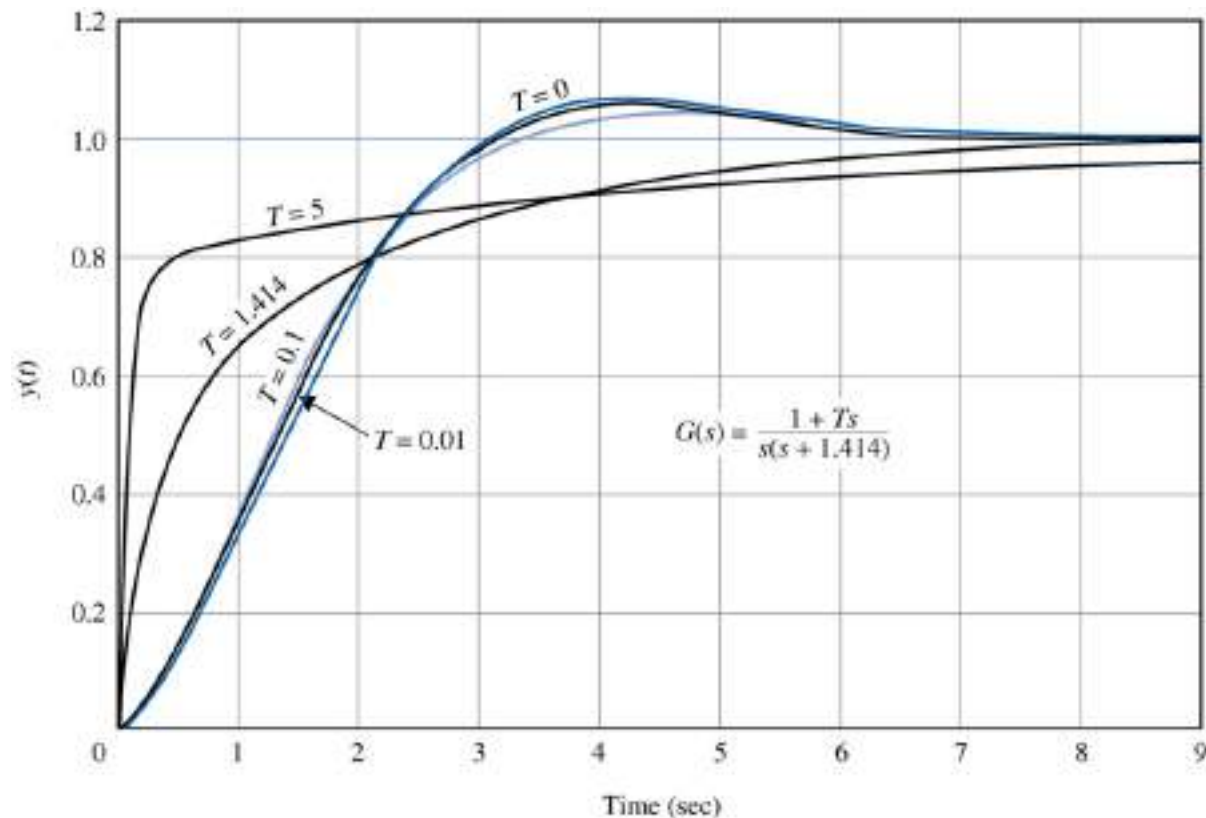
전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과

```
%Toolbox 8-3-1
%MATLAB statements for Fig. 8-9(b)
clear all
i=1;
T=[0 0.2 5 2 1 0.5];
zeta=0.2;
for w=0:0.001:4
    t=1;
    s=j*w;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    M(t,i) = abs((1+(T(t)*s))/(s^2+(2*zeta+T(t))*s+1));t=t+1;
    i=i+1;
end
w=0:0.001:4; TMP_COLOR = 1;
for i = 1:length(T)
    plot(w,M(i,:),:);
    hold on;
end
xlabel('\omega (rad/sec)');
ylabel('|M(j\omega)|');
axis([0 4 0 2.8]);
grid
```



전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과

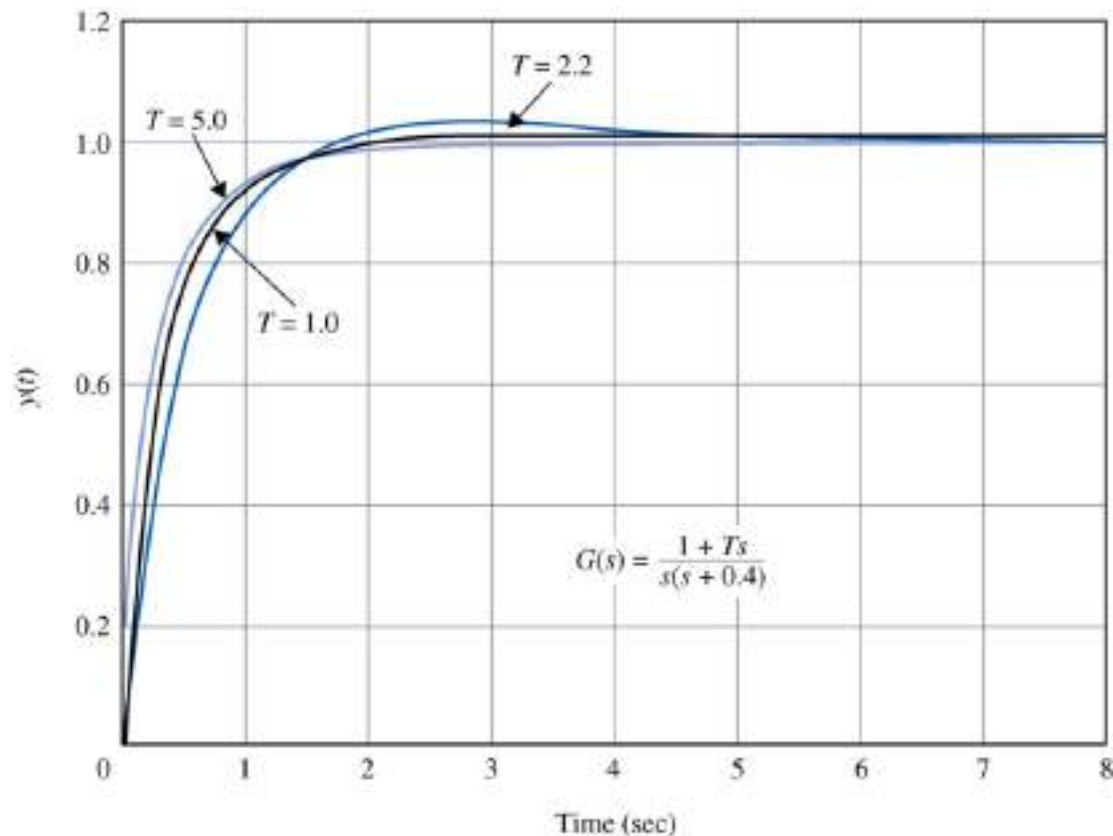
- 페루프시스템에 대응하는 단위계단응답



[그림 8-10] 전방경로 전달함수가 $G(s)$ 인 2차 시스템의 단위계단응답.

전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과

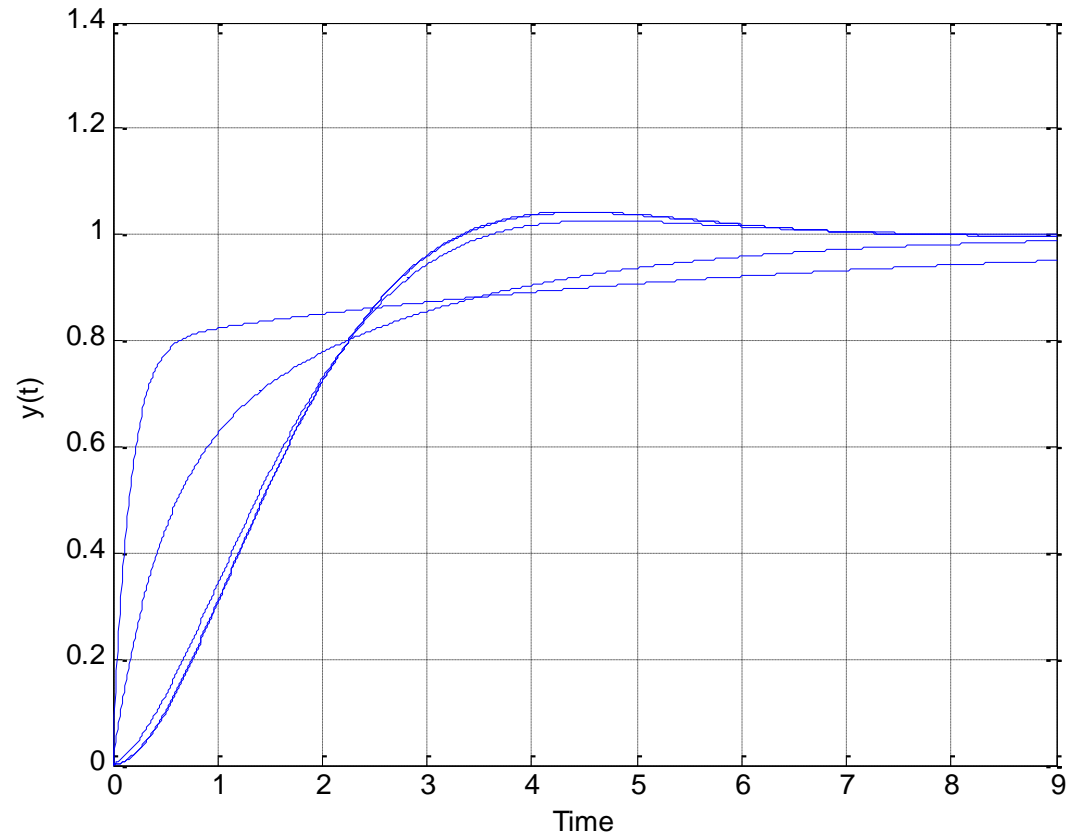
- 페루프시스템에 대응하는 단위계단응답



[그림 8-11] 전방경로 전달함수가 $G(s)$ 인 2차 시스템의 단위계단응답.

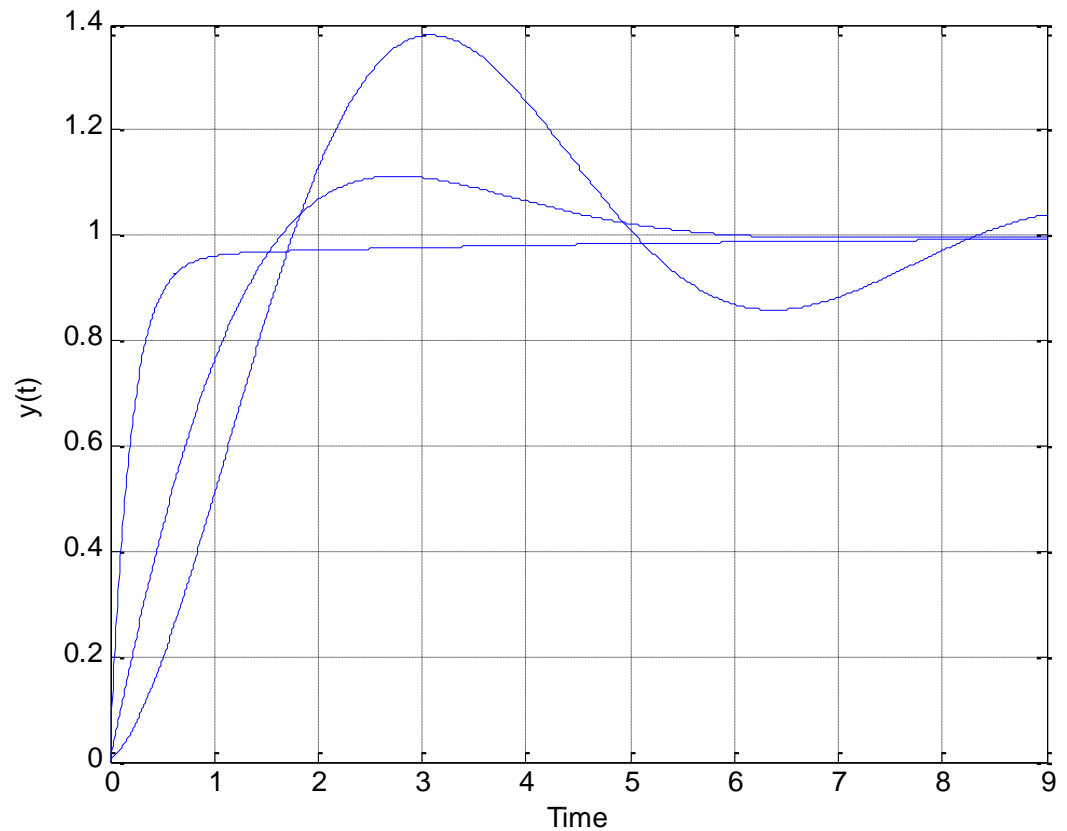
전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과

```
%Toolbox 8-3-2
%MATLAB statements for Fig. 8-10 ? use clear all, close
all, and clc if necessary
T=[5 1.414 0.1 0.01 0];
t=0:0.01:9;
zeta = 0.707;
for i=1:length(T)
    num=[T(i) 1];
    den = [1 2*zeta+T(i) 1];
    M(i,:)=step(num,den,t);
end
TMP_COLOR = 1;
for i = 1:length(T)
    plot(t,M(i,:));
    hold on;
end
xlabel('Time');
ylabel('y(t)');
grid
```



전방경로 전달함수에 영점 추가의 효과

```
%Toolbox 8-3-3
%MATLAB statements for Fig. 8-11 ? use clear all, close
all, and clc if necessary
T=[1 5 0.2];
t=0:0.01:9;
zeta = 0.2;
for i=1:length(T)
    num=[T(i) 1];
    den = [1 2*zeta+T(i) 1];
    M(i,:)=step(num,den,t);
end
for i = 1:length(T)
    plot(t,M(i,:));
    hold on;
end
xlabel('Time');
ylabel('y(t)');
grid
```

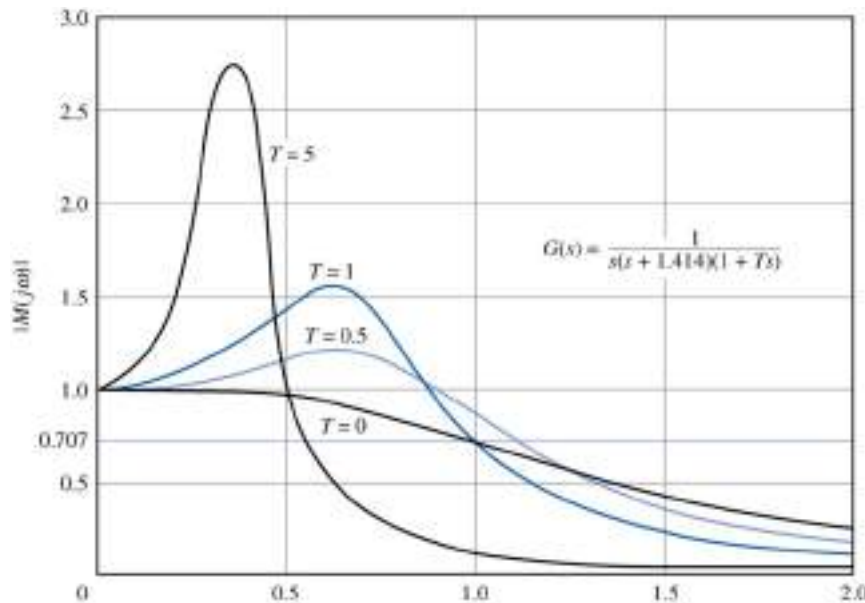


전방경로 전달함수에 극 추가의 효과

- 식(8-30)의 전방경로 전달함수에 $s = -1/T$ 인 극을 추가

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)(1 + Ts)} \quad (8-35)$$

- 그림 8-12 는 $\omega_n = 1$ 및 $\zeta = 0.707$ 과 여러 가지 T 에서 ω 에 대한 $|M(j\omega)|$

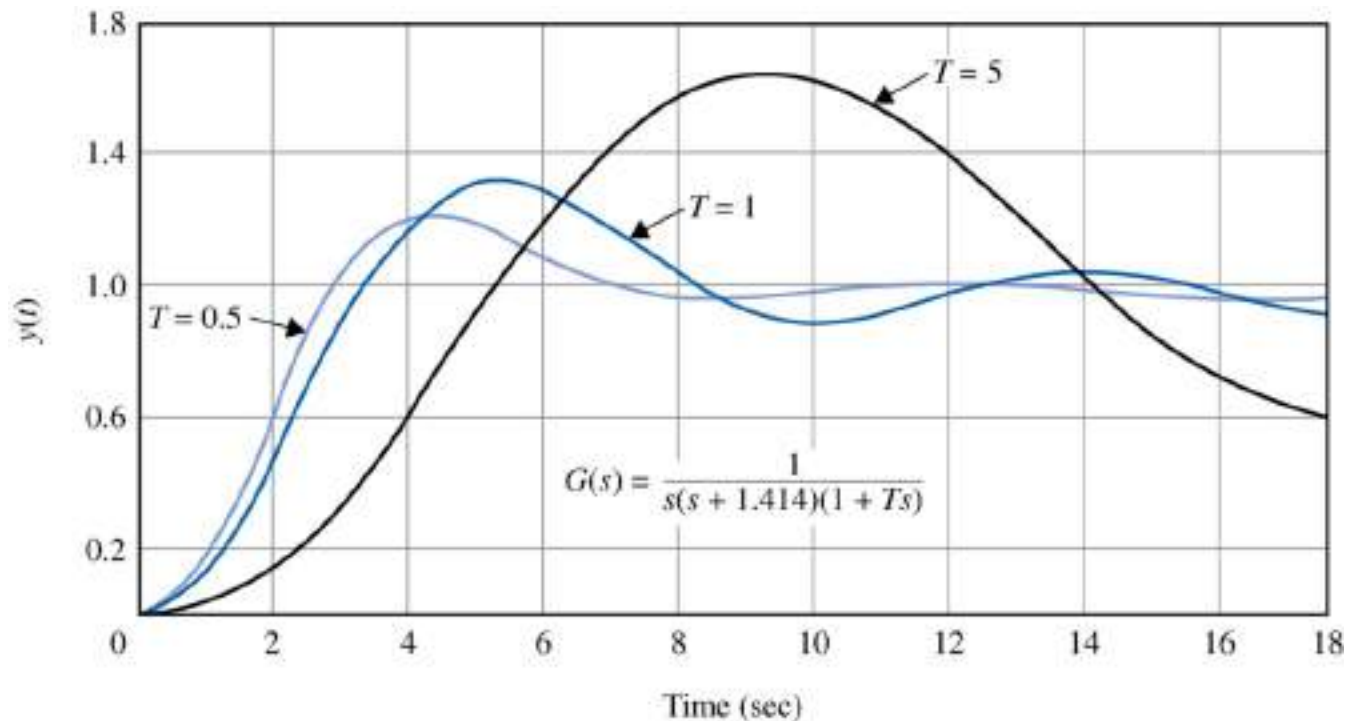


[그림 8-12] 전방경로 전달함수 $G(s)$ 인 3차 시스템의 진폭특성.

- $\omega_n = 1, \zeta = 0.707$ 일 때 T 가 양수인 모든 값에서 시스템은 안정
- T 에서 ω 에 대한 $|M(j\omega)|$ 곡선 :
 - T 가 작은 값일 때 극을 추가
 - 대역폭이 약간 증가
 - M_r 을 증가
 - T 가 커지면 $G(s)$ 에 추가된 극
 - 대역폭을 감소
 - M_r 을 증가
- 전방경로 전달함수에 한 극을 추가
 - 폐루프 시스템을 덜 안정시키고
 - 대역폭을 감소시킴

전방경로 전달함수에 극 추가의 효과

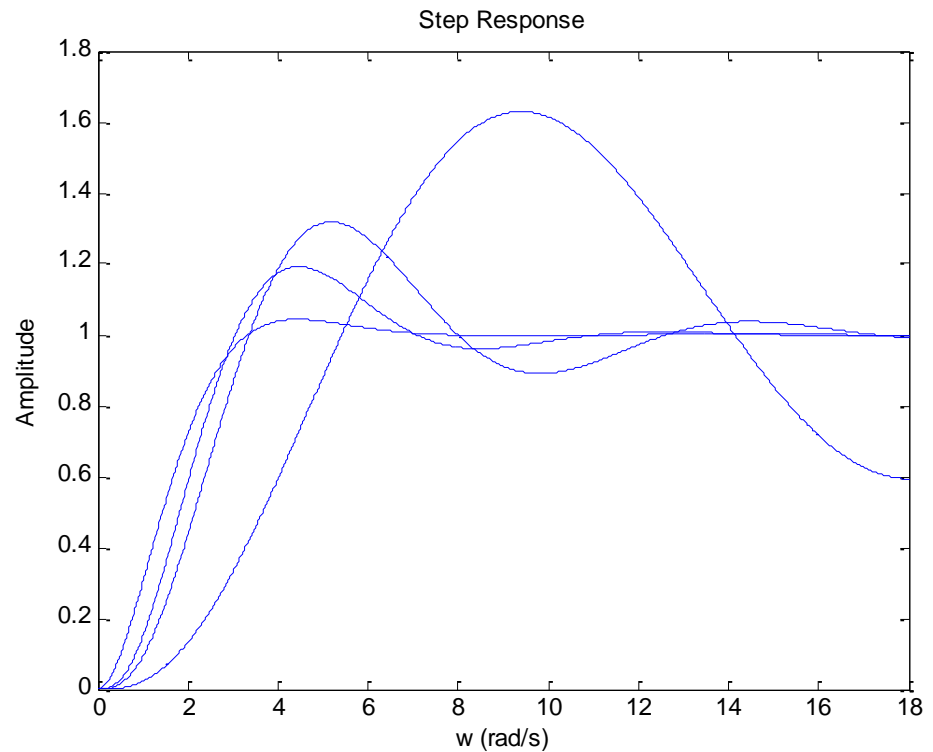
- 단위계단응답
 - 상승시간은 대역폭이 감소할 때 증가
 - M_r 의 큰 값은 단위계단응답의 더 큰 최대오버슈트에 대응



[그림 8-13] 전방경로 전달함수가 $G(s)$ 인 3차 시스템의 단위계단응답.

전방경로 전달함수에 극 추가의 효과

```
%Toolbox 8-4-1
%MATLAB statements for Fig. 8-12 ? use clear all, close
all, and clc if necessary
clear all;
wn=1;
zeta=0.707;
for T=[0 0.5 1 5];
    num=[wn^2];
    den=conv([1 0],[1 2*zeta*wn]);
    den=conv(den,[T 1]);
    [nc,dc]=feedback(num,den,1,1,-1);
    t=linspace(0,18,1001); %time vector
    y=step(nc,dc,t); %step response for basic system
    plot(t,y);
    hold on
end
xlabel('w (rad/s)');
ylabel('Amplitude');
title('Step Response');
```



Nyquist 의 안정도 판별법 : 기본사항

- $L(s)$ 의 Nyquist 선도
 - $\text{Re} |L(j\omega)|$ 에 대한 $\text{Im} |L(j\omega)|$ 의 ω 극 좌표계에서 ω 를 0 에서 ∞ 까지 변화시킬 때 $L(j\omega)$
- 특징
 1. Nyquist 판별법은 Routh-Hurwitz 판별법과 마찬가지로 절대안정도를 제공하며 아울러 안정한 시스템의 상대안정도에 관한 정보와 불안정한 시스템의 불안정성 정도를 제공한다. 또한 필요한 경우 시스템의 안정도를 개선하는 방안을 제시한다.
 2. $G(s)H(s)$ 또는 $L(s)$ 의 Nyquist 선도는 특히 컴퓨터의 도움을 받아 쉽게 얻을 수 있다.
 3. $G(s)H(s)$ 의 Nyquist 선도는 M_r , ω_r , BW 등의 주파수영역의 특성에 대한 정보를 쉽게 제공한다.
 4. Nyquist 선도는 Routh-Hurwitz 판별법에서는 다룰 수 없고 근궤적법으로 해석하기 어려운 순수시간지연을 갖는 시스템에 적용할 수 있다.

안정도 문제

- SISO 시스템의 폐루프 전달함수

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad (8-36)$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots(1+T_ms)}{s^p(1+T_as)(1+T_bs)\cdots(1+T_ns)}e^{-T_d s} \quad (8-37)$$

- T : 실수 또는 공액복소수인 계수
- T_d : 실시간 지연

- 특성방정식의 근 : $1+G(s)H(s)$ 의 영점

$$\Delta(s) = 1+G(s)H(s) = 0 \quad (8-38)$$

- 다중루프를 갖고 있는 폐루프 시스템에서 $M(s)$ 의 분모

$$\Delta(s) = 1+L(s) = 0 \quad (8-39)$$

- $L(s)$: 루프 전달함수

안정도 문제

- 여러 가지 시스템의 전달함수들의 극과 영점관계

- 극과 영점

- 루프 전달함수 영점 : $L(s)$ 의 영점
 - 루프 전달함수 극 : $L(s)$ 의 극
 - 폐루프 전달함수 극 : $1 + L(s)$ 의 영점 = 특성방정식의 근
 - $1 + L(s)$ 의 극 = $L(s)$ 의 극

- 안정도 조건

- 개루프 안정도

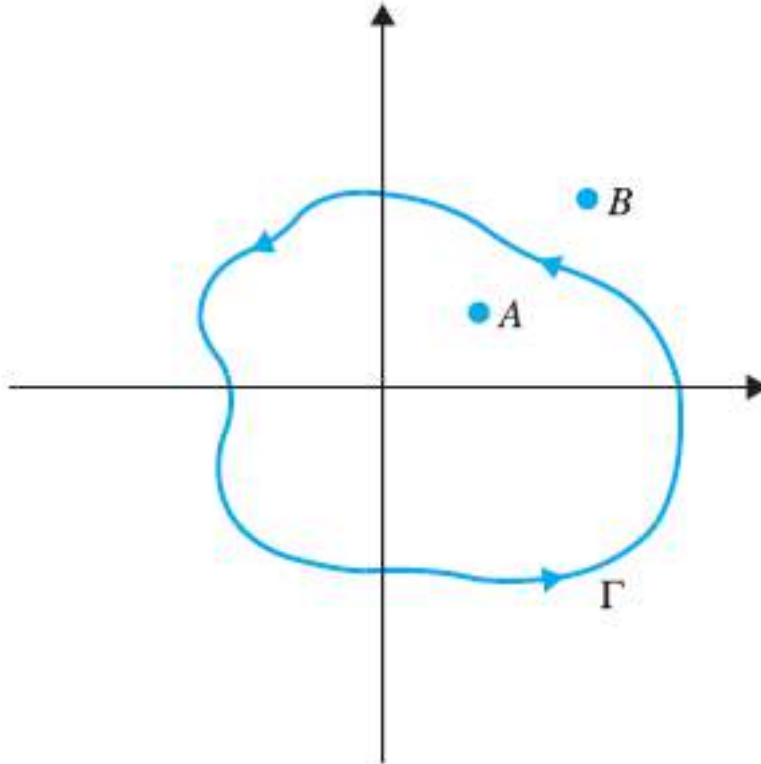
- 루프 전달함수 $L(s)$ 의 모든 극들의 s 평면 좌반면에 있으면 개루프 안정인 시스템
 - 단일루프 시스템에서 루프가 어디서 열리더라도 안정인 것과 등가

- 폐루프 안정도

- 폐루프 전달함수의 극 또는 $1 + L(s)$ 의 영점들이 모두 s 평면 좌반면에 있으면 폐루프 안정 또는 간단히 안정
 - 고의로 $s = 0$ 에 놓은 극이나 영점을 갖는 시스템은 예외

일주와 포함의 정의

- 일주
 - 복소평면 상에서 한 점이나 영역이 폐경로의 내부에 위치하면 그 영역은 폐경로에 의하여 일주되었다고 말한다.

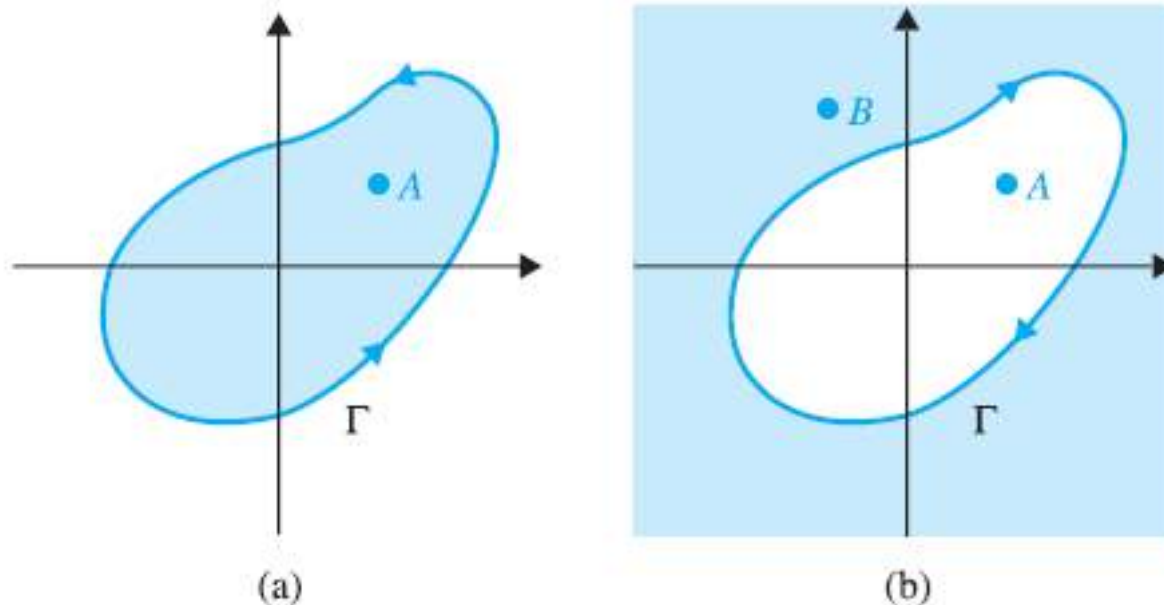


[그림 8-14] 일주의 정의.

일주와 포함의 정의

- 포함

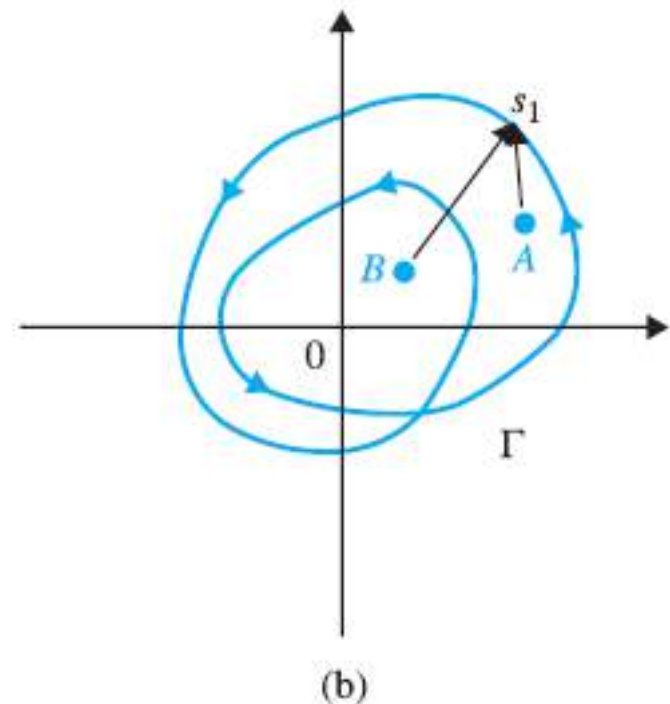
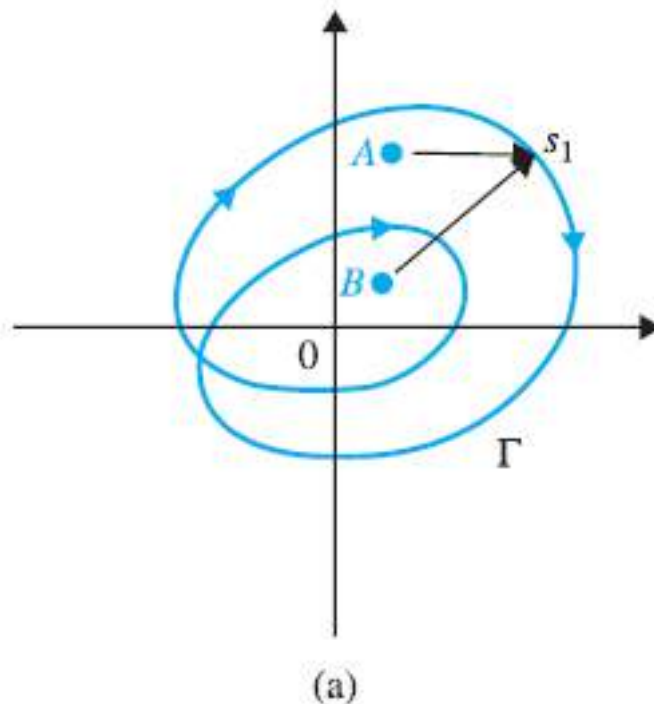
- 한 점이나 영역이 폐경로가 어떤 방향으로 진행할 때 반시계방향으로 일주되었다거나 경로의 왼쪽에 놓여 있을 때 이들은 폐경로에 포함되어 있다고 말한다.



[그림 8-15] 포함된 점과 영역. (a) Γ 가 A 를 포함한다. (b) 궤적 Γ 가 점 A 는 포함하지 않고 B 는 포함한다.

일주와 포함의 횟수

- N : 한 점이 폐경로 Γ 에 의해 일주되었을 때 일주되어 있는 횟수
- 점 A: 시계방향으로 Γ 에 의해 한 번 일주: 2π rad
- 점 B: 시계방향으로 두 번 일주: 4π rad

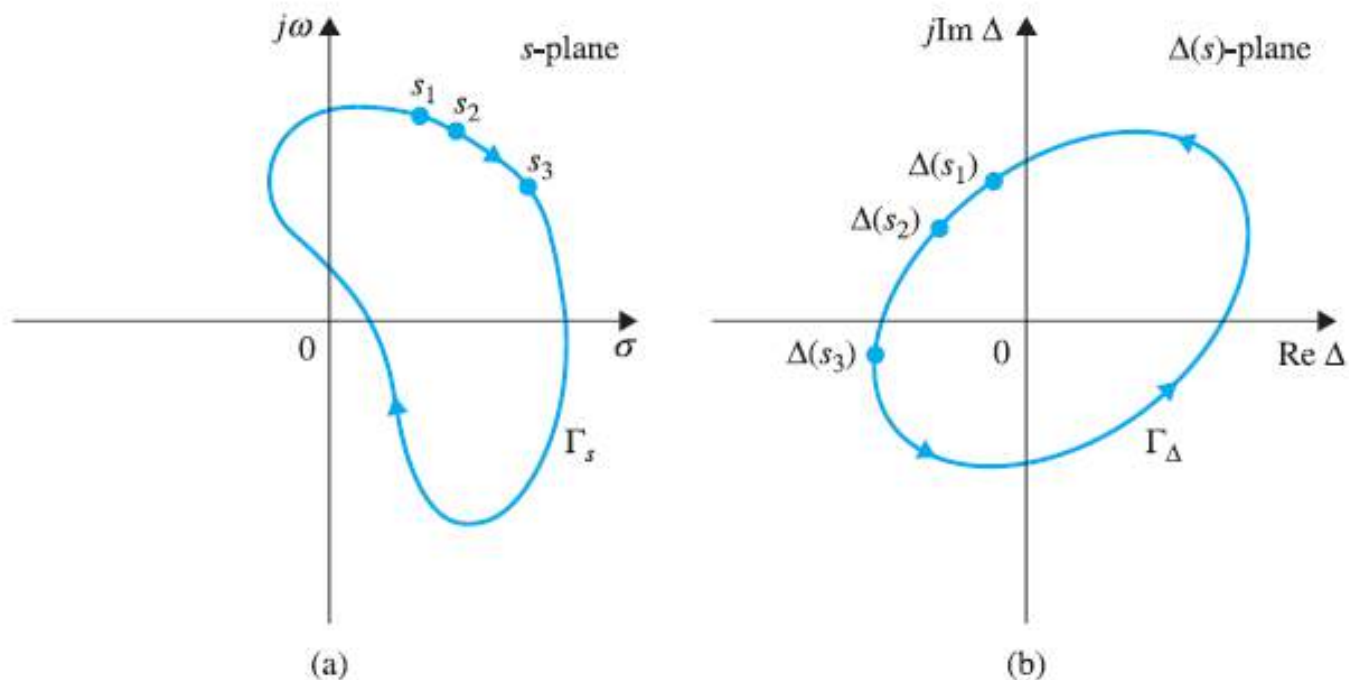


[그림 8-16] 일주와 포함 횟수의 정의.

- 점 A: Γ 에 의해 한 번 포함
- 점 B: 두 번 포함

편각의 원리

$\Delta(s)$ 가 단가함수로서 s 평면에서 유한 개의 극들을 갖고 있다고 하자. 임의의 폐경로 Γ_s 를 s 평면에서 선택하되 그 경로는 $\Delta(s)$ 의 어떤 극이나 영점을 통과하지 않는다고 가정한다. $\Delta(s)$ 평면에 사상되는 대응하는 Γ_Δ 궤적은 Γ_s 평면의 궤적 Γ_s 에 의해 일주되는 $\Delta(s)$ 의 극수와 영점수의 차이와 같은 수만큼 원점을 일주할 것이다.



[그림 8-17] (a) s 평면에서 임의로 택한 폐경로. (b) $\Delta(s)$ 평면에서 대응하는 궤적 Γ_s .

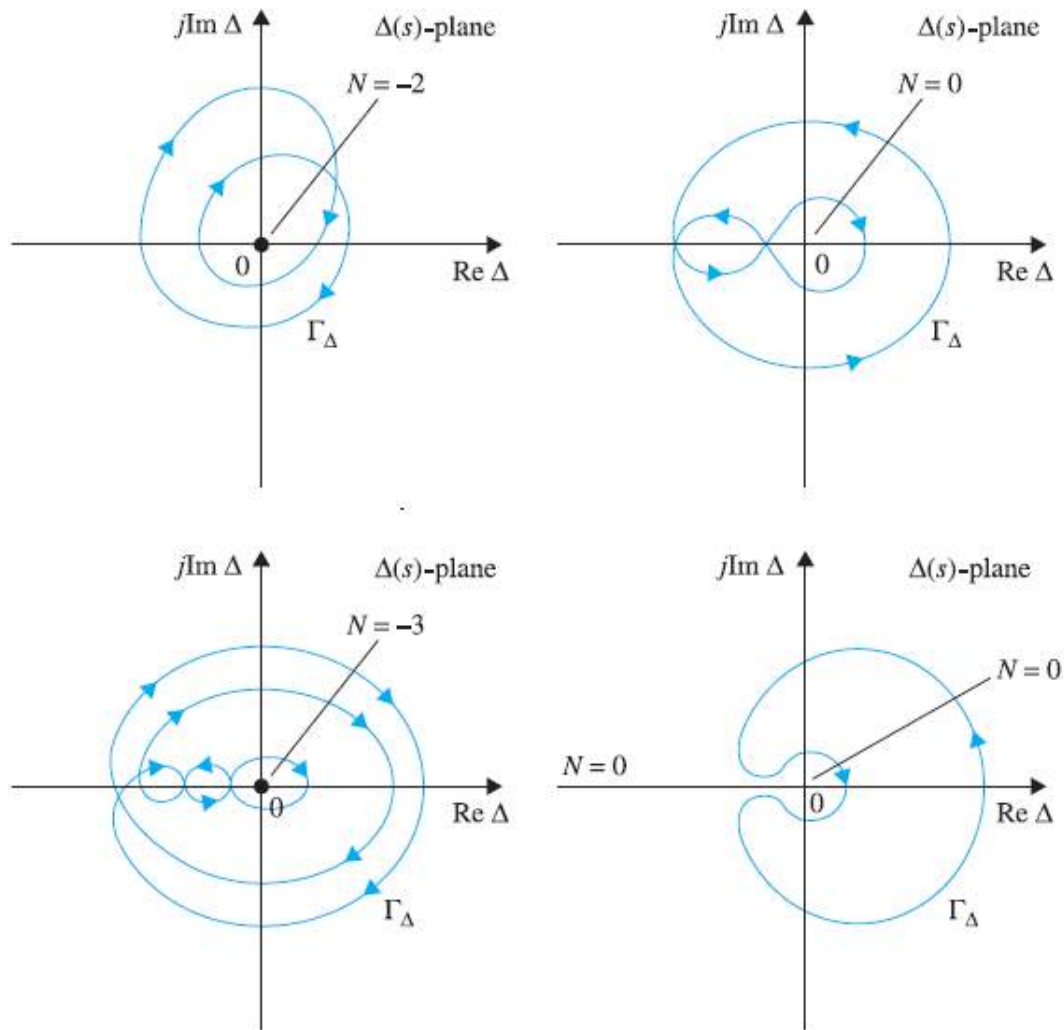
편각의 원리

• $N = Z - P$ (8-42)

- N : $\Delta(s)$ 평면의 궤적 Γ_Δ 가 원점을 일주한 횟수
- Z : s 평면에서 s 평면의 궤적 Γ_s 가 $\Delta(s)$ 의 영점을 일주한 횟수
- P : s 평면에서 s 평면의 궤적 Γ_s 가 $\Delta(s)$ 의 극을 일주한 횟수

1. $N > 0 (Z > P)$. 정해진 방향에 따라(시계방향 또는 반시계방향) s 평면 궤적이 $\Delta(s)$ 의 극보다 더 많은 영점을 일주하면 N 은 양의 정수가 된다. 이 경우에 $\Delta(s)$ 평면의 궤적 Γ_Δ 는 Γ_s 의 방향과 동일한 방향으로 $\Delta(s)$ 평면 원점을 N 회 일주할 것이다.
2. $N = 0 (Z = P)$. s 평면 궤적이 $\Delta(s)$ 의 영점과 같은 수의 극을 일주하든가 영점과 극을 하나도 일주하지 않으면 $\Delta(s)$ 평면 궤적 Γ_Δ 는 $\Delta(s)$ 평면의 원점을 일주하지 않을 것이다.
3. $N < 0 (Z < P)$. s 평면 궤적이 $\Delta(s)$ 의 영점보다 더 많은 수의 극을 어떤 방향으로 일주하면 N 은 음의 정수가 된다. 이 경우 $\Delta(s)$ 평면 궤적 Γ_Δ 는 Γ_s 의 방향과는 반대 방향으로 원점을 N 회 일주할 것이다.

편각의 원리



[그림 8-18] $\Delta(s)$ 평면에서 N 을 결정하는 예.

편각의 원리

- 임계점 : $\Delta(s)$ 평면의 원점 : 원점으로부터 N 의 값을 결정

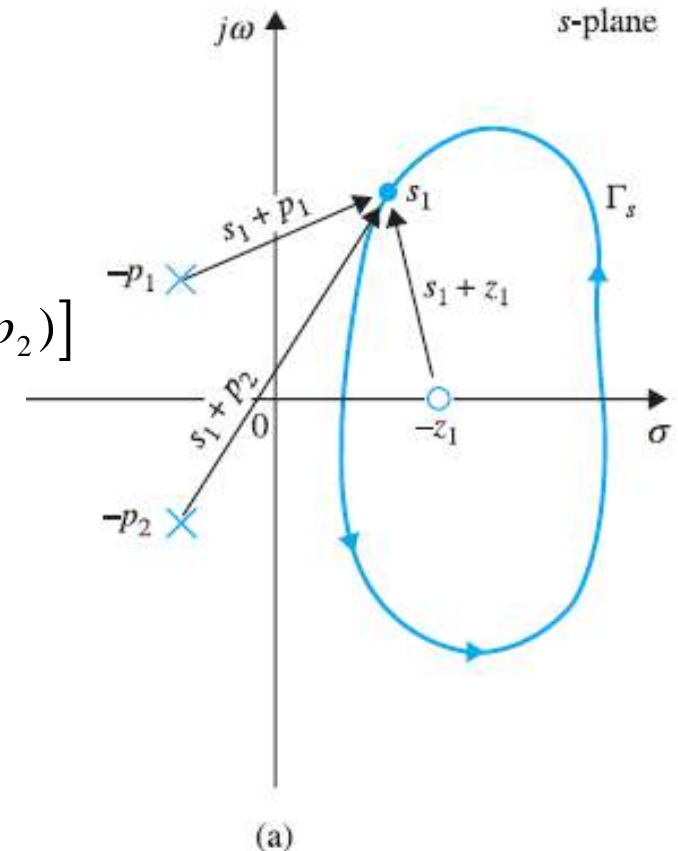
$$\Delta(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad (8-43)$$

- $\Delta(s)$ 의 극점과 영점이 그림 8-19(a) 와 같다고 가정하면,

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= |\Delta(s)| \angle \Delta(s) \\ &= \frac{K |s+z_1|}{|s+p_1| |s+p_2|} [\angle(s+z_1) - \angle(s+p_1) - \angle(s+p_2)] \end{aligned} \quad (8-44)$$

- $s = s_1$ 에서의 함수 $\Delta(s)$

$$\Delta(s_1) = \frac{K(s_1+z_1)}{(s_1+p_1)(s_1+p_2)} \quad (8-45)$$



[그림 8-19] (a) 식 (8-44)의 $\Delta(s)$ 의 극-영점 배치 및 s 평면 궤적 Γ_s .

편각의 원리

- 임계점 : $\Delta(s)$ 평면의 원점 : 원점으로부터 N 의 값을 결정

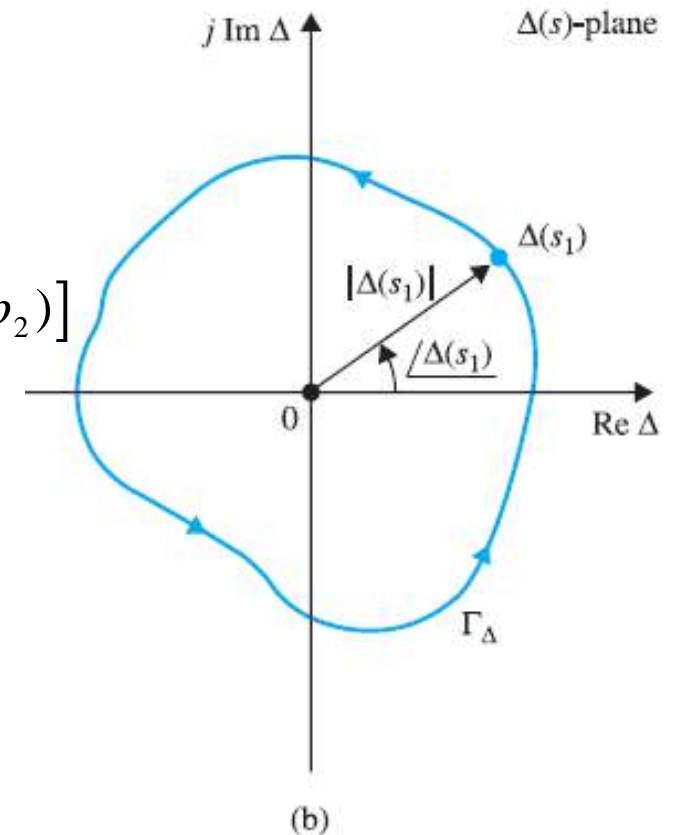
$$\Delta(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad (8-43)$$

- $\Delta(s)$ 의 극점과 영점이 그림 8-19(a) 와 같다고 가정하면,

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= |\Delta(s)| \angle \Delta(s) \\ &= \frac{K |s+z_1|}{|s+p_1||s+p_2|} [\angle(s+z_1) - \angle(s+p_1) - \angle(s+p_2)] \end{aligned} \quad (8-44)$$

- $s = s_1$ 에서의 함수 $\Delta(s)$

$$\Delta(s_1) = \frac{K(s_1+z_1)}{(s_1+p_1)(s_1+p_2)} \quad (8-45)$$



(b) 식 (8-44)로 Γ_s 궤적을 사상할 때 대응하는 $\Delta(s)$ 궤적.

편각의 원리

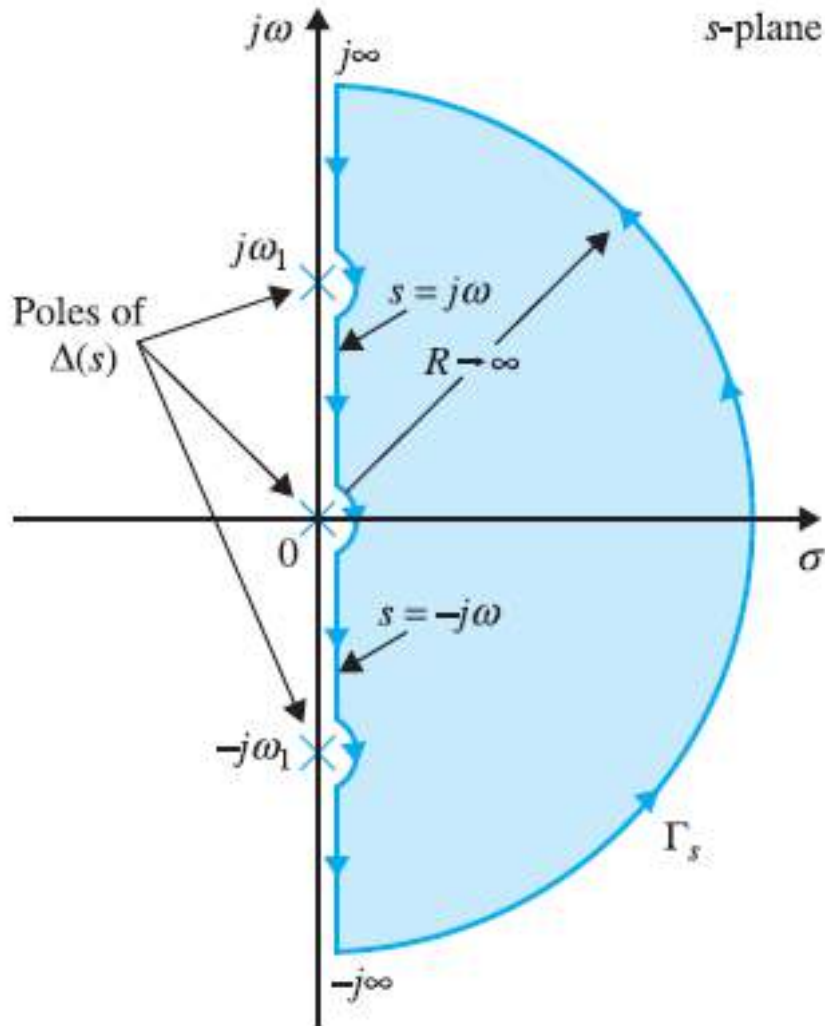
- s 평면 궤적 Γ_s 가 정해진 방향으로 한번 선회하면 $\Delta(s)$ 평면 궤적에 의해 선회하는 순수각

$$- 2\pi(Z - P) = 2\pi N \text{ radians} \quad (8-47)$$

[표 8-1] 편각원리의 모든 결과의 요약

Direction of $N = Z - P$ Encirclement	Sense of the s -plane Locus	$\Delta(s)$ -Plane Locus	
		Number of Encirclements of the Origin	Direction of Encirclement
$N > 0$	CW	N	CW
	CCW	N	CCW
$N < 0$	CW	N	CCW
	CCW	N	CW
$N = 0$	CW	0	No encirclement
	CCW	0	No encirclement

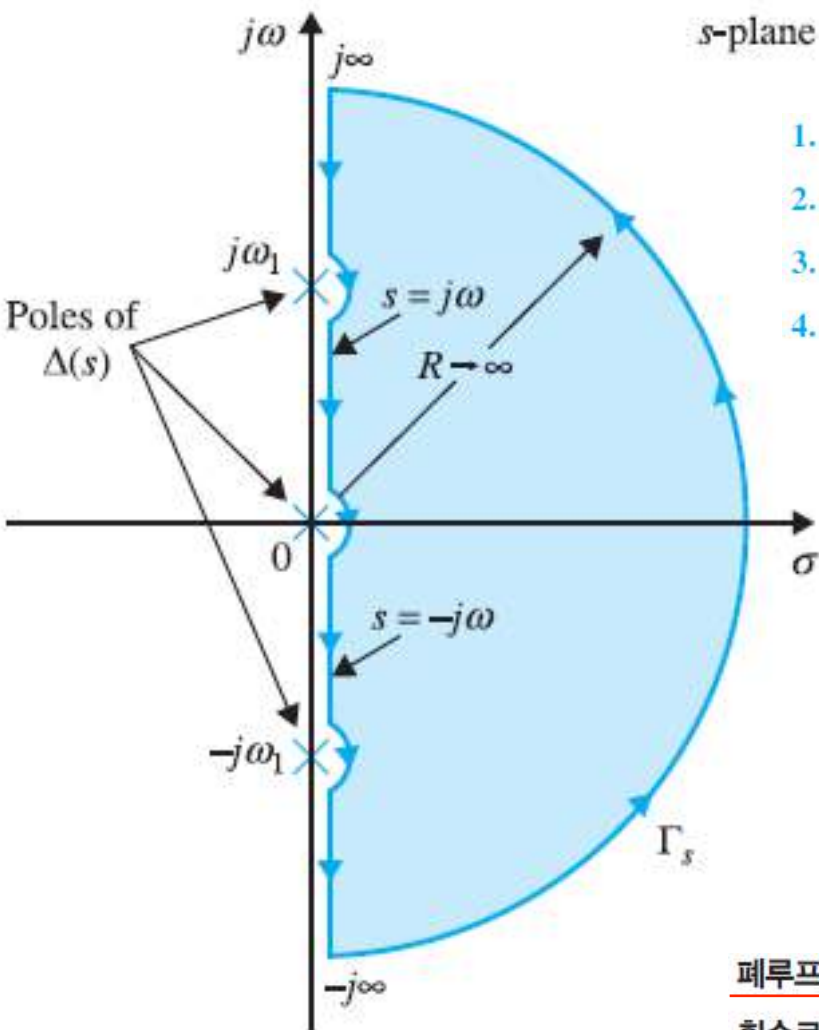
Nyquist 경로



- s 평면 폐적 Γ_s 가 s 평면 우반면 전체를 일주하도록 취한다면 안정도 문제를 푸는데 편각의 원리를 응용할 수 있다.

[그림 8-20] Nyquist 경로.

Nyquist 판별법과 $L(s)$ 또는 $G(s)H(s)$ 선도



1. 그림 8-20에서와 같이 s 평면 위에 Nyquist 경로 Γ_s 를 정의한다.
2. Nyquist 경로에 대응하는 $L(s)$ 선도를 $L(s)$ 평면에 구성한다.
3. N 의 값, 즉 $L(s)$ 선도에 의해 만들어진 $(-1, j0)$ 점 일주의 횟수를 헤아린다.
4. 식 (8-42)로부터 Nyquist 판별은 다음과 같다.

$$N = Z - P \quad (8-48)$$

여기서

$N = L(s)$ 선도에 의해 이루어진 $(-1, j0)$ 점 일주 횟수

$Z =$ Nyquist 경로 내(즉 s 평면 우반면)에 존재하는 $1 + L(s)$ 영점수

$P =$ Nyquist 경로 내(즉 s 평면 우반면)에 존재하는 $1 + L(s)$ 극수 $1 + L(s)$ 의 극수는 $L(s)$ 의 극수와 같음을 유의하라.

페루프 안정이기 위해서는 Z 가 0과 같아야 한다.

개루프 안정이기 위해서는 P 가 0과 같아야 한다.

$$N = -P \quad (8-49)$$

페루프시스템이 안정하려면 $L(s)$ 선도는 s 평면 우반면에 존재하는 $L(s)$ 극수와 같은 횟수로 $(-1, j0)$ 를 둘러싸야 하며 둘러쌀 때 방향은 (Γ_s 를 반시계방향으로 정의했다면) 시계방향이어야 한다.

Nyquist 판정법은 개루프전달함수의 정보를 이용하여, 폐루프 특성방정식이 s -평면의 우반면에 위치하는 불안정한 근의 수를 구함으로써 폐루프시스템의 안정성을 판정하는 방법이다. 이 방법을 증명은 복잡한 복소함수 이론들이 필요하므로 생략하고, 판정 방법만 요약하기로 한다.

$G(s)H(s)$ 의 Nyquist 선도는 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$Z=N+P$$

여기서, Z 는 s -우반면에 있는 특성방정식의 근의 수(불안정 폐루프극점의 수)를 나타내고, N 은 $G(s)H(s)$ 의 궤적이 점(-1,0)을 시계방향으로 감싸는 횟수를 나타내며, P 는 s -우반면에 있는 $G(s)H(s)$ 의 극점의 수(불안정 개루프극점의 수)를 나타낸다.

폐루프시스템이 안정하기 위해서는 특성방정식의 근이 모두 s -좌반면에 위치해야 한다. 위의 내용에 근거하여 안정성을 판별하는 방법을 Nyquist 안정성 판별법이라고 하는데, 이 방법에서 폐루프시스템 안정성에 대한 조건은 $Z=N+P=0$ 이며, 따라서 $N=-P$ 가 만족되어야 한다. 만약 개루프시스템 $G(s)H(s)$ 가 갖고 있는 불안정한 극점의 수가 2개일 경우에는 $P=2$ 이므로 폐루프시스템이 안정하려면 $N=-P=-2$ 가 되어야 한다. 여기서 N 은 s 가 $-j\infty$ 부터 $j\infty$ 까지 변할 때 $G(s)H(s)$ 의 Nyquist 선도가 복소평면에서 점(-1,0)을 시계방향으로 둘러싸는 횟수인데 $N=-2$ 는 반시계방향으로 두 번 감싸야 한다는 뜻이다. 만일 개루프시스템이 안정한 시스템이라면 $P=0$ 이므로 $N=-P=0$ 이 되어야 폐루프시스템의 안정성을 보장할 수 있으며, 따라서 $G(s)H(s)$ 의 Nyquist 선도가 점(-1,0)을 감싸지 않아야 한다.

최소위상 전달함수의 시스템에 대한 Nyquist 판별법

- 최소위상 전달함수

1. 최소위상 전달함수는 s 평면의 우반면과 원점을 제외한 $j\omega$ 축 위에는 극이나 영점을 갖지 않는다.
2. $s = 0$ 에 있는 극을 제외하고 m 개의 영점과 n 개의 극을 갖고 있는 최소위상 전달함수 $L(s)$ 에 대해서는 $L(j\omega)$ 의 ω 가 ∞ 에서 0 까지 바뀔 때 위상변화량이 $(n - m) \pi/2$ rad이다.
3. 최소위상 전달함수의 값은 영이 아닌 유한한 주파수에서 영이나 무한대가 될 수 없다.
4. 비최소위상 전달함수는 ω 가 무한대에서 영으로 변할 때 항상 더 많은 양의 위상변이를 갖는다. 즉 ω 를 영에서 무한대로 변화시킬 때 항상 더 많은 음의 위상변화를 갖는다.

최소위상함수 $L(s)$ 가 s 평면 우반면이나 $s = 0$ 를 제외하고는 $j\omega$ 축 위에 어떤 영점이나 극을 갖지 않으므로 $P = 0$ 이고 $\Delta(s) = 1 + L(s)$ 의 극도 역시 같은 성질을 갖는다. 따라서 $L(s)$ 가 최소위상 전달함수인 시스템에 대한 Nyquist 판별은

$$N = 0$$

(8-50)

최소위상 전달함수의 시스템에 대한 Nyquist 판별법

- 최소위상 전달함수

루프 전달함수 $L(s)$ 가 최소위상 형태로 된 폐루프시스템에 대해서는 *Nyquist* 경로에 대응하는 $L(s)$ 의 선도가 $L(s)$ 평면에서 임계점 $(-1, j0)$ 을 둘러싸지 않으면 이 시스템은 폐루프 안정이다.

최소위상 형태의 루프 전달함수 $L(s)$ 를 갖는 폐루프시스템에 대해서는 *Nyquist* 경로에 대응하는 $L(s)$ 선도가 $(-1, j0)$ 점을 포함하지 않으면 폐루프 안정이다. *Nyquist* 선도가 $(-1, j0)$ 점을 포함하면 시스템은 불안정이다.

적용예제 : Nyquist 판별 최소위상 전달함수

예제 8-8-1

단일루프 피드백 제어시스템의 루프 전달함수가

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)} \quad (8-58)$$

로 최소위상 형태라 하자. 폐루프시스템의 안정도는 $\omega = \infty$ 에서 $\omega = 0$ 까지 $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도가 $(-1, j0)$ 점을 포함하느냐를 조사하여 판정될 수 있다. $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도는 freqtool을 이용하여 그려도 된다. 그림 8-25 는 $\omega = \infty$ 에서 0까지에 대한 $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도를 보여 준다. 그러나 일반적으로 임계점의 포함 여부만이 관심의 대상이므로 정확한 Nyquist 선도를 만들어야 할 필요는 없다. Nyquist 경로 위의 $\omega = \infty$ 에서 $\omega = 0$ 까지에 대응하는 방향으로 진행하므로 Nyquist 선도에 포함되는 면은 곡선의 왼쪽이 되어 안정도를 결정하는 데 필요한 모든 것은 Nyquist 선도가 $L(j\omega)/K$ 평면의 실수축과 교차하는 점을 구하는 것이다. 많은 경우에 실수축과의 교차점과 $\omega = \infty$ 에서 $\omega = 0$ 에서 $L(j\omega)/K$ 의 성질들이 실제의 그림을 그리지 않고 Nyquist 선도를 개략적으로 그릴 수 있게 해 준다. $L(j\omega)/K$ 의 Nyquist 선도를 다음과 같은 단계로 그릴 수 있다.

적용예제 : Nyquist 판별 최소위상 전달함수

예제 8-8-1

1. $L(s)$ 에 $s = j\omega$ 를 대입한다.

식 (8-58)에서 $s = j\omega$ 로 놓으면

$$L(j\omega)/K = \frac{1}{j\omega(j\omega + 2)(j\omega + 10)} \quad (8-59)$$

을 얻는다.

2. 식 (8-59)에 $\omega = 0$ 를 대입하면 $L(j\omega)$ 의 영 주파수 성질을 얻는다.

$$L(j0)/K = \infty \angle -90^\circ \quad (8-60)$$

3. 식 (8-59)에 $\omega = \infty$ 를 대입하면 무한대 주파수에서의 Nyquist 선도의 성질이 구해진다.

$$L(j\infty)/K = 0 \angle -270^\circ \quad (8-61)$$

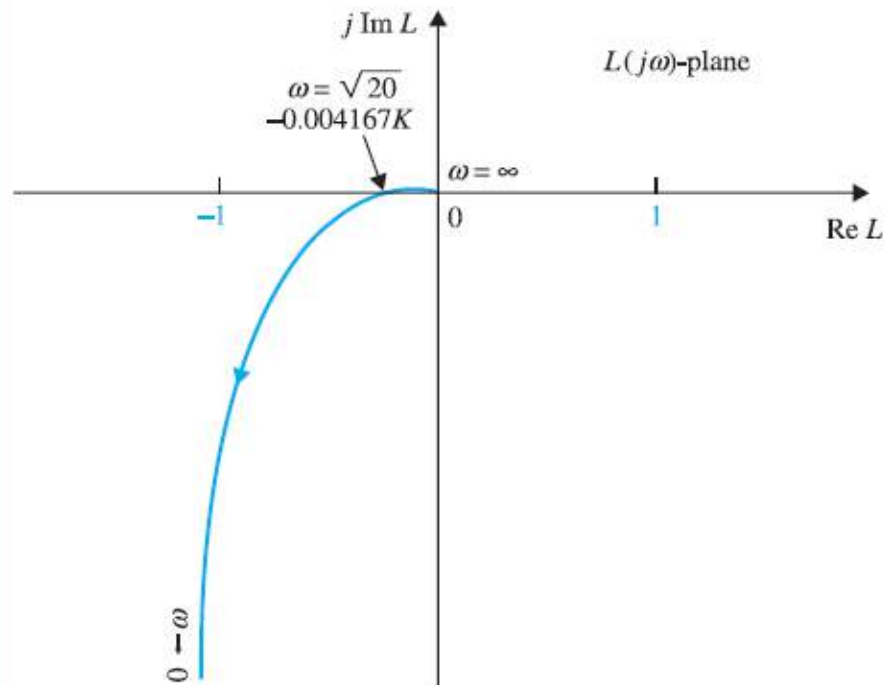
4. Nyquist 선도와 실수축의 교차점을 구하려면 $L(j\omega)/K$ 의 분모의 공액복소수를 분모와 분자에 곱하여 $L(j\omega)/K$ 를 유리화한다. 따라서 식 (8-59)는

$$\begin{aligned} L(j\omega)/K &= \frac{[-12\omega^2 - j\omega(20 - \omega^2)]}{[-12\omega^2 + j\omega(20 - \omega^2)][-12\omega^2 - j\omega(20 - \omega^2)]} \\ &= \frac{[-12\omega - j(20 - \omega^2)]}{\omega[144\omega^2 + (20 - \omega^2)]} \end{aligned} \quad (8-62)$$

이 된다.

적용예제 : Nyquist 판별 최소위상 전달함수

예제 8-8-1



[그림 8-25] $\omega = \infty$ 에서 $\omega = 0$ 까지에 대한 $L(s)/K = \frac{1}{s(s+2)(s+10)}$ 의 Nyquist 선도.

적용예제 : Nyquist 판별 최소위상 전달함수

예제 8-8-1

5. 실수축과의 교차점을 찾으려면 $L(j\omega)/K$ 의 허수부를 영으로 놓는다. 그 결과는 다음과 같다.

$$\text{Im}[L(j\omega)/K] = \frac{-(20 - \omega^2)}{\omega[144\omega^2 + (20 - \omega^2)]} = 0 \quad (8-63)$$

위 식의 해는 $\omega = \infty$, 이는 $L(j\omega)/K = 0$ 에서의 해가 됨을 알 수 있으며

$$\omega = \pm\sqrt{20} \text{ rad/sec} \quad (8-64)$$

이다. ω 는 양수이므로 맞는 답은 $\omega = \sqrt{20} \text{ rad/sec}$ 이다. 이 주파수를 식 (8-62)에 대입하면 $L(j\omega)$ 평면의 실수축과의 교차점은

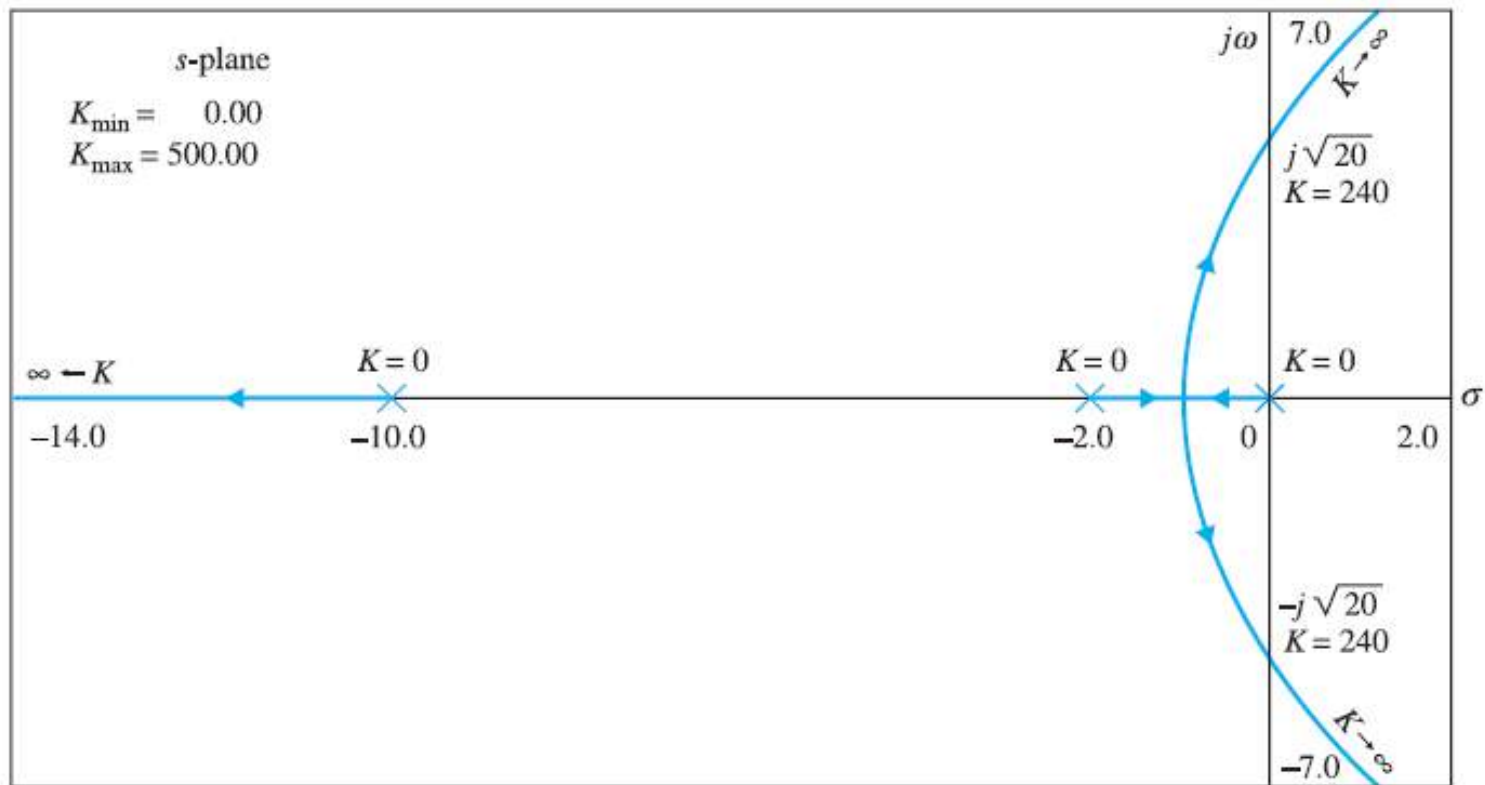
$$L(j\sqrt{20})/K = -\frac{12}{2880} = -0.004167 \quad (8-65)$$

에 있다. 이와 같은 다섯 단계는 $L(j\omega)/K$ 의 Nyquist 선도를 대략적으로 그릴 수 있게 해 준다. 따라서 K 가 240보다 작으면 실수축 위의 $L(j\omega)$ 궤적의 교차점은 임계점 $(-1, j0)$ 의 우측에 있게 된다. 임계점은 포함되지 않고 시스템은 안정이다. $K = 240$ 이면 $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도는 실수축의 -1 점과 교차할 것이고 시스템은 임계안정이 될 것이다. 이 경우 특성방정식은 s 평면의 $j\omega$ 축 $s = \pm j\sqrt{20}$ 에 두 근을 갖는다. 이득이 240보다 큰 값으로 증가하면 교차점은 실수축의 -1 점 좌측으로 되고 시스템은 불안정이 될 것이다. K 가 음수이면 임계점으로 $L(j\omega)$ 평면의 $(+1, j0)$ 점을 쓸 수 있다. 그림 8-25는 이러한 조건하에서 실수축 위의 $+1$ 점이 K 의 모든 음의 값에 대하여 포함될 것을 보여 주며 시스템은 항상 불안정이다. 따라서 Nyquist 판별법은 $0 < K < 240$ 의 범위 안에서 시스템이 안정하다는 결론을 이끌어 낸다. Routh-Hurwitz 판별법을 적용하여도 같은 결과를 이끌어 낸다.

적용예제 : Nyquist 판별 최소위상 전달함수

예제 8-8-1

그림 8-26은 식 (8-58)의 루프 전달함수의 시스템의 특성방정식에 대한 근궤적을 보여 준다. Nyquist 판별법과 근궤적 사이의 상관관계를 쉽게 관찰할 수 있다.

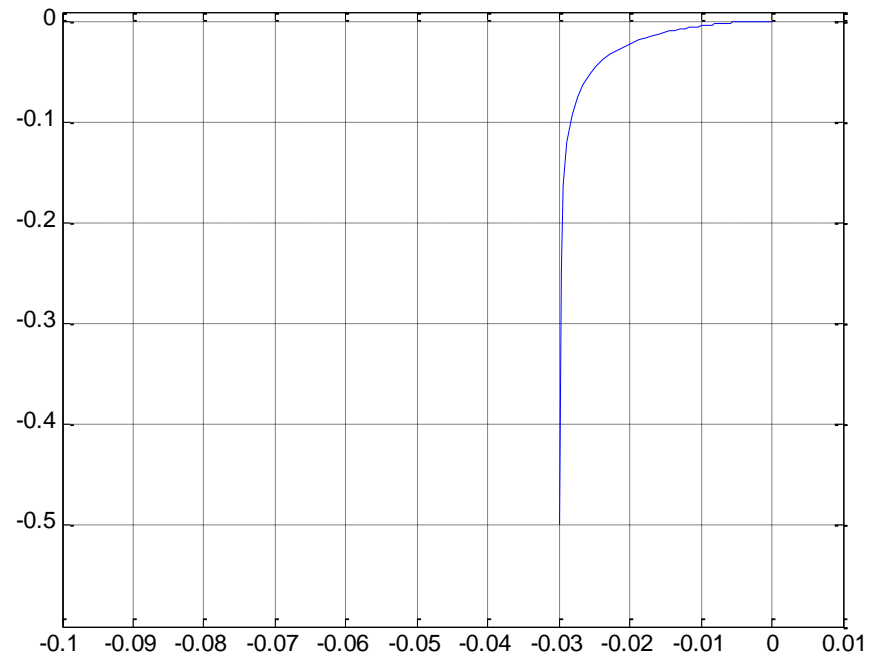


[그림 8-26] $L(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)}$ 의 근궤적.

적용예제 : Nyquist 판별 최소위상 전달함수

예제 8-8-1

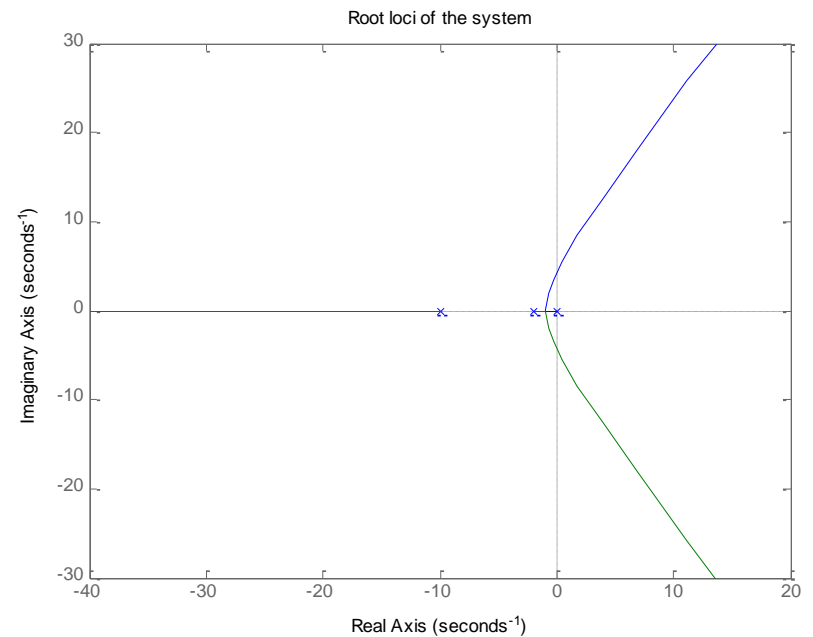
```
%Toolbox 8-8-1  
%MATLAB statements for Fig. 8-25  
w=0.1:0.1:1000;  
num = [1];  
den = conv(conv([1 10],[1,2]),[1 0]);  
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);  
plot(re,im);  
axis([-0.1 0.01 -0.6 0.01])  
grid
```



적용예제 : Nyquist 판별 최소위상 전달함수

예제 8-8-1

```
%Toolbox 8-8-2  
%MATLAB statements for Fig. 8-26  
den=conv([1 2 0],[1 10]);  
mysys=tf(.0001,den);  
rlocus(mysys);  
title('Root loci of the system');
```

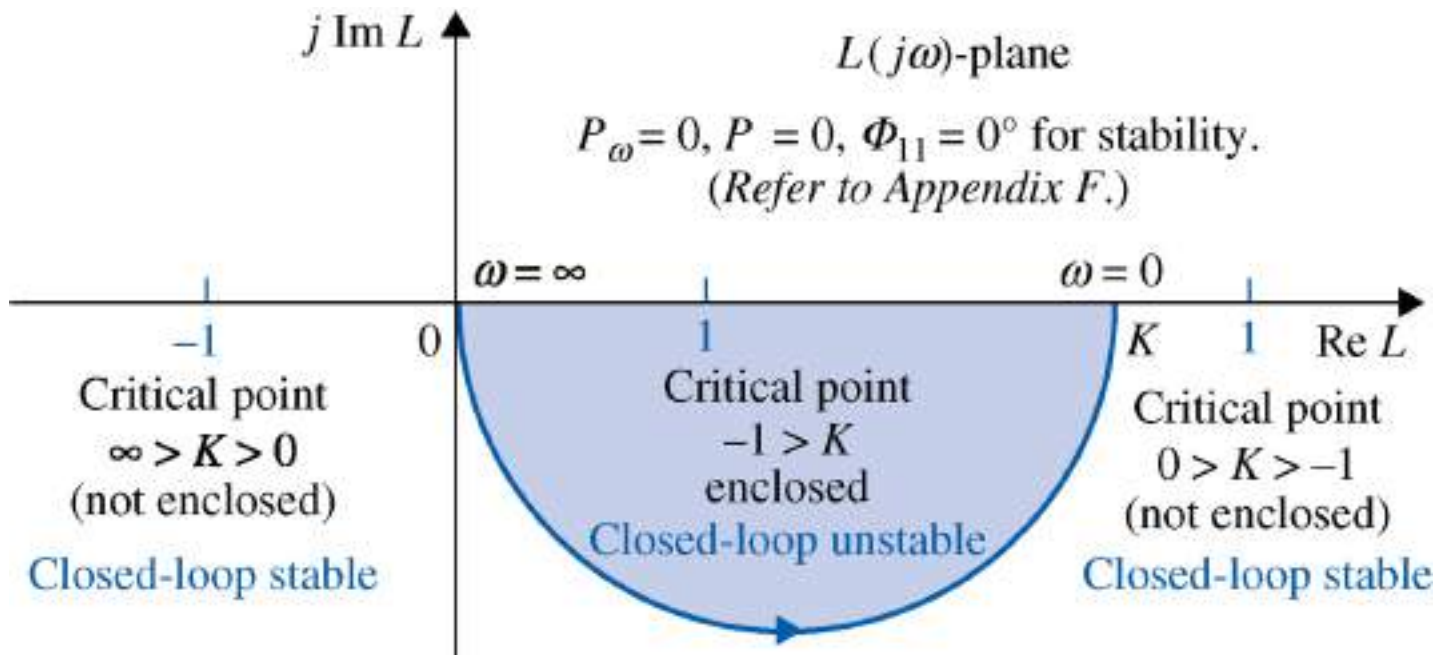


$L(s)$ 에 극과 영점을 추가할 때 Nyquist 선도에 미치는 영향

- 1차 시스템 전달함수

$$L(s) = \frac{K}{1+T_1s} \quad (8-74)$$

- T_1 : 양의 실수

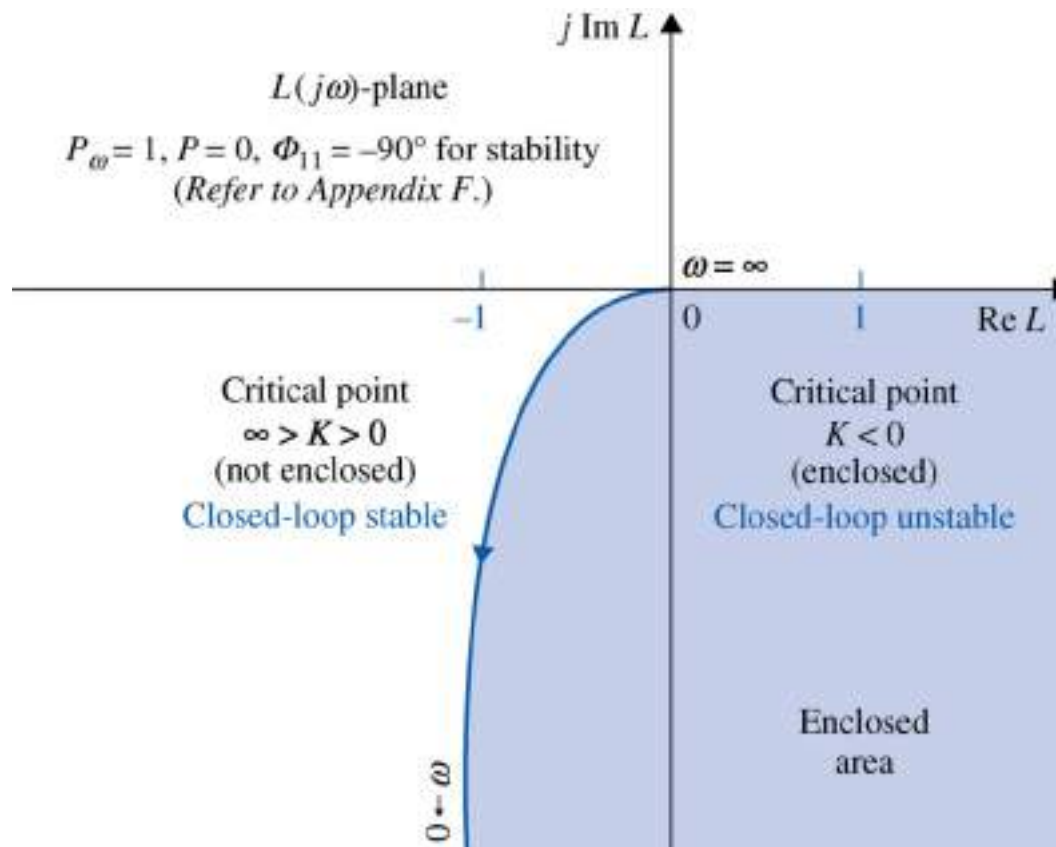


[그림 8-30] $L(s) = \frac{K}{(1+T_1s)}$ 의 Nyquist 선도.

$L(s)$ 에 극과 영점을 추가할 때 Nyquist 선도에 미치는 영향

- $s = 0$ 에 극 추가

$$L(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)} \quad (8-75)$$



$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L(j\omega) = -(p+1)90^\circ \quad (8-76)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle L(j\omega) = -p \times 90^\circ \quad (8-77)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L(j\omega)| = 0 \quad (8-78)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = \infty \quad (8-79)$$

$L(s)$ 에 극과 영점을 추가할 때 Nyquist 선도에 미치는 영향

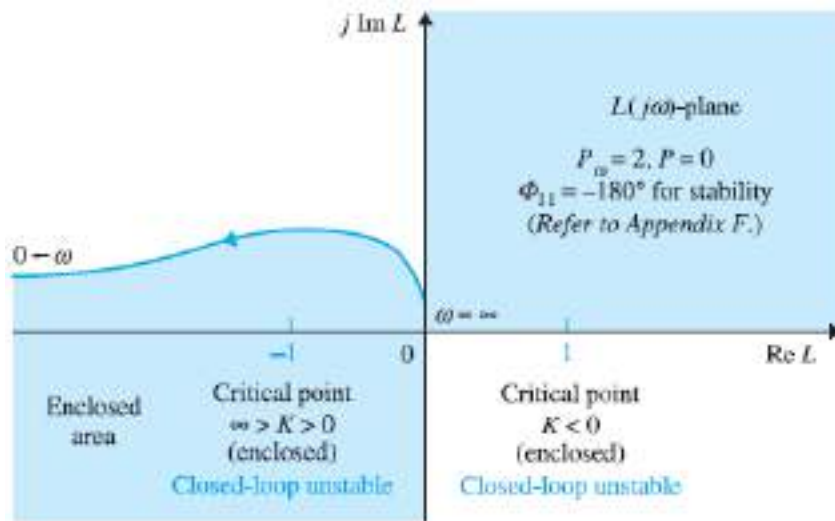
이런 도해로부터 루프 전달함수에 $s = 0$ 인 극을 추가하면 폐루프시스템의 안정도는 좋지 않은 영향을 받는다는 결론을 얻을 수 있다. $s = 0$ 에 하나보다 더 많은 극을 갖고 있는 루프 전달함수(형태 2 또는 더 고차의 형태)의 시스템은 불안정해지려 하고 안정시키기 어려워진다.

$$L(s) = \frac{K}{s^2(1 + T_1s)} \quad (8-80)$$

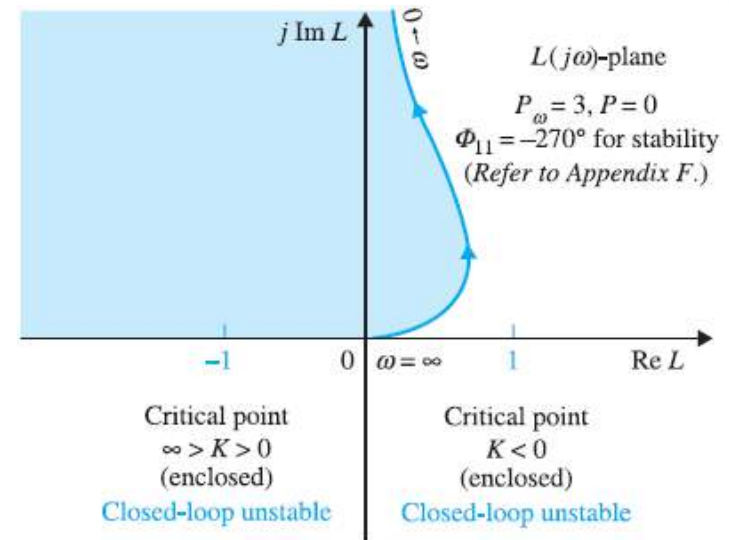
의 Nyquist 선도이며 안정도에 관한 임계점을 나타내고 있다. 그림 8-33에서는

$$L(s) = \frac{K}{s^3(1 + T_1s)} \quad (8-81)$$

에 관해 동일한 도해를 하였다.



[그림 8-32] $L(s) = \frac{K}{s^2(1 + T_1s)}$ 의 Nyquist 선도.



[그림 8-33] $L(s) = \frac{K}{s^3(1 + T_1s)}$ Nyquist 선도.

$L(s)$ 에 극과 영점을 추가할 때 Nyquist 선도에 미치는 영향

- 영(0)이 아닌 유한극의 추가

$$L(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (8-82)$$

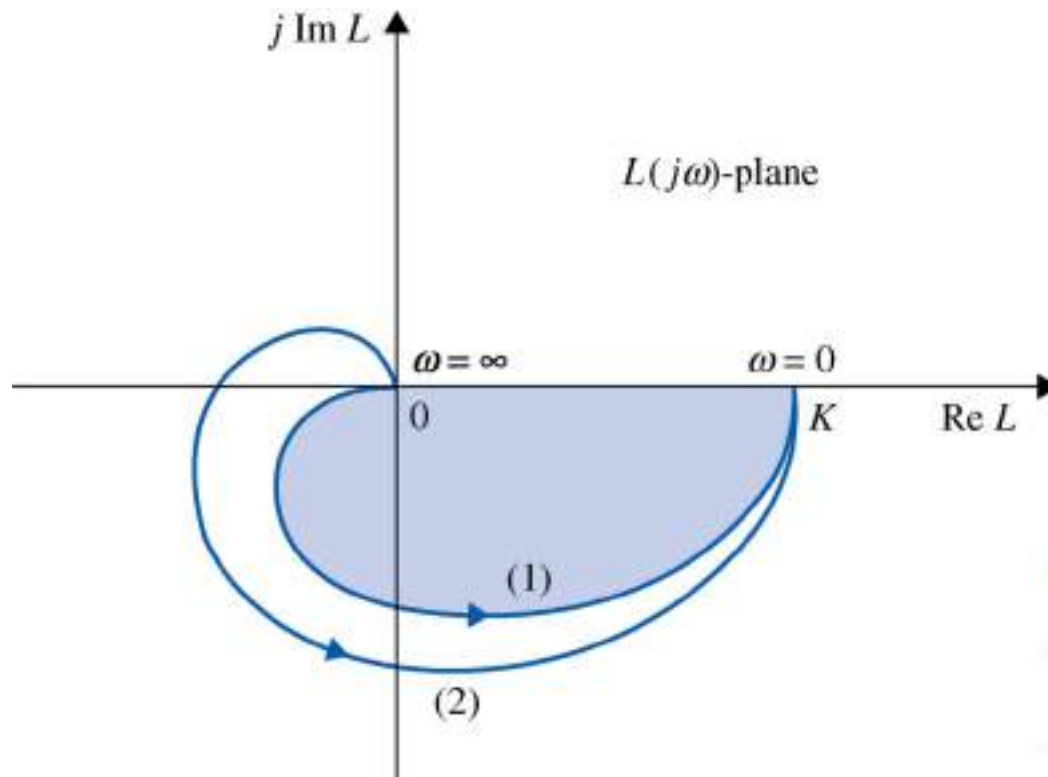


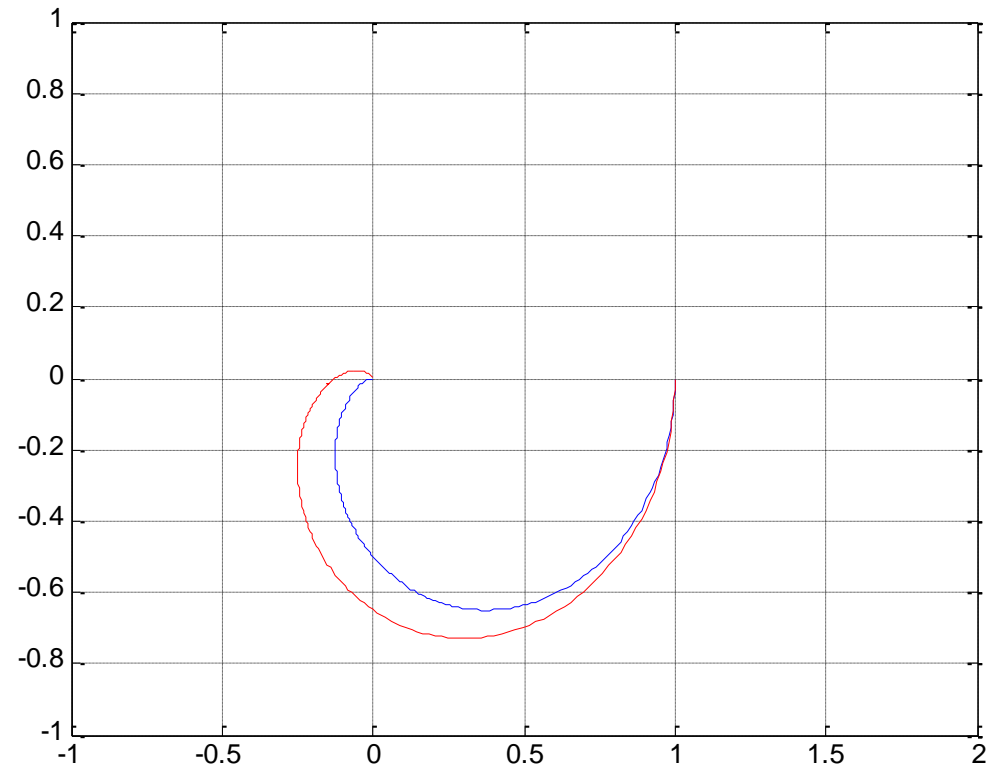
Figure 8-34 Nyquist plots. Curve (1):
 $L(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$, Curve (2):
 $L(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$.

$L(s)$ 에 극과 영점을 추가할 때 Nyquist 선도에 미치는 영향

- 영(0)이 아닌 유한극의 추가

```
%Toolbox 8-9-1
%MATLAB statements for Fig. 8-34
w=0:0.01:100;
num = [1];
den = conv([1 1],[1 1])
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im,'b');
hold on
den = conv(conv([1 1],[1 1]),[1 1])
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im,'r');
axis([-1 2 -1 1])
grid
```

```
w=0:0.01:100;
num = [1];
den = conv([1 1],[1 1])
mysys = tf(num, den);
[re,im,w] = nyquist(mysys,w);
plot(re,im,'b');
```



$L(s)$ 에 극과 영점을 추가할 때 Nyquist 선도에 미치는 영향

• 영점의 추가

예제 8-9-2

페루프 제어시스템의 루프 전달함수가

$$L(s) = \frac{K}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (8-86)$$

인 경우를 생각하자. 페루프시스템이 안정하기 위해서는

$$0 < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \quad (8-87)$$

임을 증명할 수 있다. 식 (8-86)의 전달함수에 $s = -1/T_d$ ($T_d > 0$)인 영점을 추가한다고 하자. 그러면

$$L(s) = \frac{K(1 + T_d s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (8-88)$$

이다. 식 (8-86)과 (8-88)의 두 전달함수의 Nyquist 선도를 그리면 그림 8-35와 같다. 식 (8-88)에서 영점의 효과는 식 (8-86)에서 $L(j\omega)$ 위상에 $\omega = 0$ 에서는 영향이 없으나 $\omega = \infty$ 에서는 90° 를 더해준 결과가 된다. $L(j\omega)$ 평면의 음의 실수축과의 교점은 $-KT_1 T_2 / (T_1 + T_2)$ 에서 $-K(T_1 T_2 - T_d T_1 - T_d T_2) / (T_1 + T_2)$ 로 이동되었다. 따라서 식 (8-88)의 루프 전달함수를 갖는 시스템은

$$0 < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 - T_d(T_1 + T_2)} \quad (8-89)$$

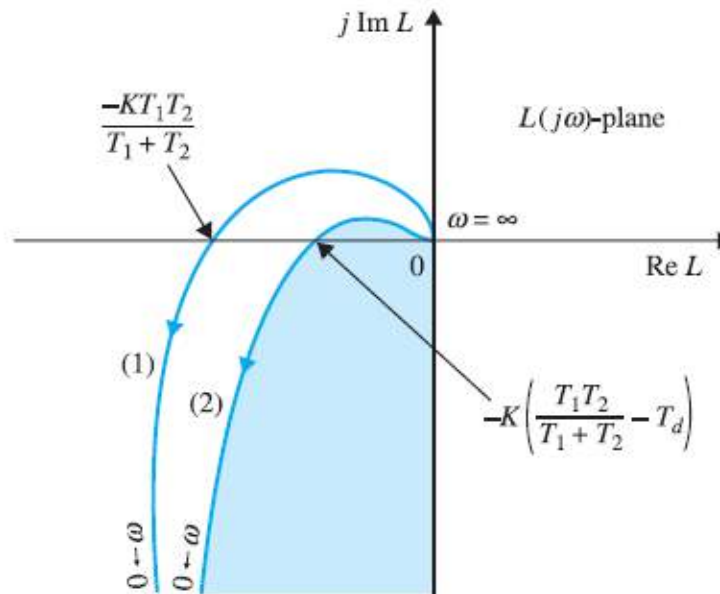
에서 안정이며 이는 양수의 T_d 와 K 에 대해서 식 (8-87)에서의 것보다 더 높은 상한값을 갖는다.

$L(s)$ 에 극과 영점을 추가할 때 Nyquist 선도에 미치는 영향

• 영점의 추가

예제 8-9-2

▶ 루프 전달함수에 영점을 추가하면 폐루프시스템의 안정화 효과를 갖는다.

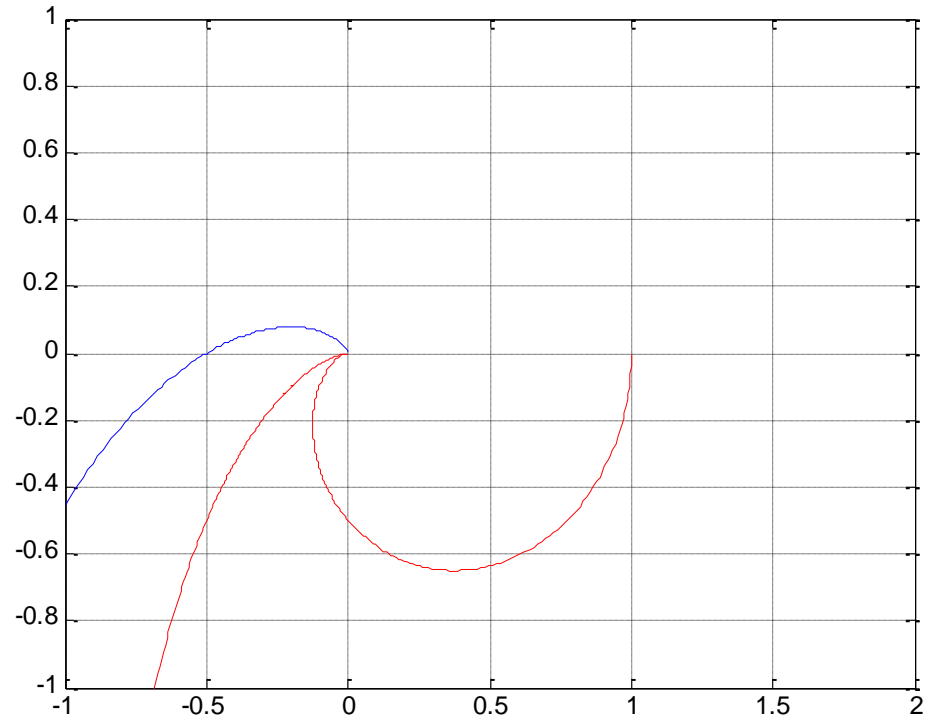


[그림 8-35] Nyquist 선도. 곡선 (1): $L(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$, 곡선 (2): $L(s) = \frac{K(1+T_d s)}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$; $T_d < T_1, T_2$.

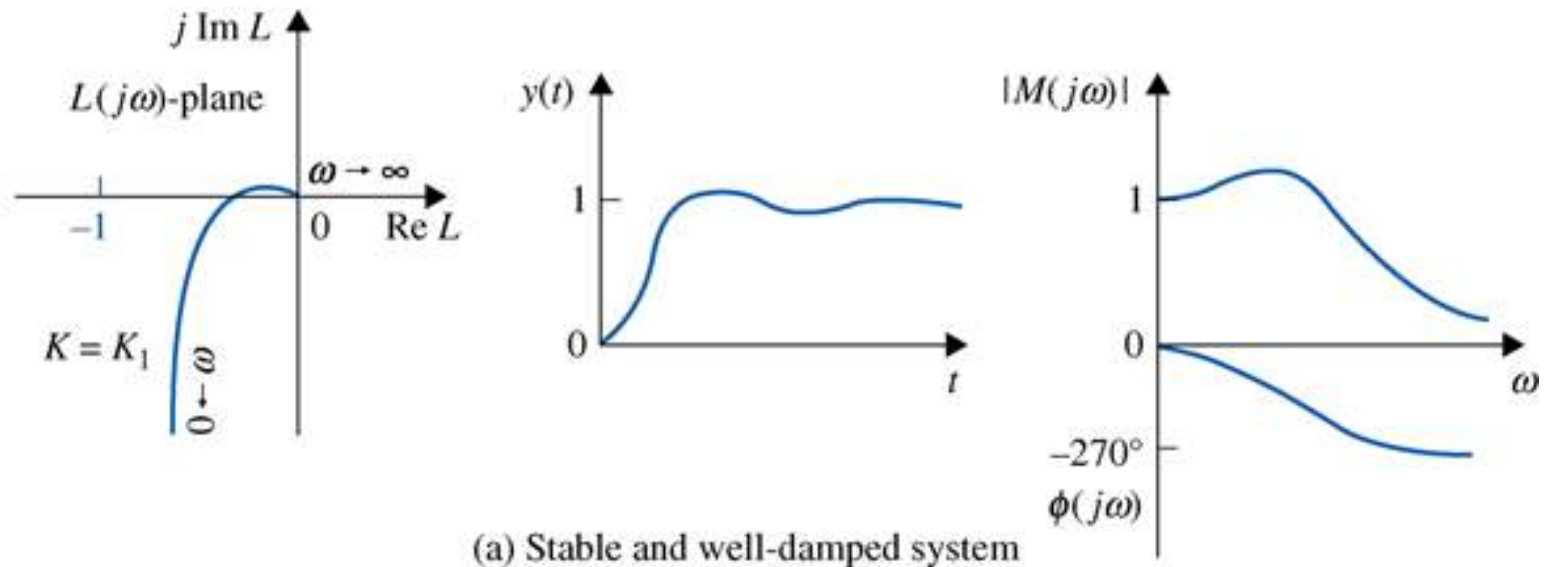
$L(s)$ 에 극과 영점을 추가할 때 Nyquist 선도에 미치는 영향

- 영점의 추가

```
%Toolbox 8-10-1
%MATLAB statements for Fig. 8-35
w=0:0.01:100;
num = [1];
den = conv(conv([1 1],[1 1]),[1 0])
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im,'b');
hold on
num = [1 1];
den = conv(conv([1 1],[1 1]),[1 0])
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im,'r');
axis([-2 2 -1 1])
grid
hold on
den = conv(conv([1 1],[1 1]),[1 1])
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im,'r');
axis([-1 2 -1 1])
grid on
```

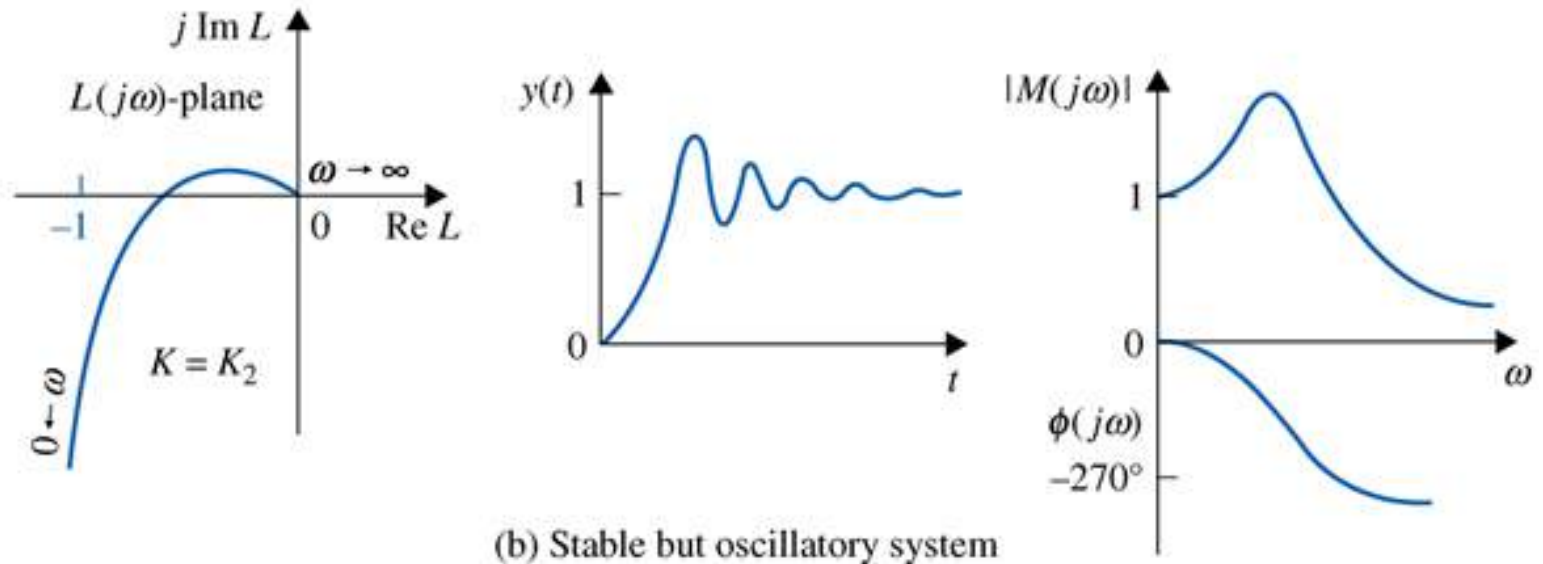


상대안정도 : 이득여유와 위상여유



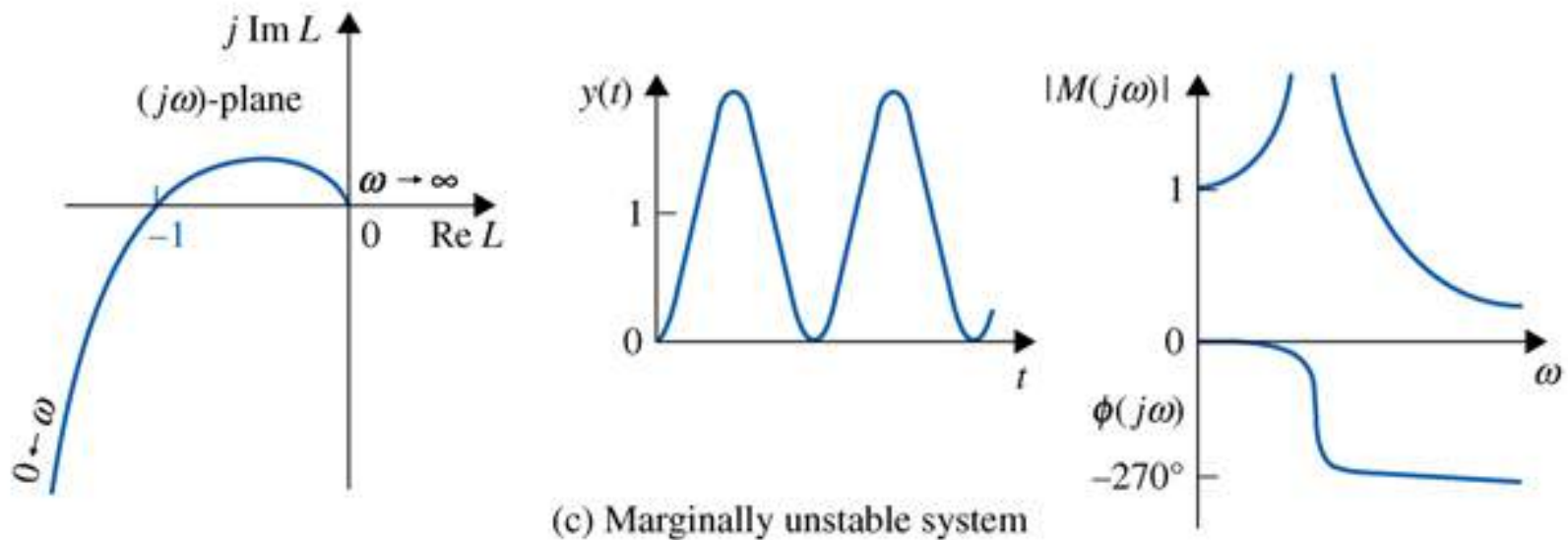
1. 그림 8-36(a): 루프이득 K 가 작다. $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도는 음의 실수축을 $(-1, j0)$ 점의 오른쪽 멀리 떨어진 점에서 만난다. 대응하는 계단응답은 아주 잘 감쇠되고 주파수응답에서 M_r 의 값은 낮다.

상대안정도 : 이득여유와 위상여유



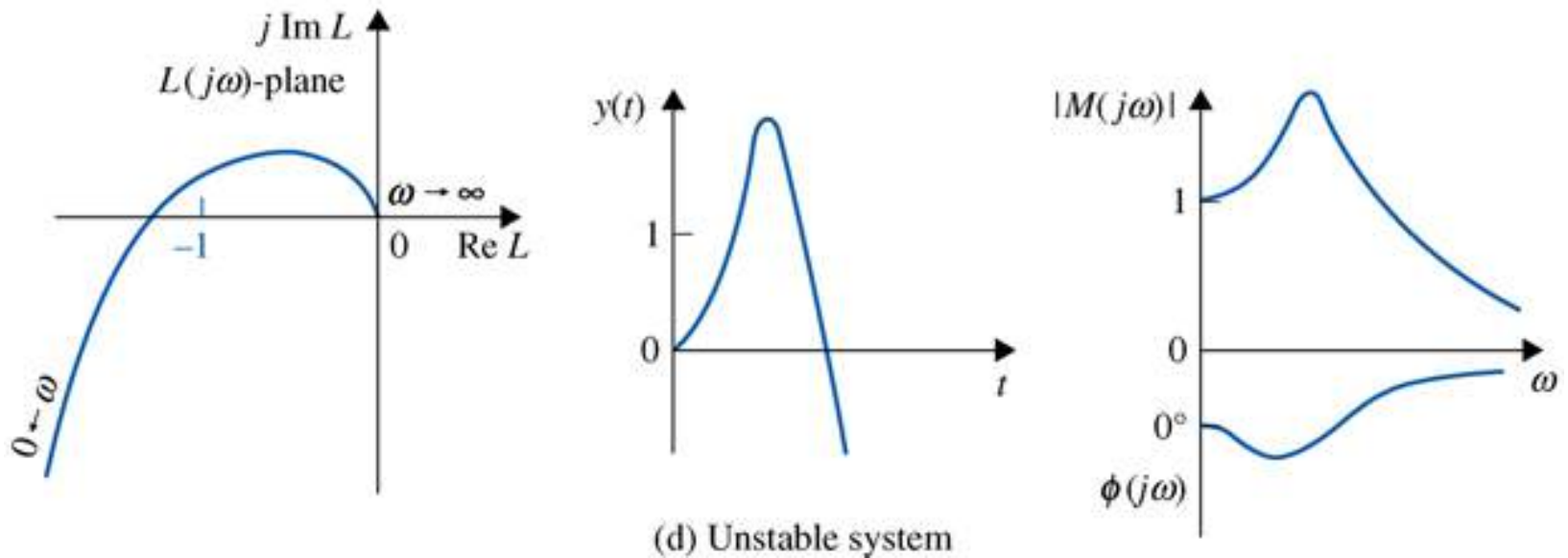
2. 그림 8-36(b): K 가 증가한다. 교점은 $(-1, j0)$ 점에 좀 더 접근한다. 시스템은 아직 안정인데 이는 임계점이 포함되지 않기 때문이다. 그러나 계단응답은 좀 더 큰 최대오버슈트를 갖고 M_r 은 역시 더 커진다.

상대안정도 : 이득여유와 위상여유



3. 그림 8-36(c): K 가 더욱 증가한다. Nyquist 선도가 이제는 $(-1, j0)$ 점을 지나고 시스템은 임계안정이다. 계단응답은 일정진폭으로 진동하고 M_r 은 무한대로 된다.

상대안정도 : 이득여유와 위상여유

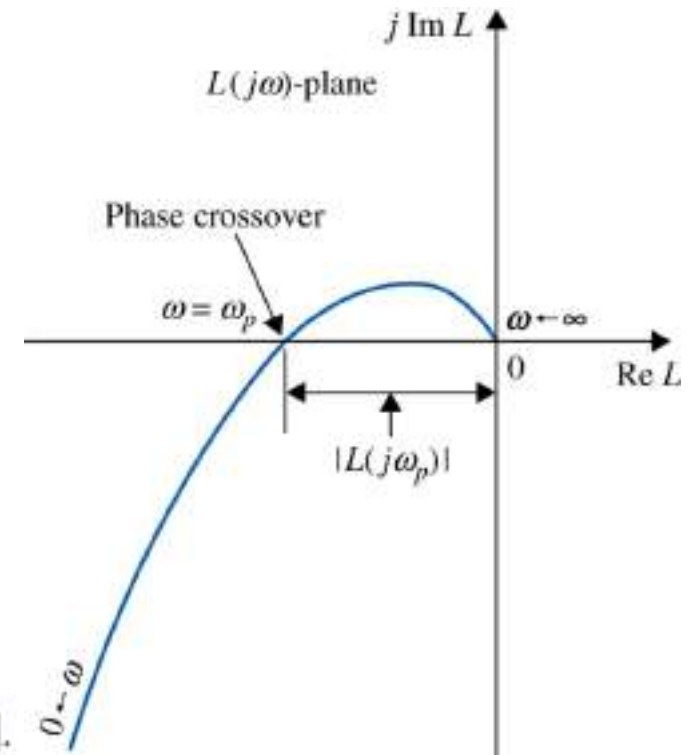


4. 그림 8-36(d): K 가 비교적 너무 크다. 이제는 Nyquist 선도가 $(-1, j0)$ 점을 포함하고 시스템은 불안정하다. 계단응답은 발산한다. ω 에 대한 $|M(j\omega)|$ 의 크기곡선은 의미를 상실한다. 실제로 불안정시스템에서 M_r 의 크기는 유한하다.

이득여유

- 위상교차점 : $L(j\omega)$ 선도에서 선도가 음의 실수축과 만나는 점
- 위상교차 주파수 : ω_p : 위상교차점에서의 주파수
 - $\angle L(j\omega_p) = 180^\circ$ (8-90)
- 루프전달함수가 $L(s)$ 인 폐루프 시스템의 이득여유

$$\begin{aligned}\text{gain margin} = \text{GM} &= 20 \log_{10} \frac{1}{|L(j\omega_p)|} \quad (8-91) \\ &= -20 \log_{10} |L(j\omega_p)| \text{ dB}\end{aligned}$$



[그림 8-37] 극좌표계에서 이득여유의 정의.

이득여유

1. $L(j\omega)$ 선도가 음의 실수축을 만나지 않는다(영이 아닌 유한의 위상교차점이 없다).

$$|L(j\omega_p)| = 0 \quad \text{GM} = \infty \text{ dB} \quad (8-92)$$

2. $L(j\omega)$ 선도가 음의 실수축을 0과 -1 사이(위상교차점이 놓이는)에서 만난다.

$$0 < |L(j\omega_p)| < 1 \quad \text{GM} > 0 \text{ dB} \quad (8-93)$$

3. $L(j\omega)$ 선도가 $(-1, j0)$ 점을 통과(위상교차점이 있는)한다.

$$|L(j\omega_p)| = 1 \quad \text{GM} = 0 \text{ dB} \quad (8-94)$$

4. $L(j\omega)$ 선도가 $(-1, j0)$ 점을 포함(위상교차점이 왼쪽에 있는)한다.

$$|L(j\omega_p)| > 1 \quad \text{GM} < 0 \text{ dB} \quad (8-95)$$

이득여유

이득여유는 폐루프시스템이 불안정이 되기 전까지 루프에 추가될 수 있는 이득의 양을 dB로 나타낸 것이다.

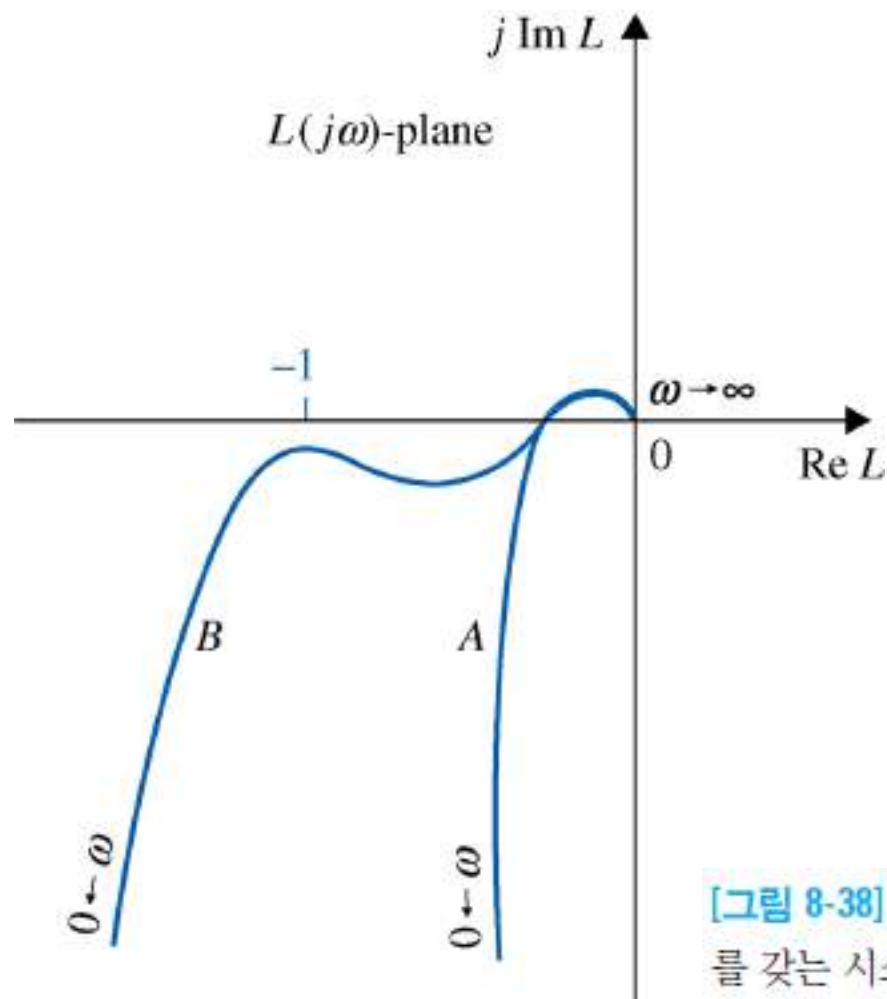
- Nyquist 선도가 유한한 영이 아닌 주파수에서 음의 실수축과 만나지 않으면 이득여유는 dB로 무한대이다. 이는 이론적으로 루프이득의 값을 불안정이 생기기 전에 무한대까지 증가시킬 수 있다는 의미이다.
- $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도가 $(-1, j0)$ 점을 통과할 때는 이득여유가 0 dB이고 이는 시스템이 불안정의 한계에 이르러 더 이상 루프이득을 증가시킬 수 없음을 뜻한다.
- 위상교차점이 $(-1, j0)$ 점 왼쪽에 있으면 이득여유는 dB로 음수이고 안정화될 때까지 이득여유만큼 루프이득을 줄이지 않으면 안 된다.

이득여유

비최소위상시스템의 이득여유

비최소위상 루프 전달함수를 갖는 시스템에서 이득여유를 상대안정의 척도로서 확장하려면 주의가 필요하다. 이런 경우에는 위상교차점이 $(-1, j0)$ 점의 우측에 있어도 시스템이 불안정할 수 있으며 따라서 양의 이득여유가 불안정한 시스템에 대응할 수도 있다. 그럼에도 불구하고 $(-1, j0)$ 점에 대한 위상교차점의 접근 정도는 상대안정도의 한 지표가 될 수 있다.

위상여유



[그림 8-38] 동일한 이득여유에 상이한 상대안정도를 갖는 시스템의 Nyquist 선도.

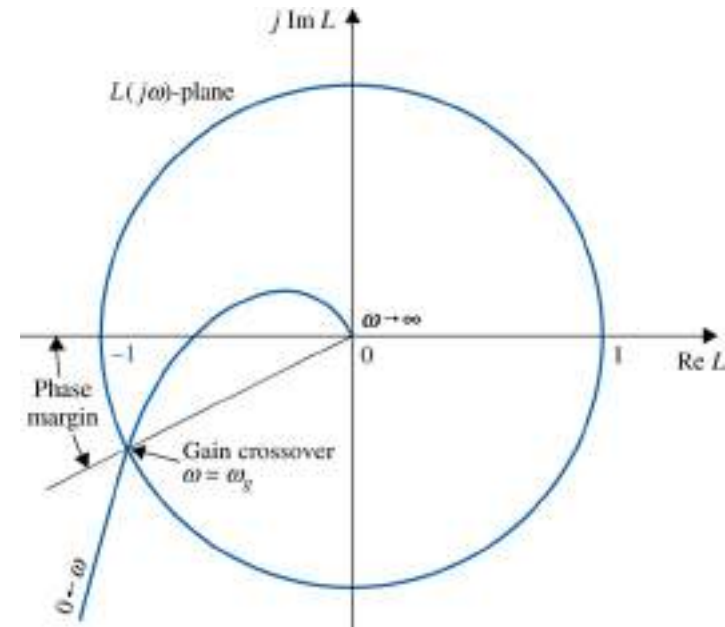
위상여유

- 이득교차점 : $L(j\omega)$ 의 크기가 1이 되는 $L(j\omega)$ 선도 위의 점
- 이득교차 주파수 : ω_g : 이득교차점에서의 $L(j\omega)$ 의 주파수
 - $|L(j\omega_g)| = 1$ (8-96)

위상여유란 $L(j\omega)$ 선도의 이득교차점이 $(-1, j0)$ 점을 지나도록 원점에 대하여 $L(j\omega)$ 선도를 회전시킨다고 할 때 회전한 각도로 정의한다.

- 위상여유의 해석적 표현

$$\text{phase margin} = \angle L(j\omega_g) - 180^\circ \quad (8-97)$$



[그림 8-39] $L(j\omega)$ 평면에서 정의한 위상여유.

위상여유

예제 8-10-1

이득여유와 위상여유에 대한 도해적 예로서 제어시스템의 루프 전달함수가

$$L(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)} \quad (8-98)$$

인 경우를 생각하자. $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도는 그림 8-40에서와 같다. Nyquist 선도로부터 다음 결과를 얻게 된다.

이득교차 $\omega_g = 6.22 \text{ rad/sec}$

위상교차 $\omega_p = 15.88 \text{ rad/sec}$

위상교차점에서 이득여유를 측정한다. $L(j\omega_p)$ 의 크기는 0.182이다. 따라서 식 (8-91)로부터 이득여유를 얻는다.

$$GM = 20 \log_{10} \frac{1}{|L(j\omega_p)|} = 20 \log_{10} \frac{1}{0.182} = 14.80 \text{ dB} \quad (8-99)$$

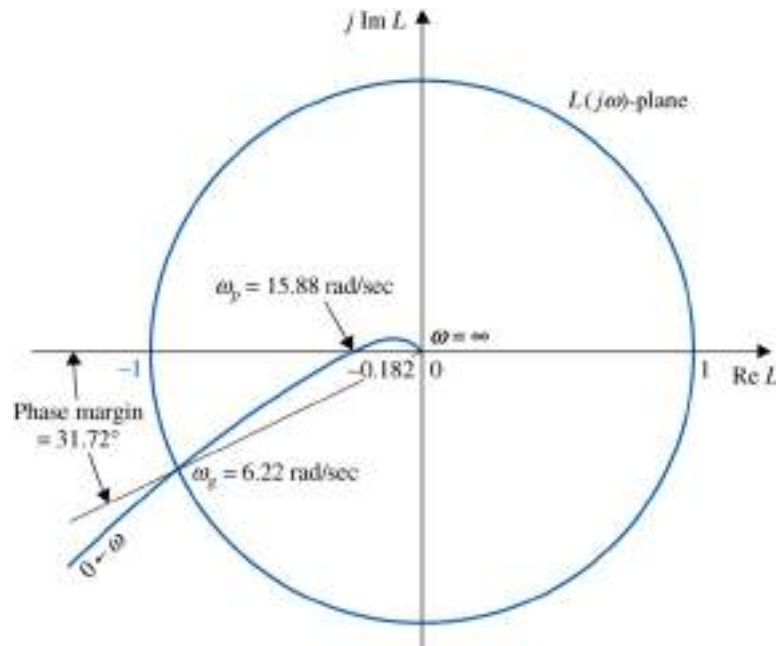
이득교차점에서 위상여유를 측정한다. $L(j\omega_g)$ 의 위상은 211.72° 이다. 따라서 식 (8-97)로부터 위상여유를 얻는다.

$$PM = \angle L(j\omega_g) - 180^\circ = 211.72^\circ - 180^\circ = 31.72^\circ \quad (8-100)$$

안정도 공부를 위해 Bode 선도 기법을 시작하기 전에 Nyquist 선도의 장단점을 요약해 두는 게 좋을것 같다.

위상여유

예제 8-10-1



[그림 8-40] $L(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)}$ 의
Nyquist 선도.

Nyquist 선도의 장점

1. 비최소위상 전달함수를 갖는 시스템의 안정도 공부에 사용할 수 있다.
2. 선도가 그려진 후 폐루프시스템의 안정도 해석은 $(-1, j0)$ 점에 대한 루프 전달함수의 Bode 선도를 조사함으로써 쉽게 얻어질 수 있다.

Nyquist 선도의 단점

1. Nyquist 선도를 참고해서 제어를 설계하는 것은 쉬운 일이 아니다.

Bode 선도를 이용한 안정도 해석

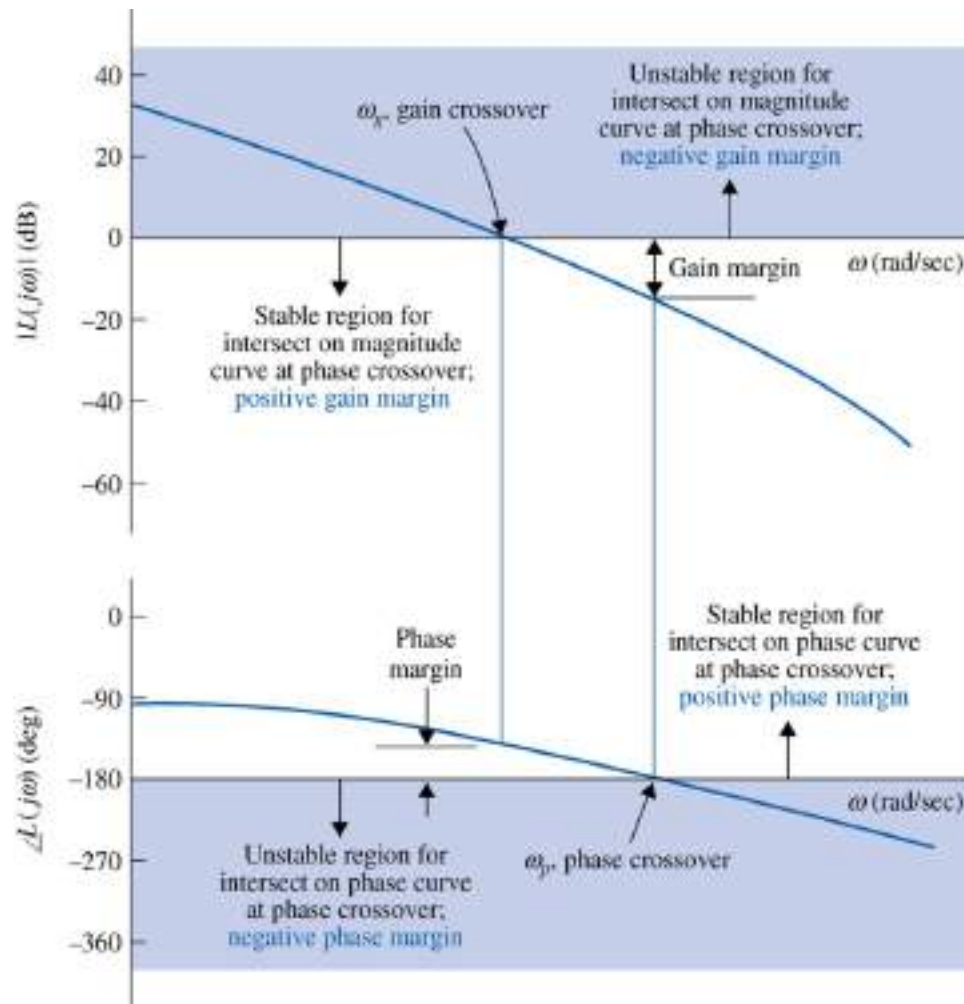
Bode 선도의 장점

1. 컴퓨터를 사용하지 않고서 선분들을 이용하여 크기 및 위상을 근사적으로 그릴 수 있다.
2. 이득교차점, 위상교차점, 이득여유 및 위상여유를 Nyquist 선도에 비해 더욱 쉽게 구하게 된다.
3. 설계 목적을 위해 제어기와 그들의 파라미터를 추가할 때의 영향을 Nyquist 선도에서보다 더욱 쉽게 구체화할 수 있다.

Bode 선도의 단점

1. Bode 선도로부터는 오직 최소위상시스템의 절대안정도 및 상대안정도만 결정할 수 있다. 예를 들면 Bode 선도에서는 얼마만큼 안정한가를 말할 수 없다.

Bode 선도를 이용한 안정도 해석



[그림 8-41] Bode 선도에서 이득여유와 위상여유의 결정.

Bode 선도를 이용한 안정도 해석

그림 8-37과 8-39에 각각 주어진 이득여유와 위상여유의 정의에 따라 Bode 선도에 서 전형적인 최소위상 루프 전달함수에 대하여 이들을 도해한 것이 그림 8-41이다. 시스템의 안정도에 관한 다음과 같은 관찰을 Bode 선도의 성질로부터 얻을 수 있다.

1. 위상교차점에서 $L(j\omega)$ 의 크기가 dB로 음수이면 이득여유는 양수이고 시스템은 안정이다. 즉 이득여유는 0-dB-축 아래쪽에서 측정된다. 이득 여유를 0-dB-축 위 쪽에서 얻게 되면 이득여유가 음수이고 시스템은 불안정이다.
2. 이득교차점에서 $L(j\omega)$ 의 위상이 -180° 보다 더 크면 위상여유가 양수이고 시스템은 안정이다. 즉 위상여유는 -180° 축 위쪽에서 구해진다. -180° 아래에서 위상여유가 구해지면 위상여유는 음수이고 시스템은 불안정이다.

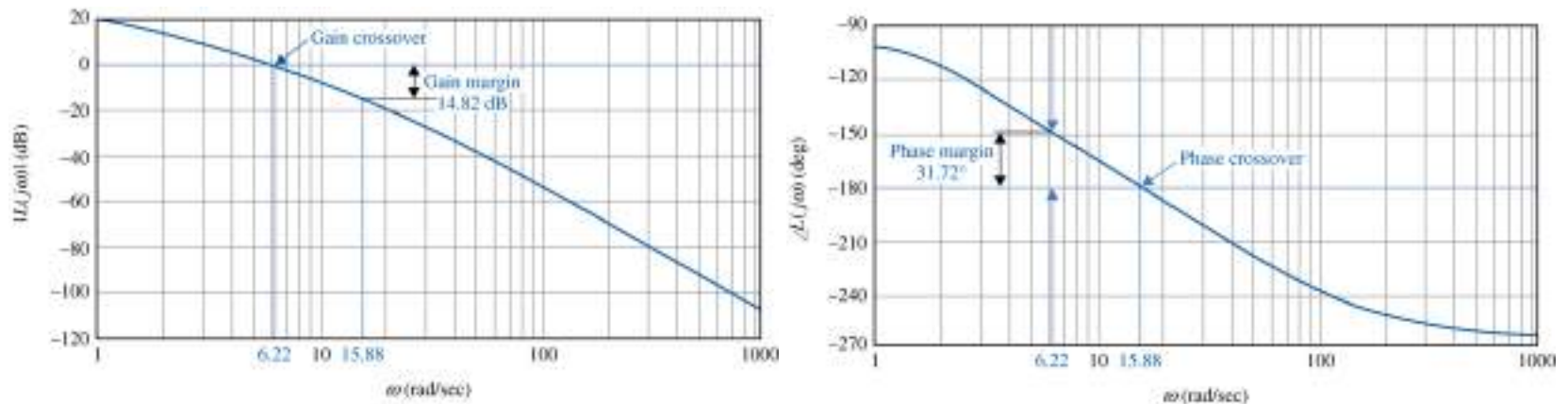
Bode 선도를 이용한 안정도 해석

예제 8-11-1

식 (8-98)로 주어진 루프 전달함수를 고려하자. 이 함수의 Bode 선도를 그리면 그림 8-42와 같다. 크기 및 위상선도로부터 다음과 같은 결과가 쉽게 얻어진다.

이득교차점은 크기곡선이 0 dB축과 만나는 점이다. 이득교차 주파수 ω_g 는 6.22 rad/sec이다. 이 이득교차점에서 위상여유를 구한다. 위상여유는 -180° 축으로부터 구해지며 31.72° 이다. 위상여유가 -180° 축 위쪽에서 구해졌으므로 양수이고 시스템은 안정이다.

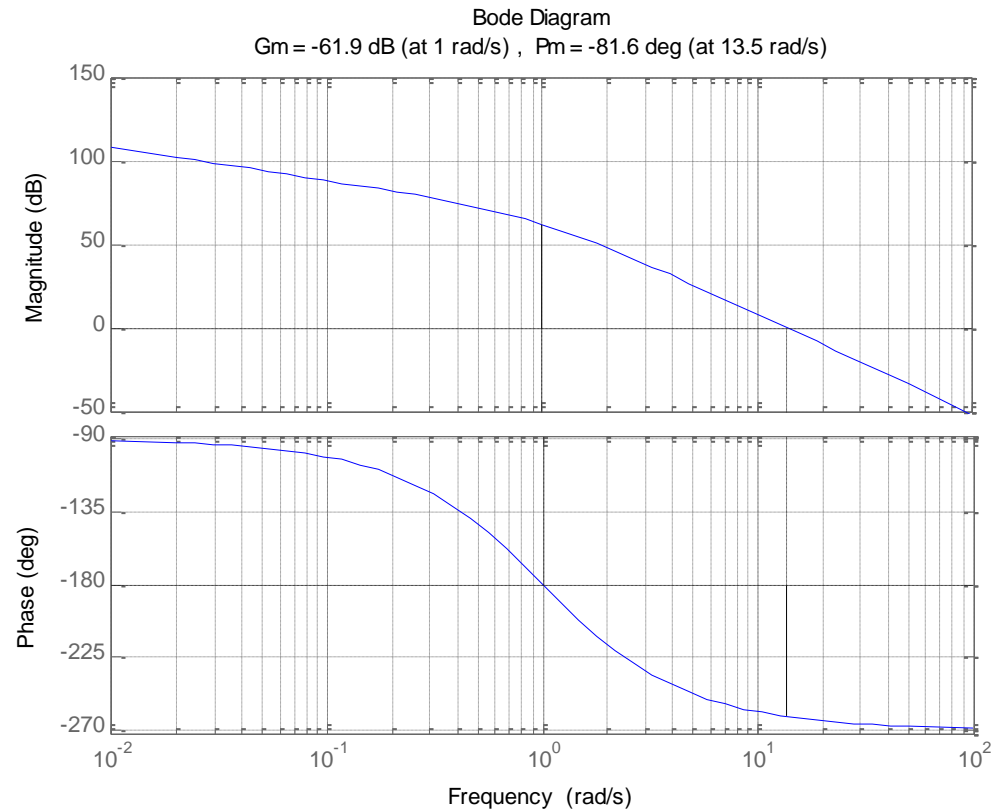
위상교차점은 위상곡선이 -180° 축과 만나는 점이다. 위상교차 주파수는 $\omega_p = 15.88$ rad/sec이다. 위상교차점에서 이득여유를 구하면 14.8 dB이다. 이득여유를 0 dB축 아래쪽에서 구했으므로 양수이고 시스템은 안정이다.



[그림 8-42] $L(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)}$ 의 Bode 선도.

Bode 선도를 이용한 안정도 해석

```
%Toolbox 8-11-1  
%MATLAB statements for Fig. 8-42  
G = zpk([], [0 -1 -1], 2500)  
margin(G)  
grid;
```



순수시간지연을 갖는 시스템의 Bode 선도

예제 8-11-2

폐루프시스템의 루프 전달함수가

$$L(s) = \frac{Ke^{-T_d s}}{s(s+1)(s+2)} \quad (8-101)$$

라고 생각하자. 그림 8-43은 $K = 1$ 및 $T_d = 0$ 일 때 $L(j\omega)$ 의 Bode 선도이다. 다음 결과를 얻을 수 있다.

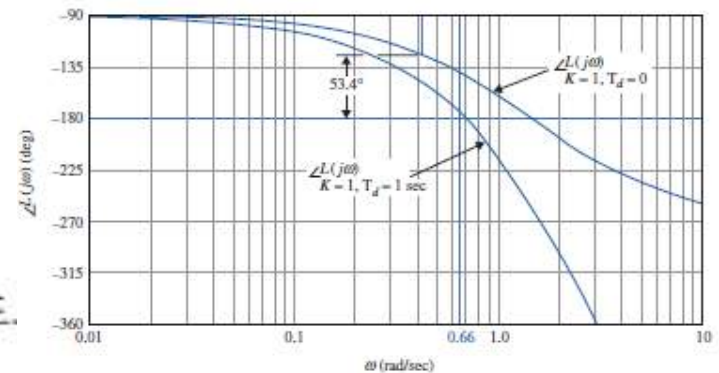
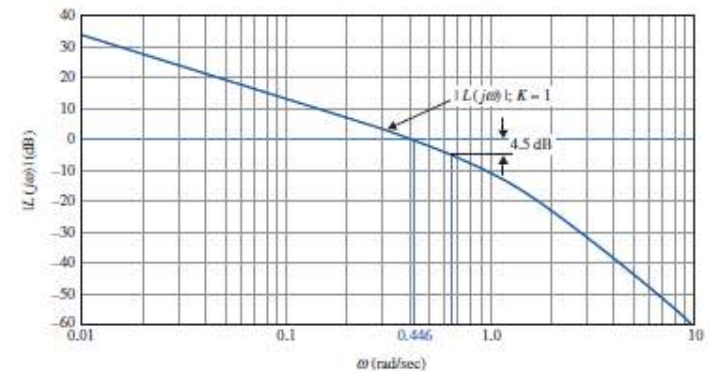
이득교차 주파수 = 0.446 rad/sec

위상여유 = 53.4°

위상교차 주파수 = 1.416 rad/sec

이득여유 = 15.57 dB

따라서 시간지연이 없으면 시스템은 안정하다.



[그림 8-43] $L(s) = \frac{Ke^{-T_d s}}{s(s+1)(s+2)}$ 의 Bode 선도.

순수시간지연을 갖는 시스템의 Bode 선도

예제 8-11-2

순수시간지연의 효과는 크기곡선에는 영향을 주지 않고 위상곡선에 $-T_d\omega$ 의 위상을 더하는 것이 된다. 안정도 면에서는 시간지연의 역효과가 분명한데 이는 시간지연으로 일어나는 음의 위상변화가 ω 의 증가에 따라 급격히 증가하기 때문이다. 안정도를 위한 시간지연의 임계값을 구하기 위해

$$T_d\omega_g = 53.4^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 0.932 \text{ radians} \quad (8-102)$$

로 놓고 이 식을 T_d 에 관해 풀면 T_d 의 임계값은 2.09초가 된다.

예제를 계속하여 T_d 를 임의로 1초라 놓고 안정하기 위한 K 의 임계값을 찾는다. 그림 8-43은 이 새로운 시간지연을 갖는 $L(j\omega)$ 의 Bode 선도이다. K 는 아직은 1과 같고 크기곡선에는 변화가 없다. 위상곡선은 ω 의 증가에 따라 처지게 되고 다음 결과를 얻게 된다.

$$\text{위상교차 주파수} = 0.66 \text{ rad/sec}$$

$$\text{이득여유} = 4.5 \text{ dB}$$

따라서 식 (8-91)의 이득여유 정의를 이용하면 안정하기 위한 K 의 임계값은 $10^{4.5/20} = 1.680$ 이다.

Bode 선도의 크기곡선 기울기에 따른 상대안정도

• 8-12-1 조건부 안정시스템

예제 8-12-1

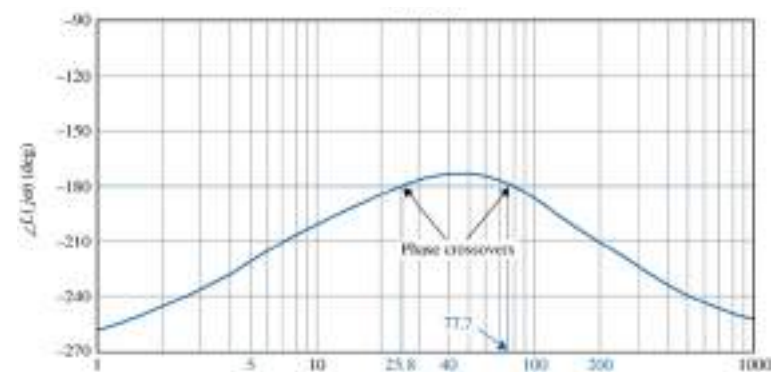
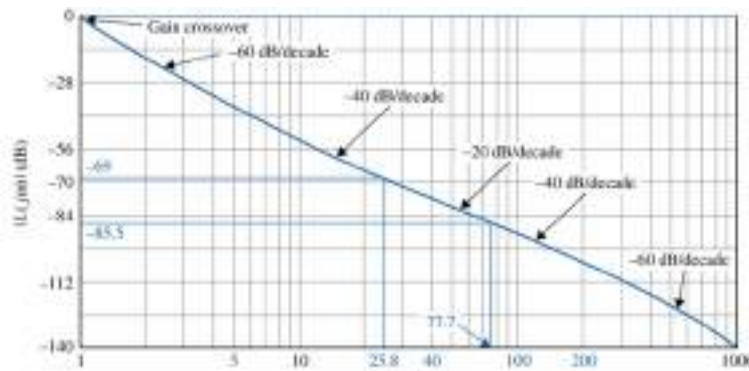
폐루프시스템의 루프 전달함수가

$$L(s) = \frac{100K(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)} \quad (8-103)$$

인 경우를 생각하자. $K = 1$ 일 때 $L(j\omega)$ 의 Bode 선도를 그리면 그림 8-44와 같다. 시스템의 안정도에 관하여 다음의 결과를 얻게 된다.

이득교차 주파수 = 1 rad/sec

위상여유 = -78°



[그림 8-44] $K = 1$ 일 때 $L(s) = \frac{100K(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)}$ 의 Bode 선도.

Bode 선도의 크기곡선 기울기에 따른 상대안정도

- 8-12-1 조건부 안정시스템

예제 8-12-1

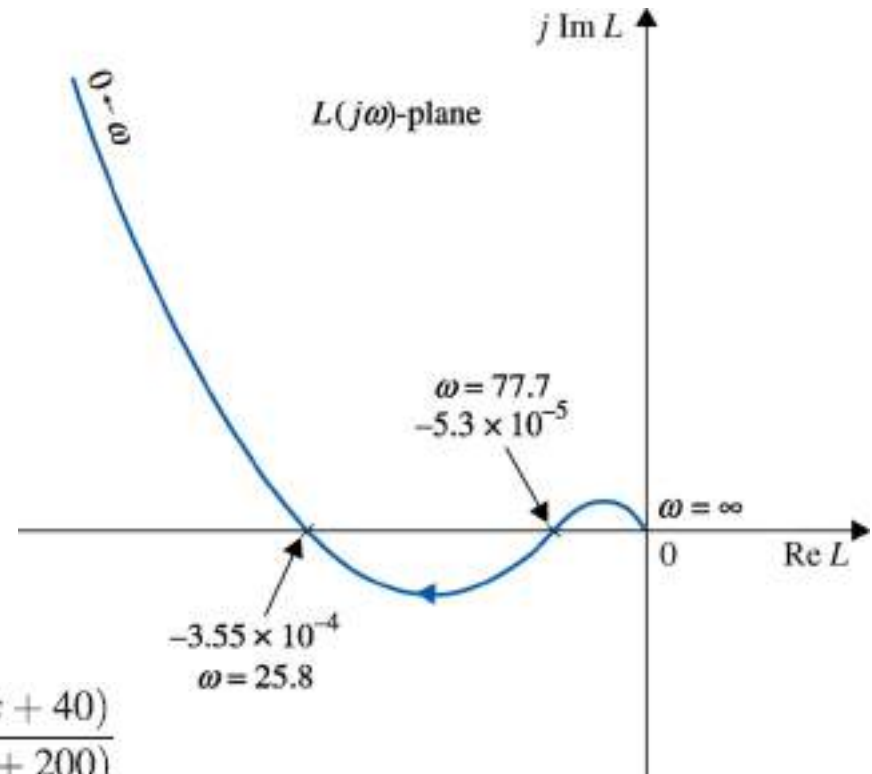
두 개의 위상교차점이 있는데 하나는 25.8 rad/sec 이고 또 하나는 77.7 rad/sec 이다. 이 두 주파수 사이에서 위상특성으로부터 이득교차점이 이 범위에 있으면 시스템이 안정인 것을 알 수 있다. 크기곡선으로부터 안정동작을 위한 K 의 범위가 69 dB 와 85.5 dB 사이이다. 이 범위 이상과 이하에서의 K 의 값에 대해서는 $L(j\omega)$ 의 위상이 -180° 보다 낮고 시스템은 불안정이다. 이 예제는 상대안정도와 이득교차점에서 크기곡선의 기울기 사이의 관계에 관한 좋은 예제로 볼 수 있다. 그림 8-44에서 보면 아주 낮은 주파수와 높은 주파수 모두에서 크기곡선의 기울기는 -60 dB/decade 이다. 즉 이득교차점이 이 두 영역 중 하나에 떨어지면 위상여유는 음수이고 시스템은 불안정이다. -40 dB/decade 의 기울기를 갖는 크기곡선의 두 부분에서 이득교차점이 이들 영역의 반 정도에 떨어지면 시스템은 안정이지만 이때 위상여유는 작다. 크기곡선의 기울기가 -20 dB/decade 인 영역에 이득교차점이 있게 되면 시스템은 안정이다.

Bode 선도의 크기곡선 기울기에 따른 상대안정도

- 8-12-1 조건부 안정시스템

예제 8-12-1

그림 8-45는 $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도이다. Bode 선도와 Nyquist 선도에서 유도한 안정도에 관한 결과를 비교하는 것은 재미있는 일이다.



[그림 8-45] $K = 1$ 일 때 $L(s) = \frac{100K(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)}$
Nyquist 선도.

Bode 선도의 크기곡선 기울기에 따른 상대안정도

• 8-12-1 조건부 안정시스템

예제 8-12-1

시스템의 근궤적은 그림 8-46과 같다. 근궤적은 K 에 따른 시스템의 안정도 조건에 알기 쉬운 그림을 제공한다. s 평면의 $j\omega$ 축과 근궤적의 교점수는 Bode 선도의 -180° 축과 $L(j\omega)$ 의 위상곡선의 교점수 및 $L(j\omega)$ 의 Nyquist 선도와 음의 실수축과의 교점수와 동일하다. 독자들은 Bode 선도에서 얻은 이득여유와 근궤적의 $j\omega$ 축 교점에서의 K 의 값에 대한 Nyquist 선도의 음의 실수축의 교차점 좌표를 검사해 보아야 한다.



[그림 8-46] $G(s) = \frac{100K(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)}$ 의 근궤적.