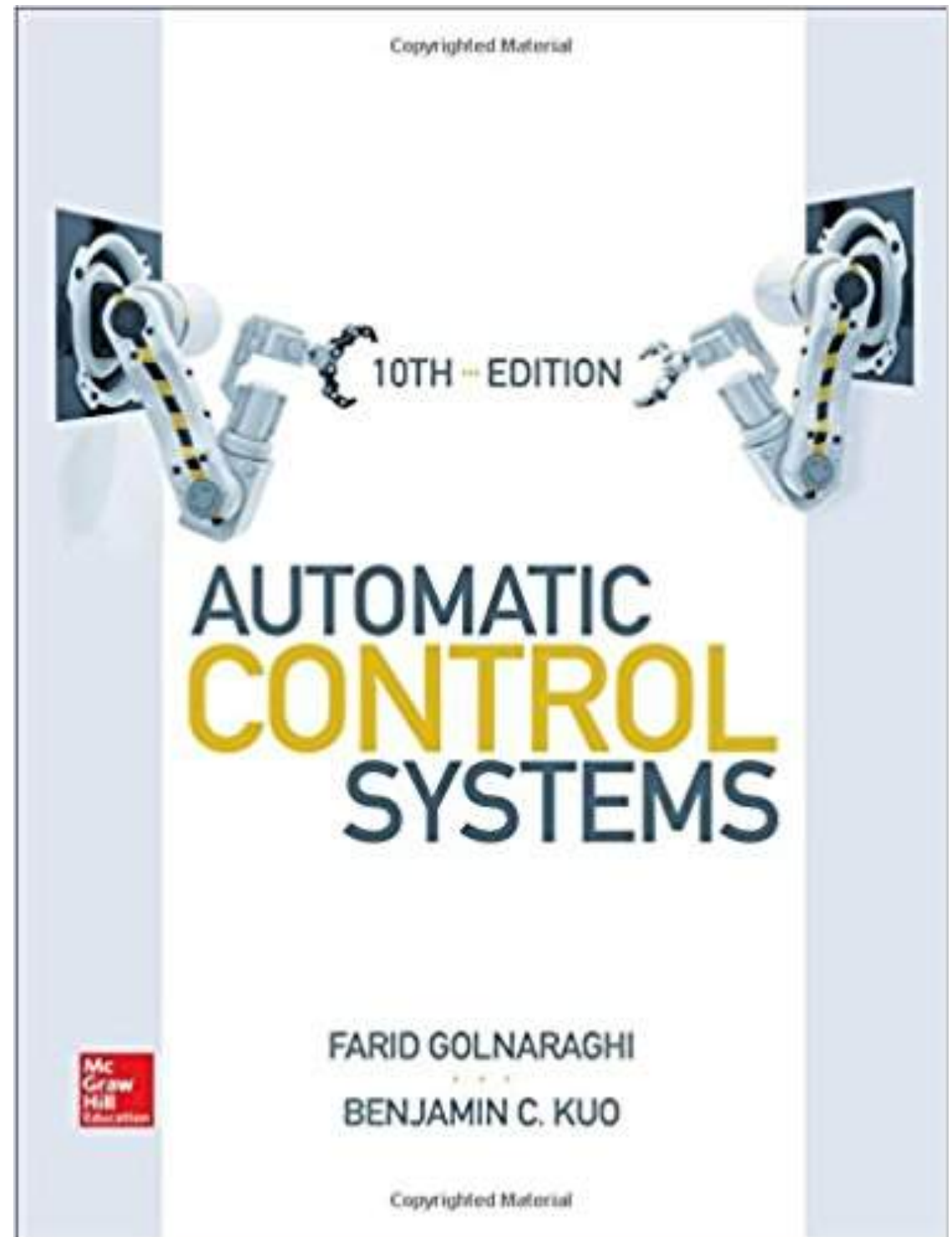
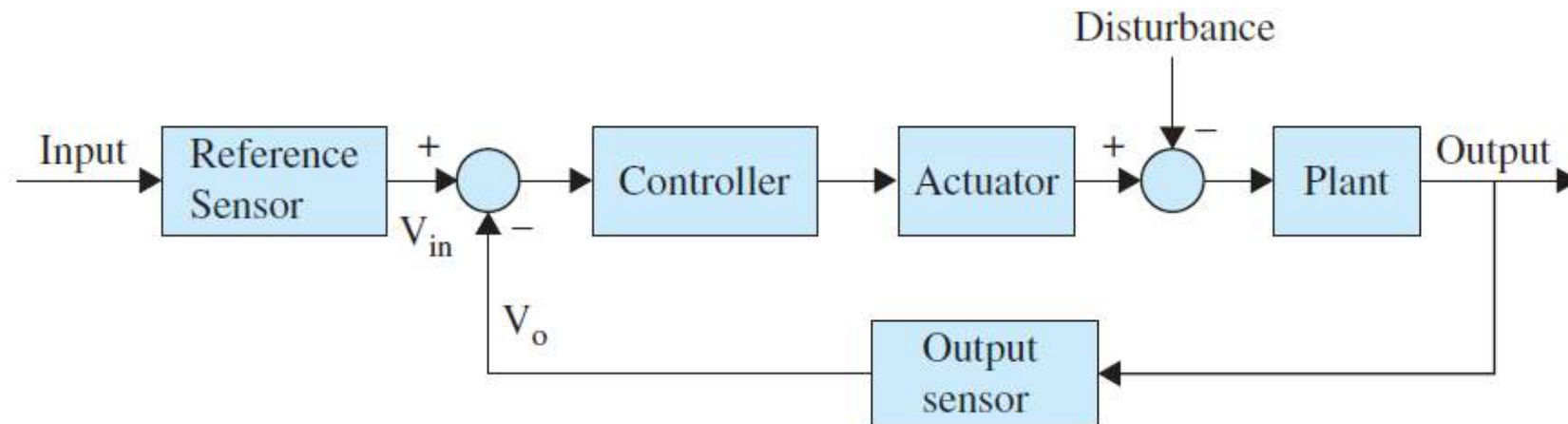


자동제어  
(Automatic  
Control)  
6장 피드백  
제어시스템의  
중요한  
구성요소

김동한



# Important Components of Feedback Control Systems



**Figure 6-1** Block diagram representation of a general feedback control system.

- Reference sensor (or input sensor)
- Output sensor
- Actuator
- Controller
- Plant (the component whose variables are to be controlled—normally a dynamic system as described in Chap. 2)

# OP AMP (Operational Amplifier)

- 이득이 매우 큰 전압제어전압원

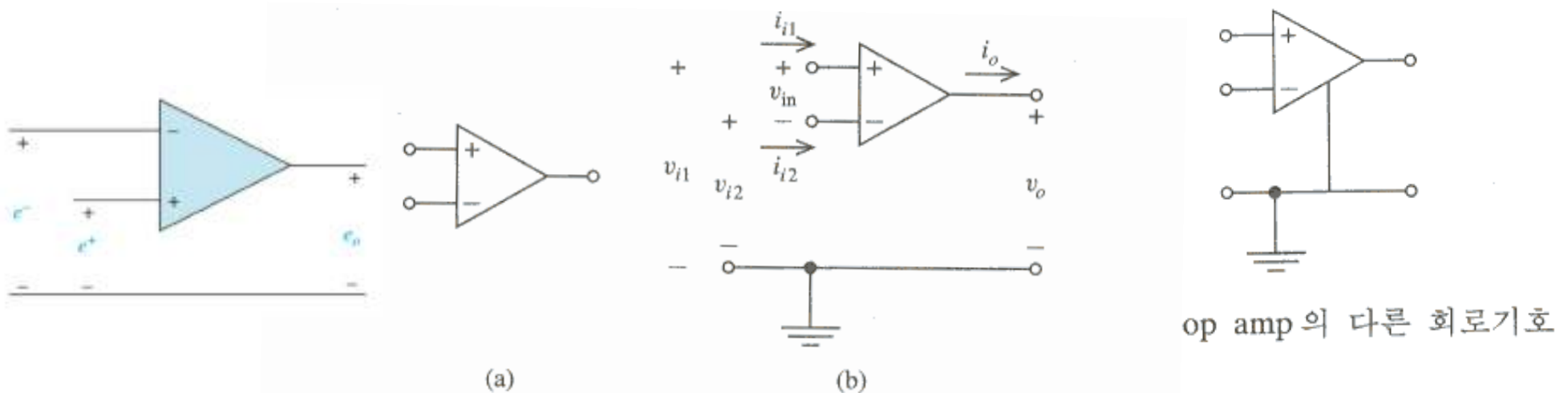


그림 3.5 op amp: (a) 회로기호, (b) 전압과 전류.

$$v_{in} = v_{i1} - v_{i2}$$

- 비반전입력(noninverting input,  $v_{i1}$ ), 반전입력 (inverting input,  $v_{i2}$ ), 출력(output)

## OP amp 회로모델

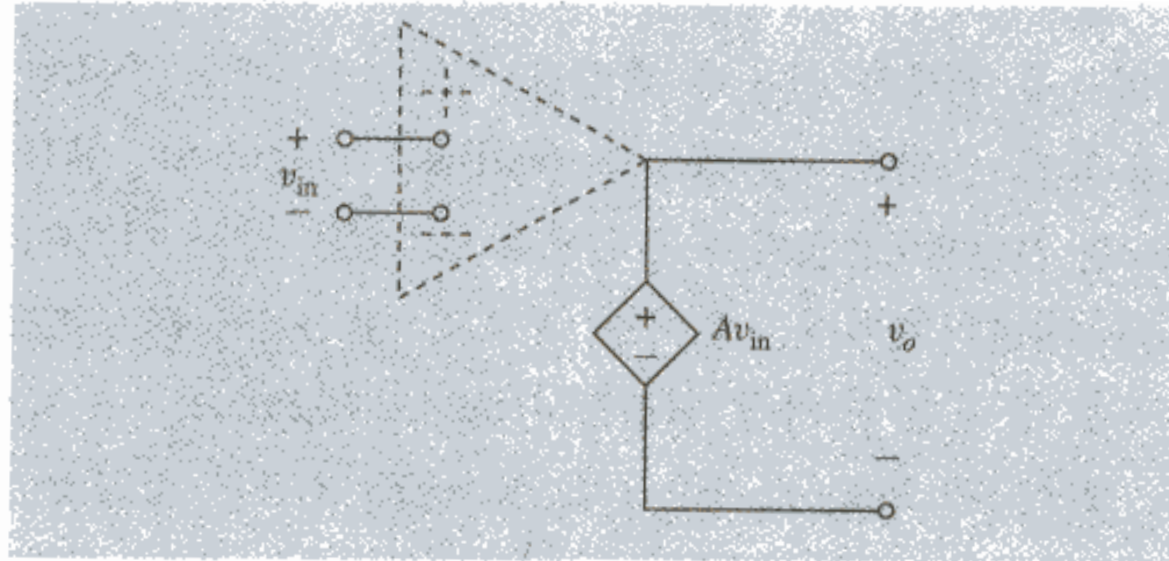


그림 3.7 이상전압증폭기 op amp 회로 모델

- 출력전압  $v_o$ 는 두 입력단자전압의 차  $v_{in}$ 에 의해서 제어됨.
- $A$ 는 open-loop gain

## 개량 op amp 모델

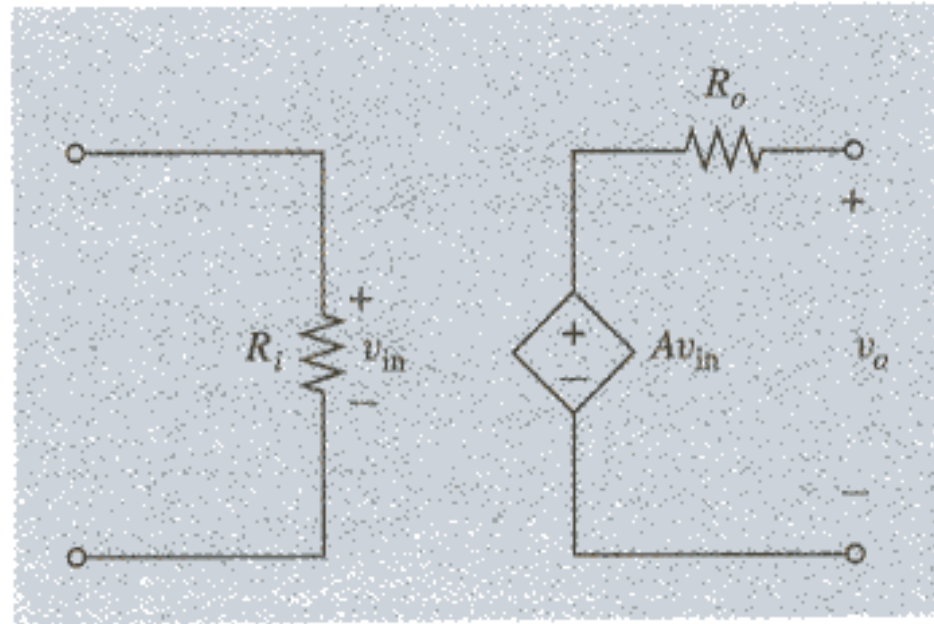


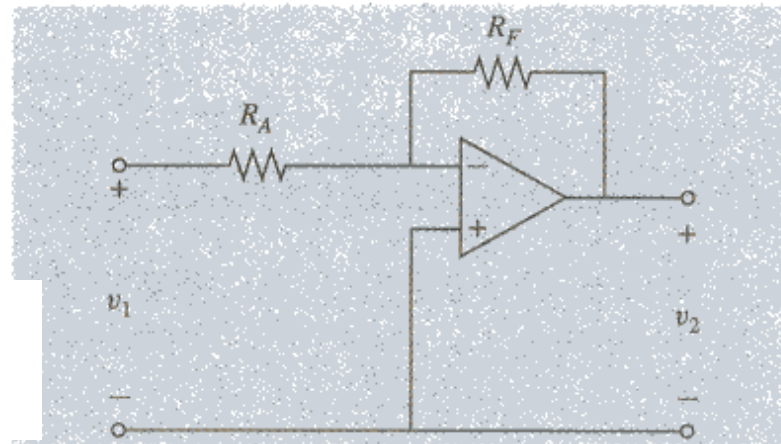
그림 3.9 개량 op amp 모델

- 이상전압증폭기 모델에 입력저항  $R_i$ 와 출력저항  $R_o$ 를 추가(일반적으로  $R_i=1\text{Mohm}$ ,  $R_o=30\text{ohm}$ )

## OP AMP의 가상단락원리

- Op amp를 모델로 대치하지 않고 해석
  - 가상개방/단락원리(virtual open/short principle)
    1. Op amp 입력단자로 유입하는 전류는 0이다:  $i_{i1}=i_{i2}=0$
    2. Op amp 입력단자간에 걸리는 전압은 0이다:  $v_{in}=0$
- Op amp의 입력은 개방회로처럼 동작한다.
- Op amp의 이득 A가 무한할 때 사용

## 반전증폭기



전압전달방정식:  $v_2 = -R_F/R_A v_1$

그림 3.15 반전증폭기

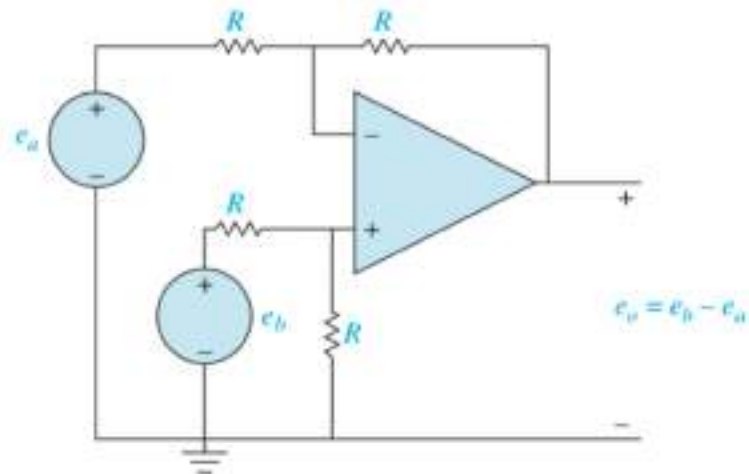
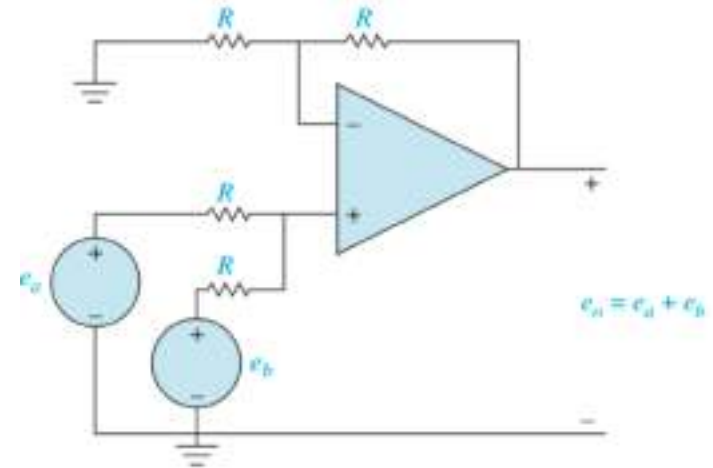
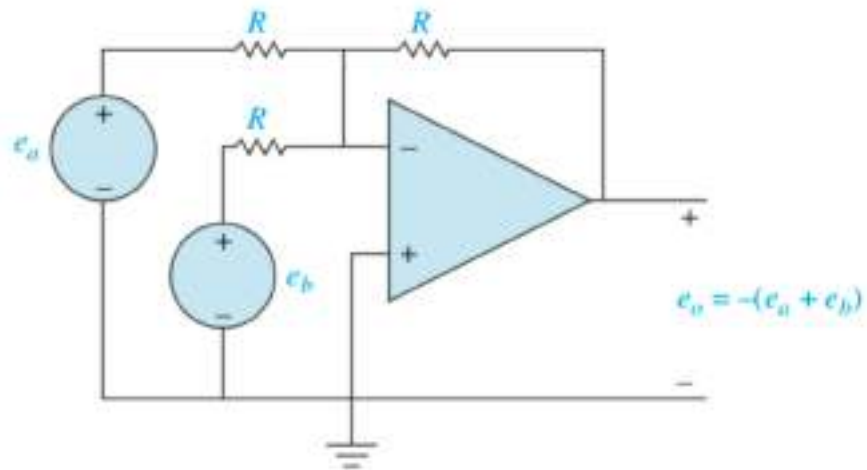
회로이론에서 배운 방법으로 정리하면,

$$v_2 = \frac{-R_F}{R_A + \frac{1}{A}(R_A + R_F)} v_1$$

$A$ 가 매우 클 때의 극한값을 취하면 반전증폭기의 전압전달방정식은

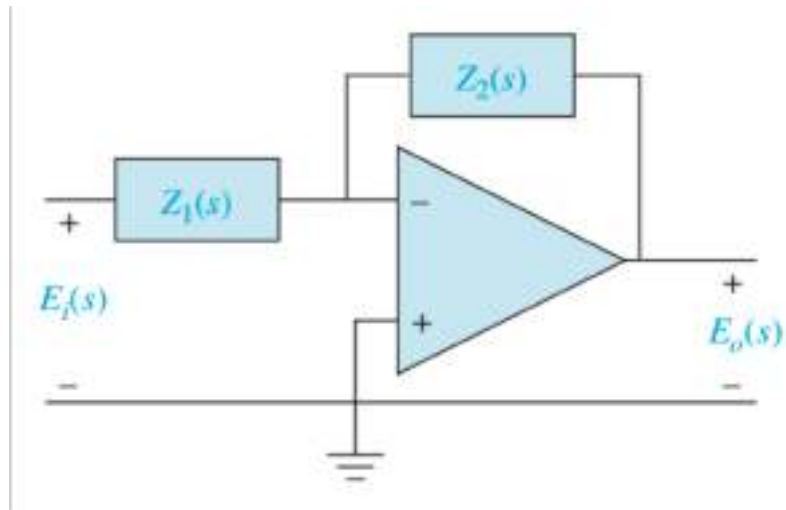
$$v_2 = \frac{-R_F}{R_A} v_1$$

## Op-Amp를 이용한 연산기










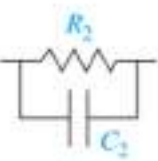

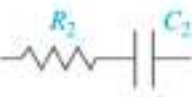
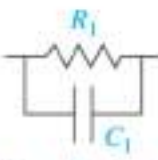

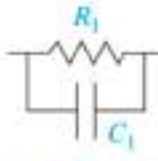
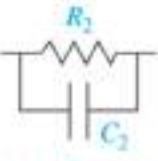


## Op-Amp를 이용한 연산기



$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = \frac{-1}{Z_1(s)Y_2(s)} \\ &= -Z_2(s)Y_1(s) = -\frac{Y_1(s)}{Y_2(s)} \end{aligned}$$

TABLE 6-1 Inverting Op-Amp Transfer Functions

Input Element	Feedback Element	Transfer Function	Comments
(a)  $Z_1 = R_1$	 $Z_2 = R_2$	$-\frac{R_2}{R_1}$	Inverting gain; e.g., if $R_1 = R_2$ , $e_o = -e_i$
(b)  $Z_1 = R_1$	 $Y_2 = sC_2$	$\left(\frac{-1}{R_1 C_2}\right) \frac{1}{s}$	Pole at the origin; i.e., an integration
(c)  $Y_1 = sC_1$	 $Z_2 = R_2$	$(-R_2 C_1)s$	Zero at the origin; i.e., a differentiator
(d)  $Z_1 = R_1$	 $Y_2 = \frac{1}{R_2} + sC_2$	$\frac{1}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$	Pole at $\frac{-1}{R_2 C_2}$ with a dc gain of $-R_2/R_1$
(e)  $Z_1 = R_1$	 $Z_2 = R_2 + \frac{1}{sC_2}$	$-\frac{R_2}{R_1} \left( \frac{s + 1/R_2 C_2}{s} \right)$	Pole at the origin and a zero at $-1/R_2 C_2$ ; i.e., a PI controller
(f)  $Y_1 = \frac{1}{R_1} + sC_1$	 $Z_2 = R_2$	$-R_2 C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)$	Zero at $s = \frac{-1}{R_1 C_1}$ ; i.e., a PD controller
(g)  $Y_1 = \frac{1}{R_1} + sC_1$	 $Y_2 = \frac{1}{R_2} + sC_2$	$\frac{-C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$	Poles at $s = \frac{-1}{R_2 C_2}$ and a zero at $s = \frac{-1}{R_1 C_1}$ ; i.e., a lead or lag controller

## 예제 6-1-1

$$G(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

$$\text{Proportional: } \frac{E_p(s)}{E(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{Integral: } \frac{E_I(s)}{E(s)} = -\frac{1}{R_I C_I s}$$

$$\text{Derivative: } \frac{E_D(s)}{E(s)} = -R_d C_d s$$

The output voltage is

$$E_o(s) = -[E_p(s) + E_I(s) + E_D(s)]$$

Thus, the transfer function of the PID op-amp circuit is

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_I C_I s} + R_d C_d s$$

## 예제 6-1-1

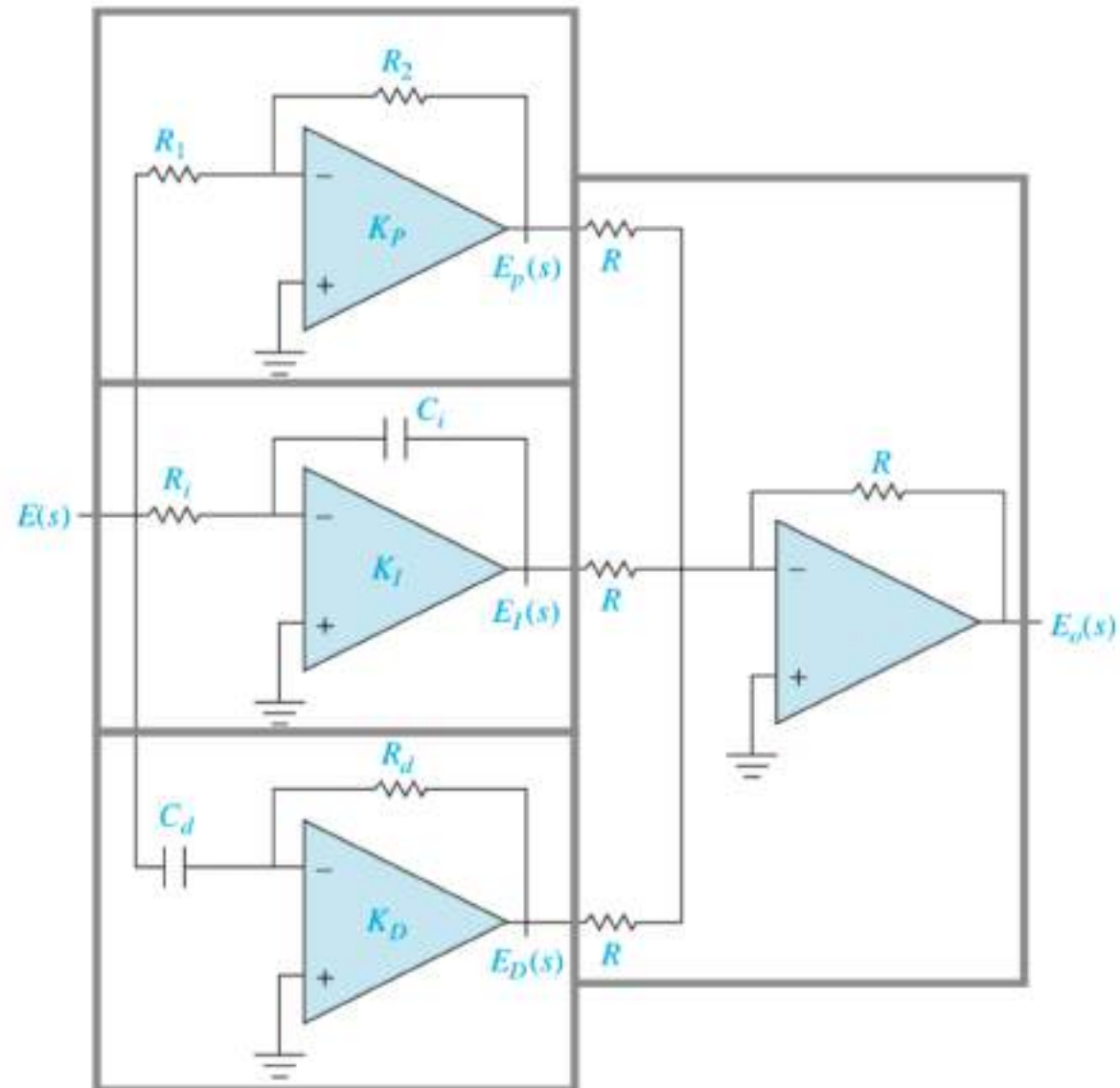


Figure 6-6 Implementation of a PID controller.

# Potentiometer

- 기계적 에너지를 전기적 에너지로 변환

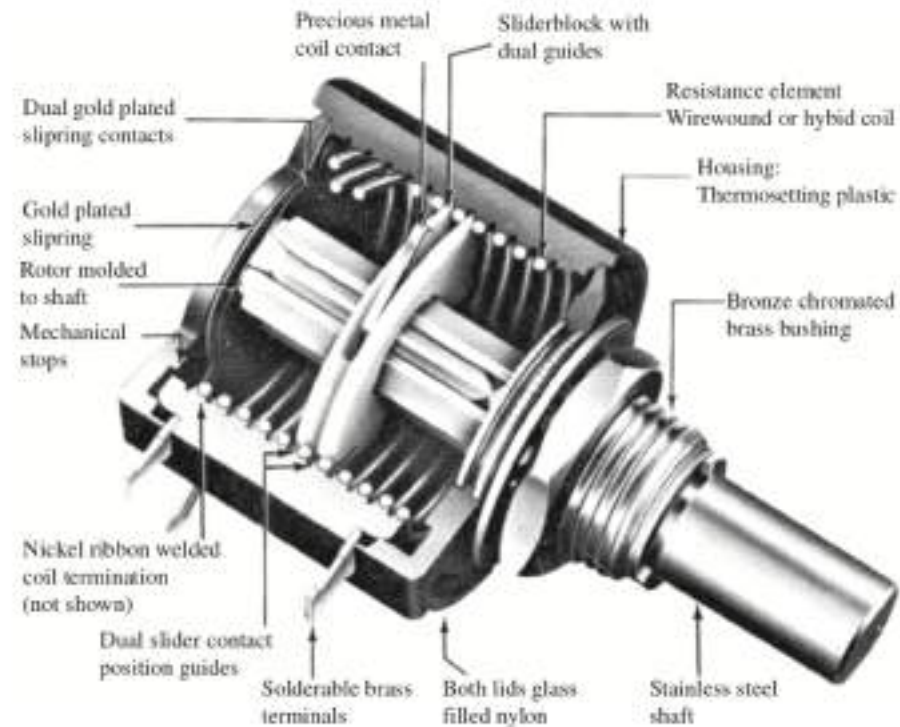
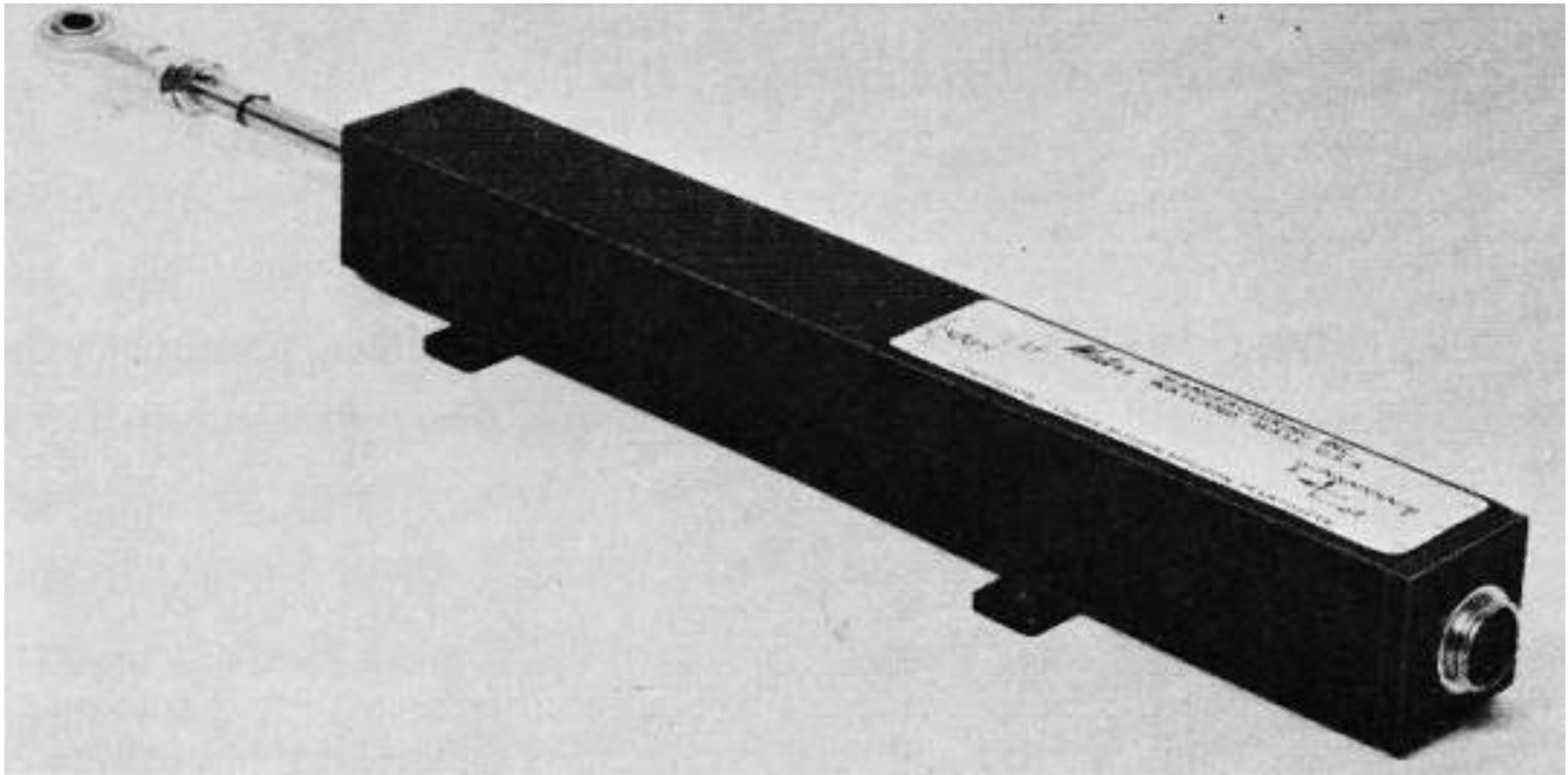


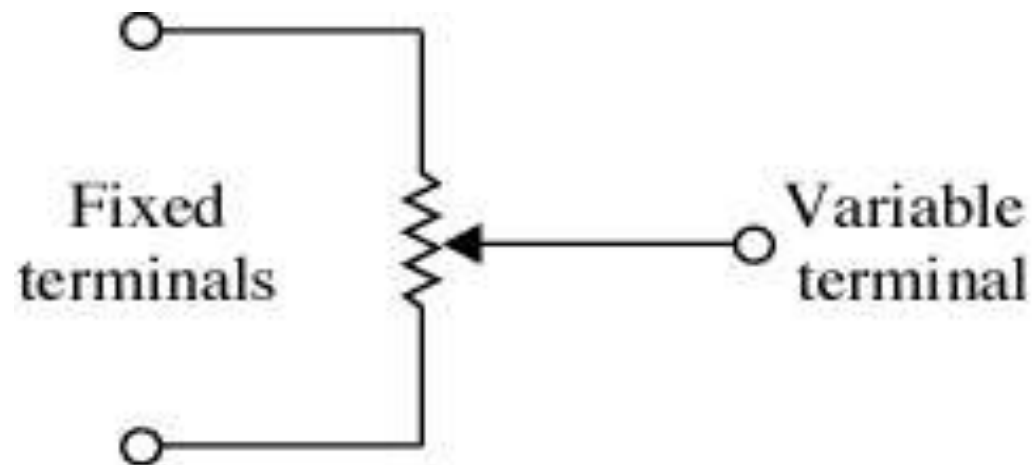
Figure 6-7 Ten-turn rotary potentiometer. (Courtesy of Helipot Division of Beckman Instruments, Inc.)

- 입력은 기계적 변위
- 출력은 입력변위에 비례

**Figure 6-8** Linear motion potentiometer with built-in operational amplifier. (Courtesy of Waters Manufacturing, Inc.)



**Figure 6-9** Electric circuit representation of a potentiometer.

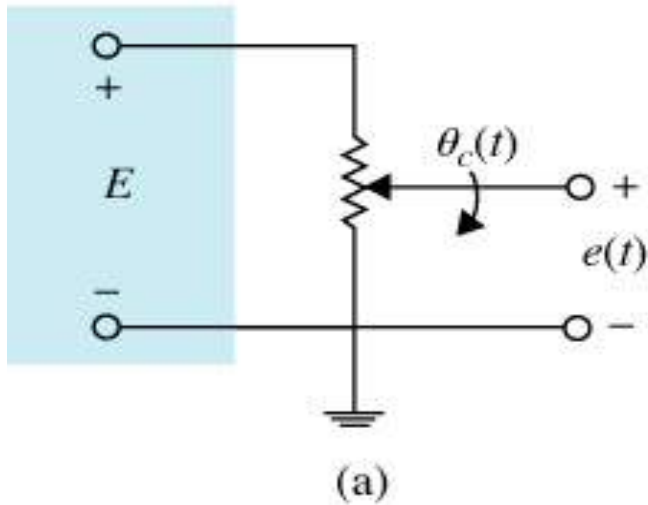


$$e(t) = K_s \theta_c(t)$$

## Figure 6-10

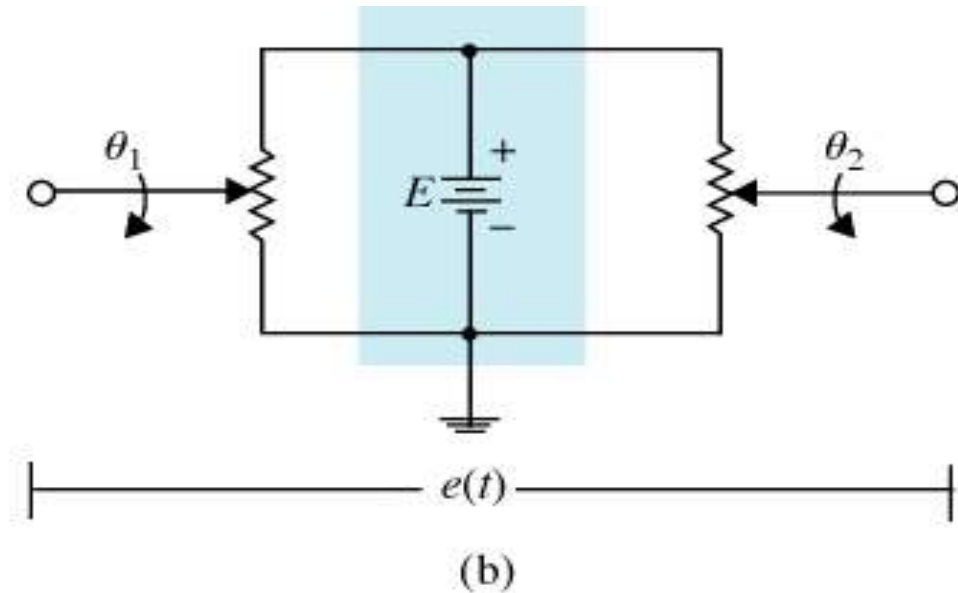
(a) Potentiometer used as a position indicator.

(b) Two potentiometers used to sense the positions of two shafts.



$$e(t) = K_s \theta_c(t)$$

$$K_s = \frac{E}{2\pi N}$$

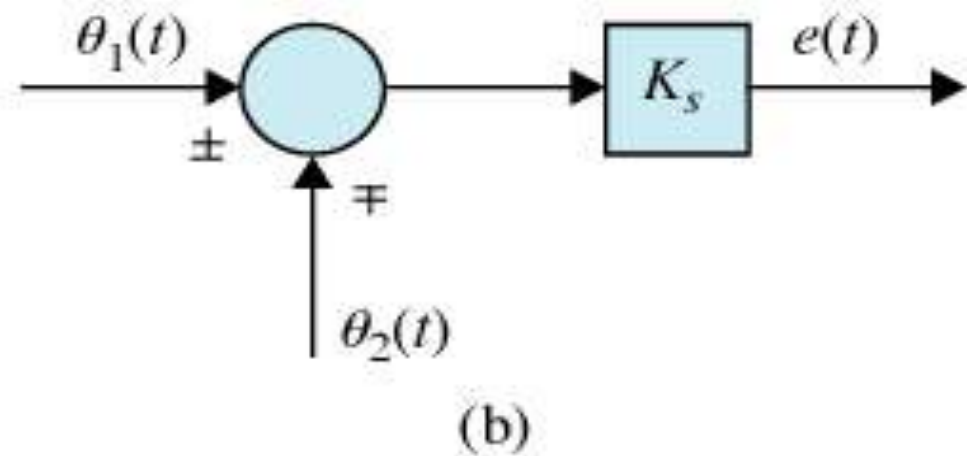
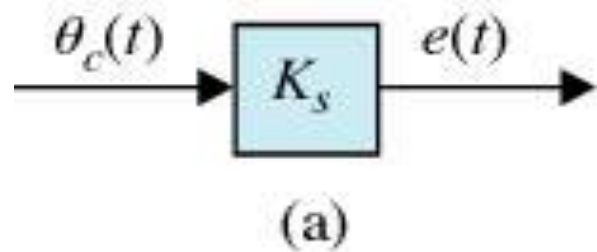


$$e(t) = K_s [\theta_1(t) - \theta_2(t)]$$



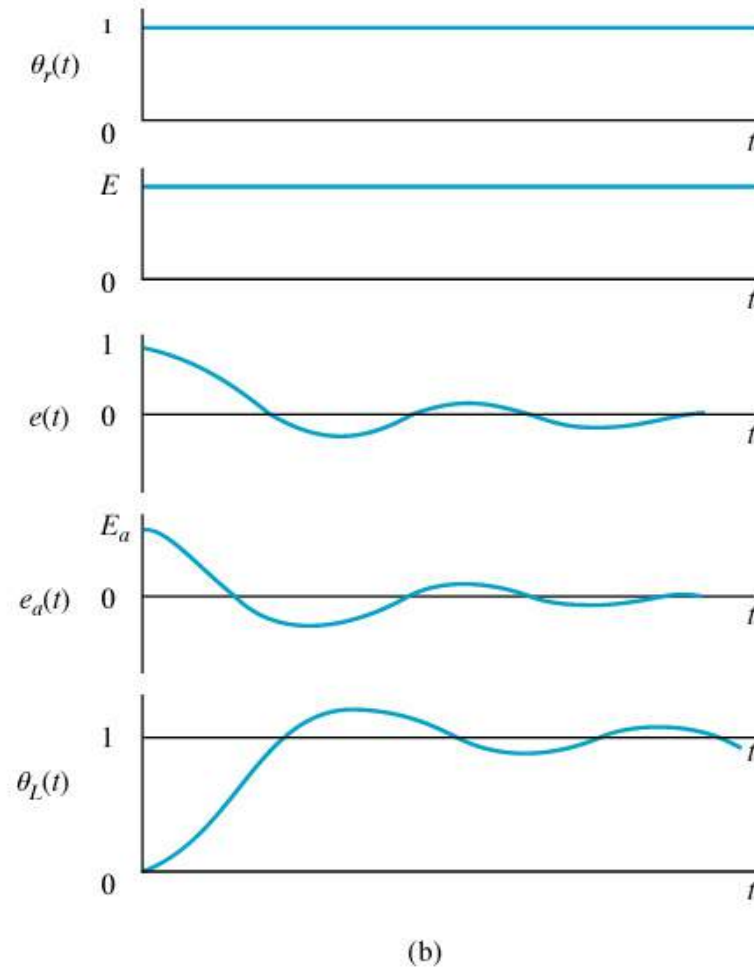
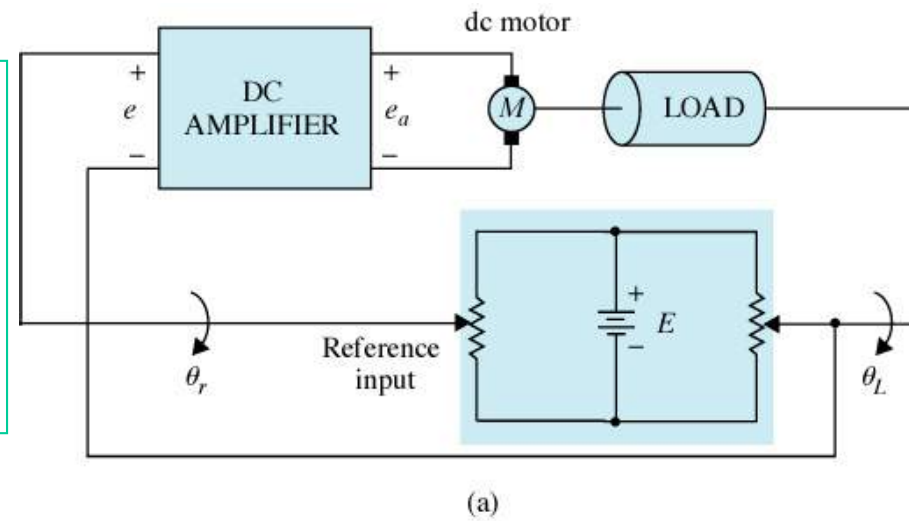
## Figure 6-11

Block diagram representation of potentiometer arrangements in Fig. 6-10



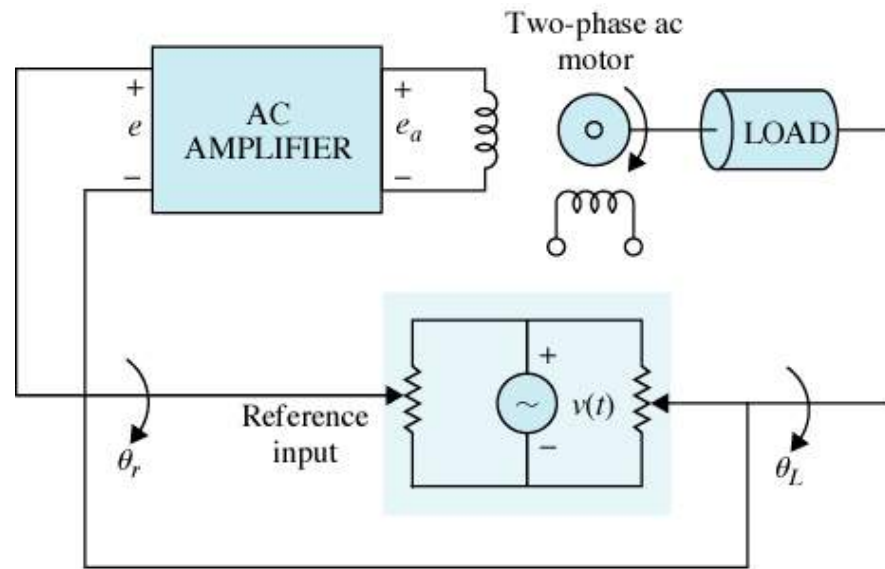
## Figure 6-12

(a) A dc-motor, position-control system with potentiometers as error sensors.  
 (b) Typical waveforms of signals in the control system of part (a).

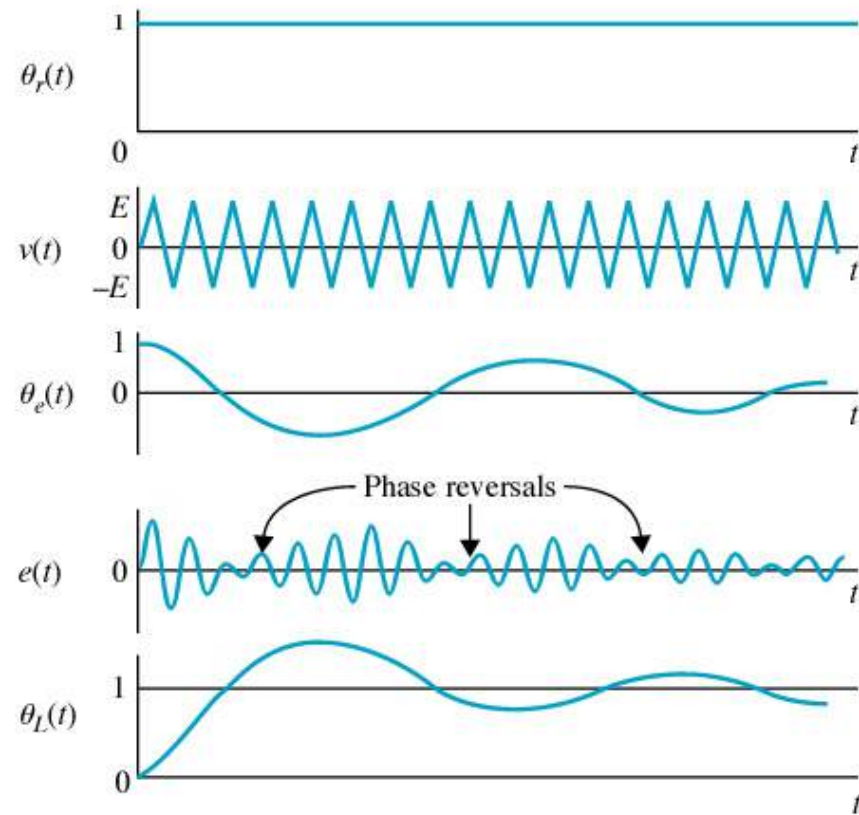


## Figure 6-13

(a) An ac-control system with potentiometers as error detectors.  
 (b) Typical waveforms of signals in the control system of part (a).



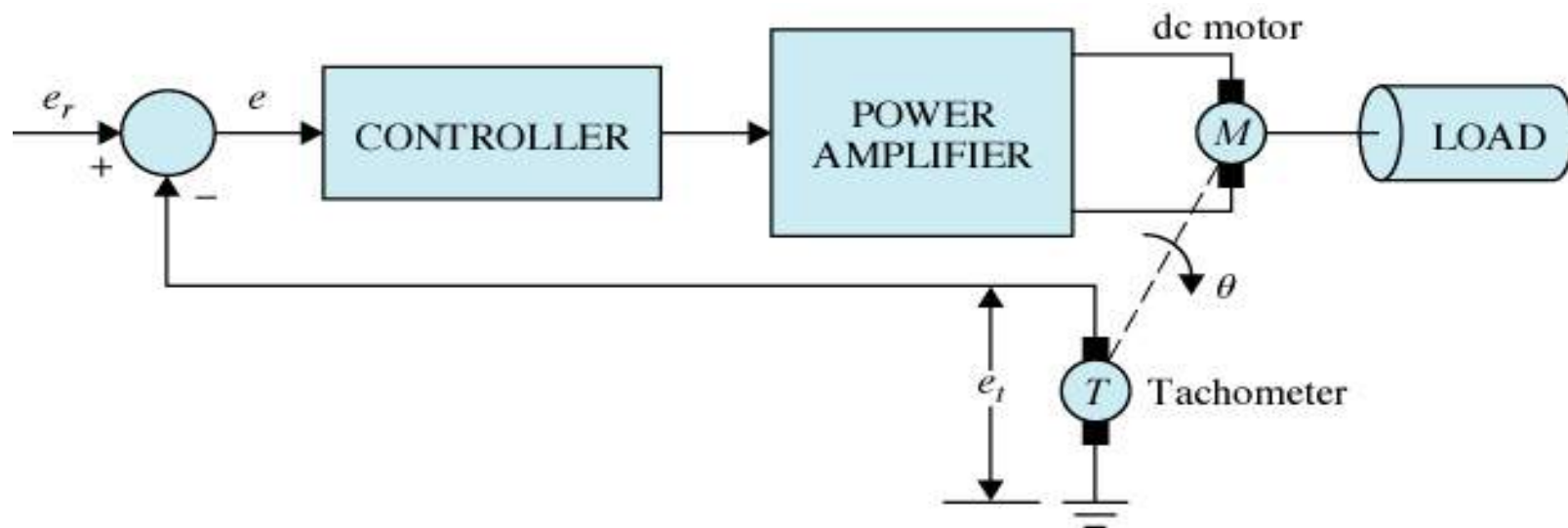
(a)



(b)

# Tachometers

- Electromechanical devices that convert mechanical energy into electrical energy. The device works essentially as a voltage generator, with the output voltage proportional to the magnitude of the angular velocity of the input shaft
- 출력전압은 입력축의 각속도의 크기에 비례



$$e(t) = K_t \frac{d\theta(t)}{dt} = K_t \omega(t) \qquad \frac{E_t(s)}{\Theta(s)} = K_t s$$

## Figure 6-15

Position-control system with tachometer feedback.

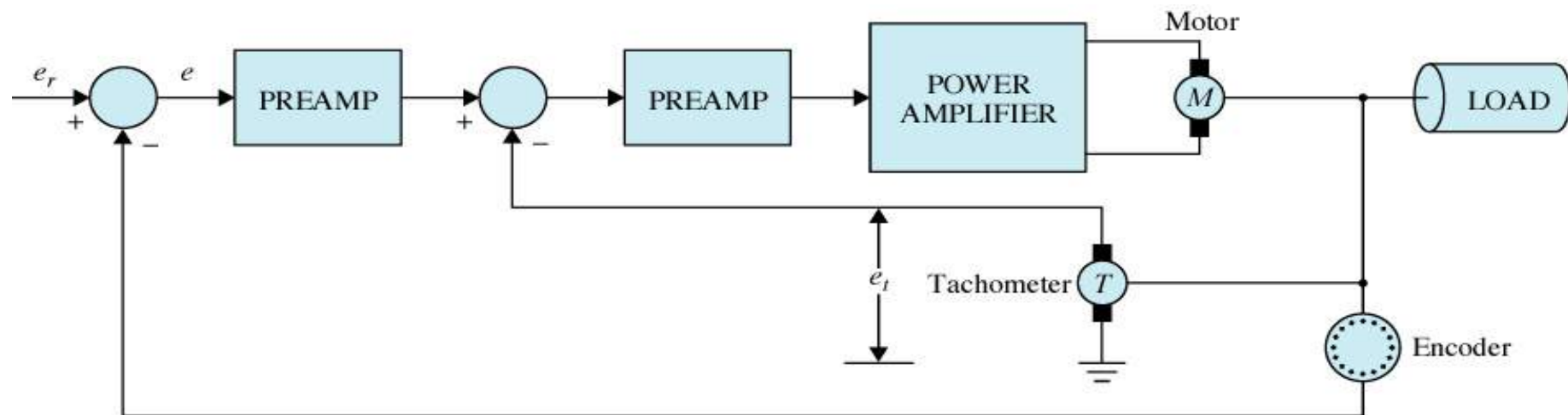




Figure 6-16 Rotary incremental encoder. (Courtesy of DISC Instruments, Inc.)

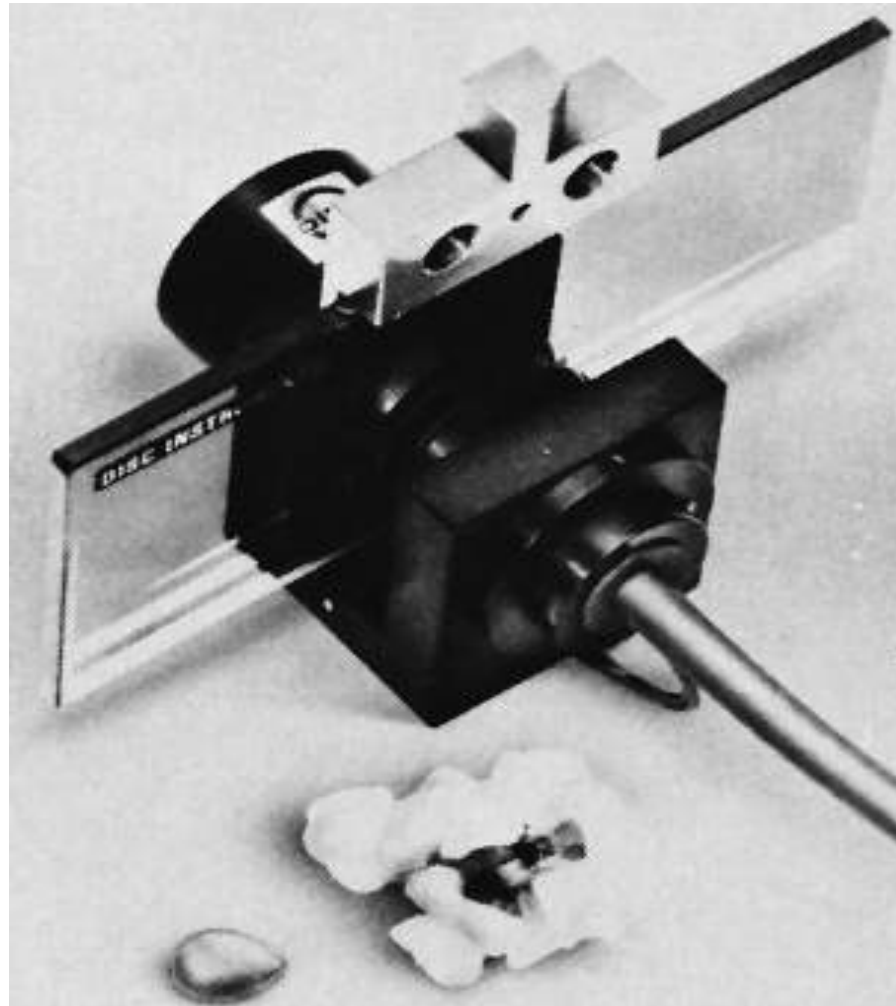
- 직선 또는 회전변위를 디지털부호 또는 펄스신호로 변환
- 절대부호기(absolute encoder)
- 증분부호기(*incremental encoder*)

## **Figure 4-32 (p. 101)**

Linear incremental encoder (courtesy of DISC Instruments, Inc.).

## Figure 6-17

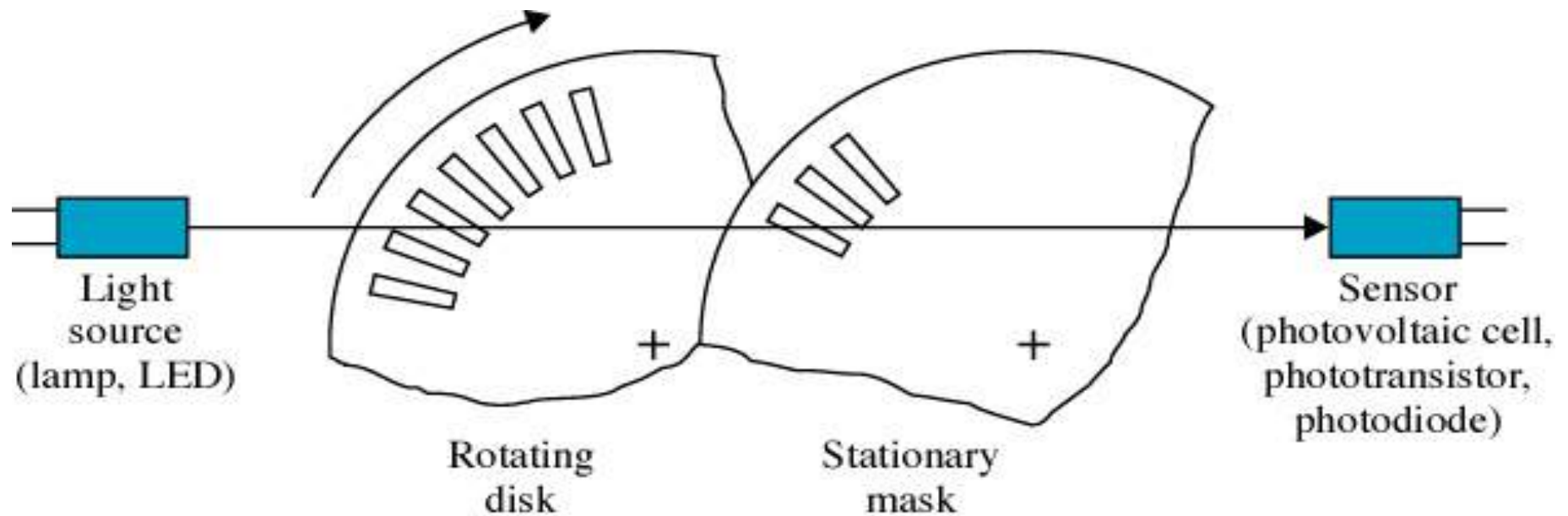
Linear incremental encoder (courtesy of DISC Instruments, Inc.).





## Figure 6-18

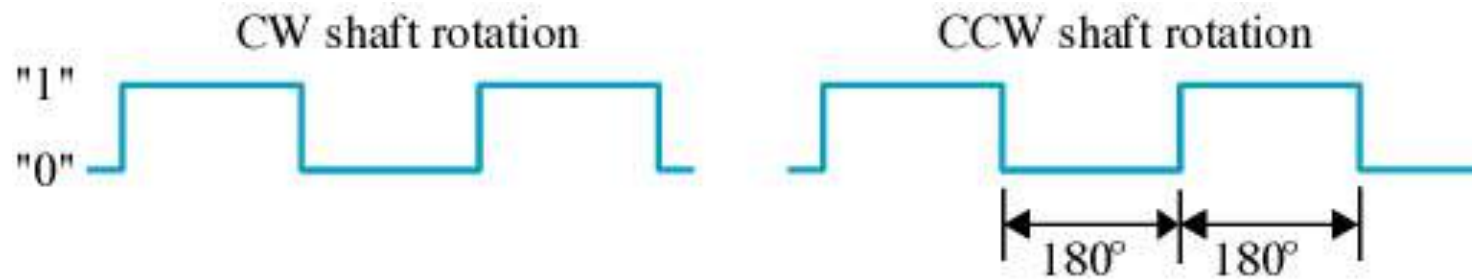
Typical incremental optomechanics.



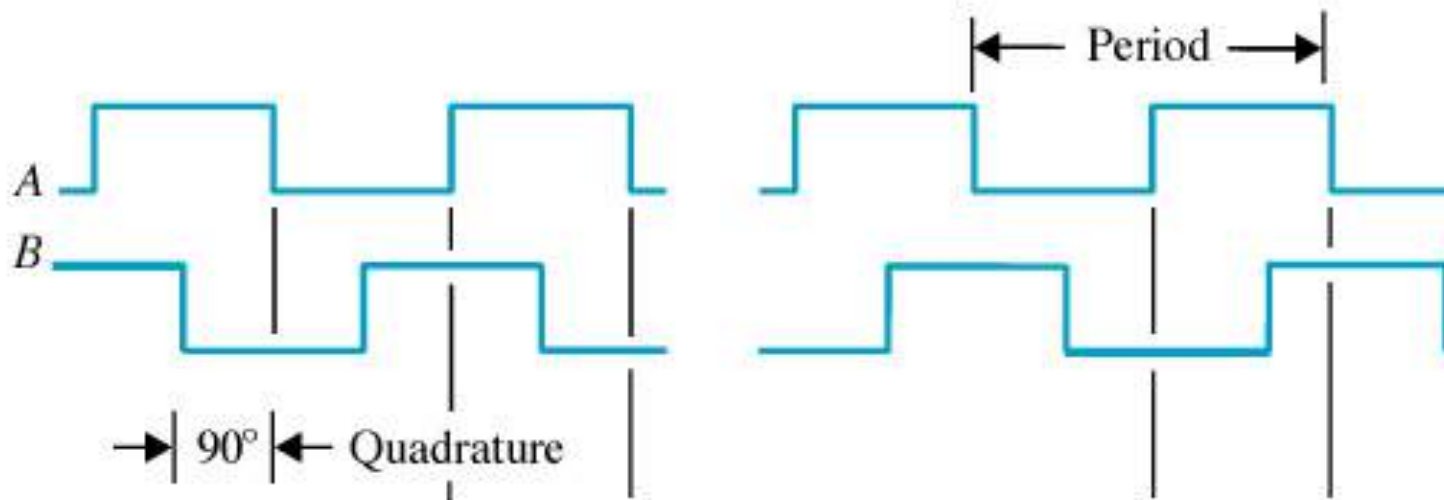
## Figure 6-19

(a) Typical rectangular output waveform of a single-channel encoder device (bidirectional).

(b) Typical dual-channel encoder signals in quadrature (bidirectional).



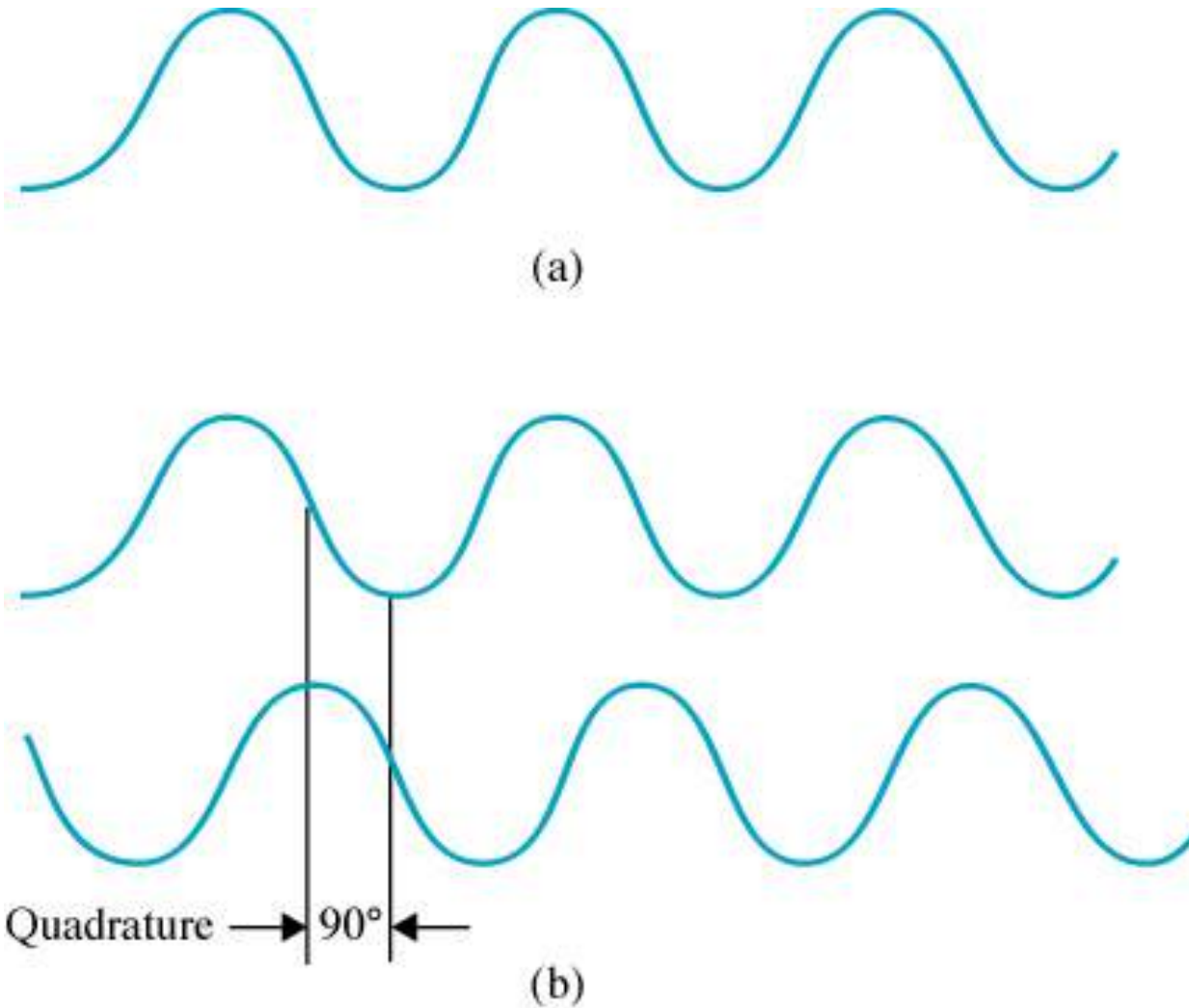
(a)



(b)

## Figure 6-20

- (a) Typical sinusoidal output waveform of a single-channel encoder device.  
(b) Typical dual-channel encoder signals in quadrature.



## 6-3 DC 모터

- 기본동작원리

$$T_m = K_m \phi i_a$$

- 역기전력

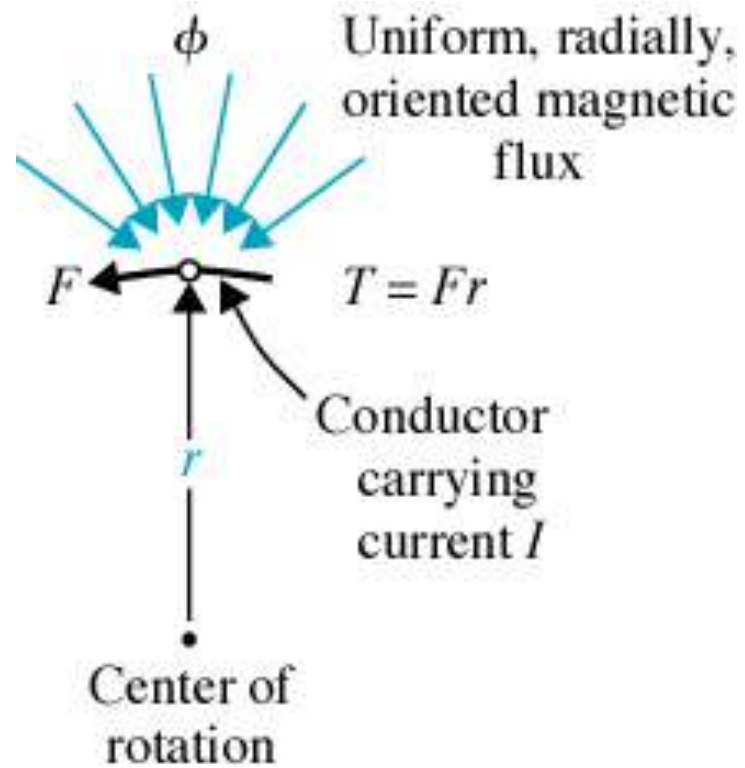
$$e_b = K_m \phi \omega_m$$

- 기본분류

- 철심 PM dc 모터
- 표면권선 dc 모터
- 가동코일 dc 모터
- 무브러시 dc 모터

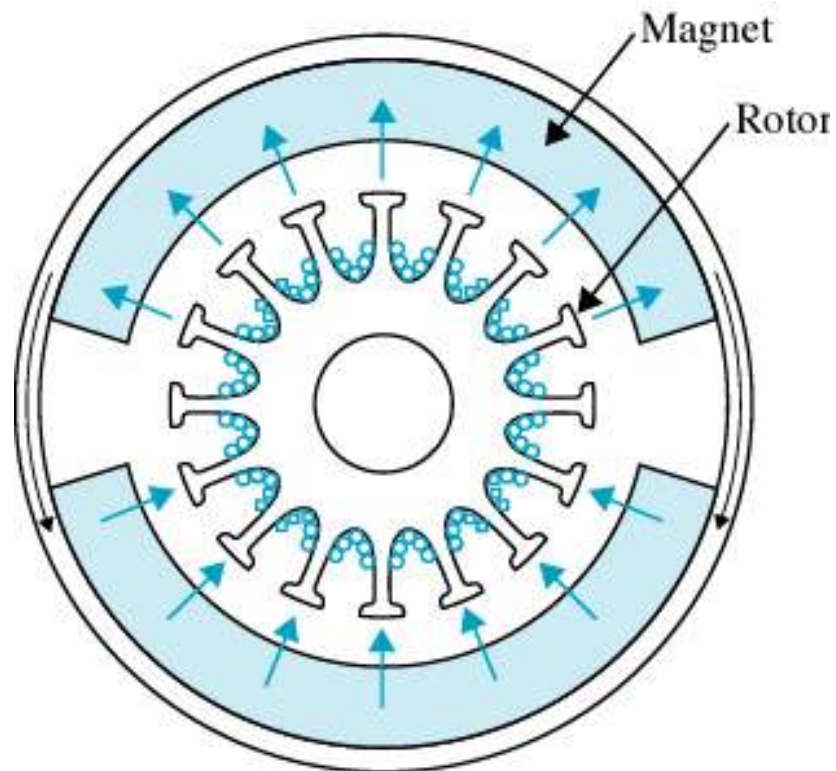
## Figure 6-22

Torque production in a dc motor.



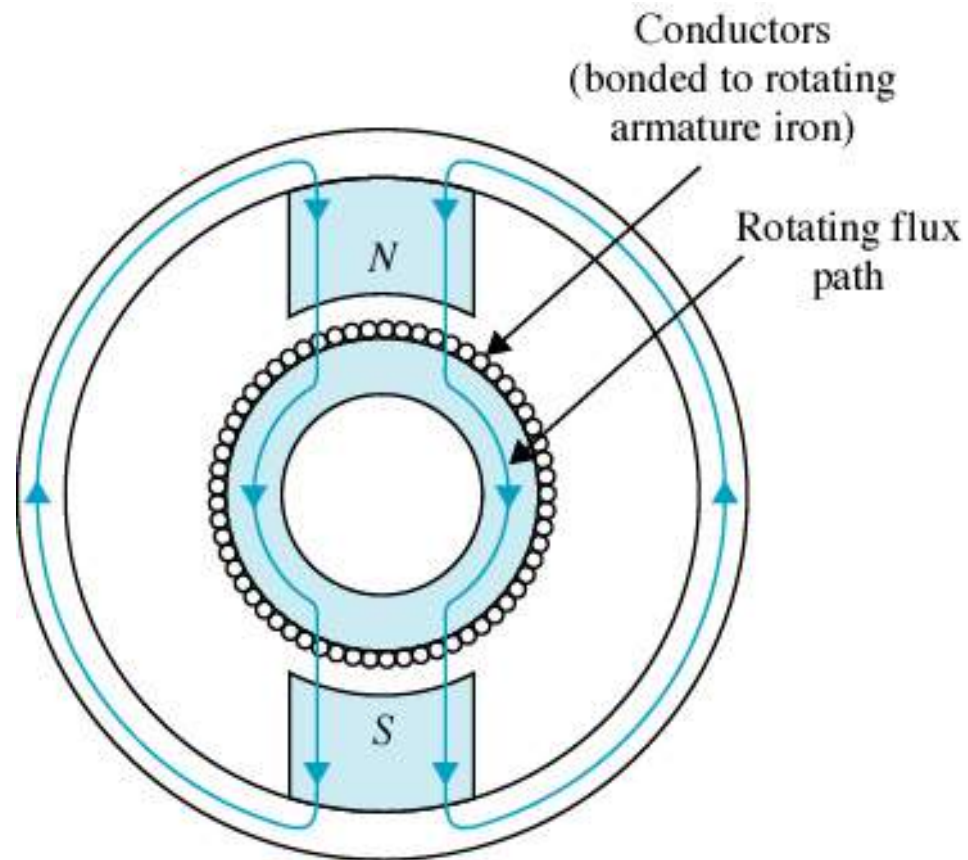
## Figure 6-23

Cross-section view of a permanent-magnet (PM) iron-core dc motor.



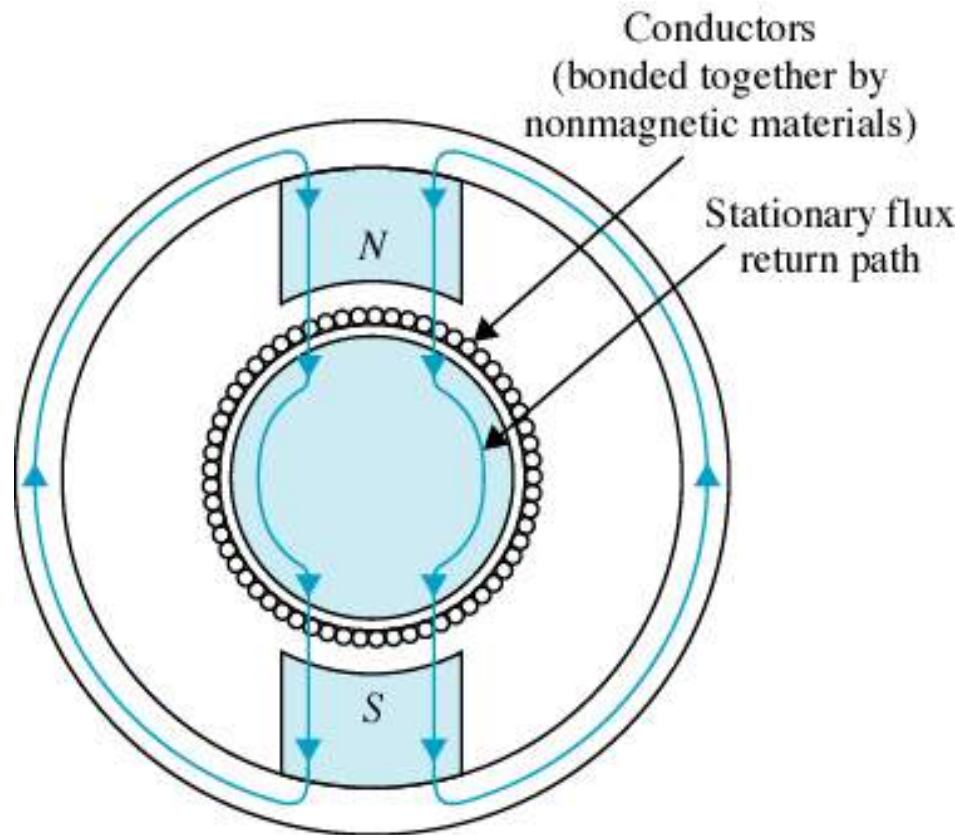
## Figure 6-24

Cross-section view of a surface-wound permanent-magnet (PM) dc motor.



## Figure 6-25

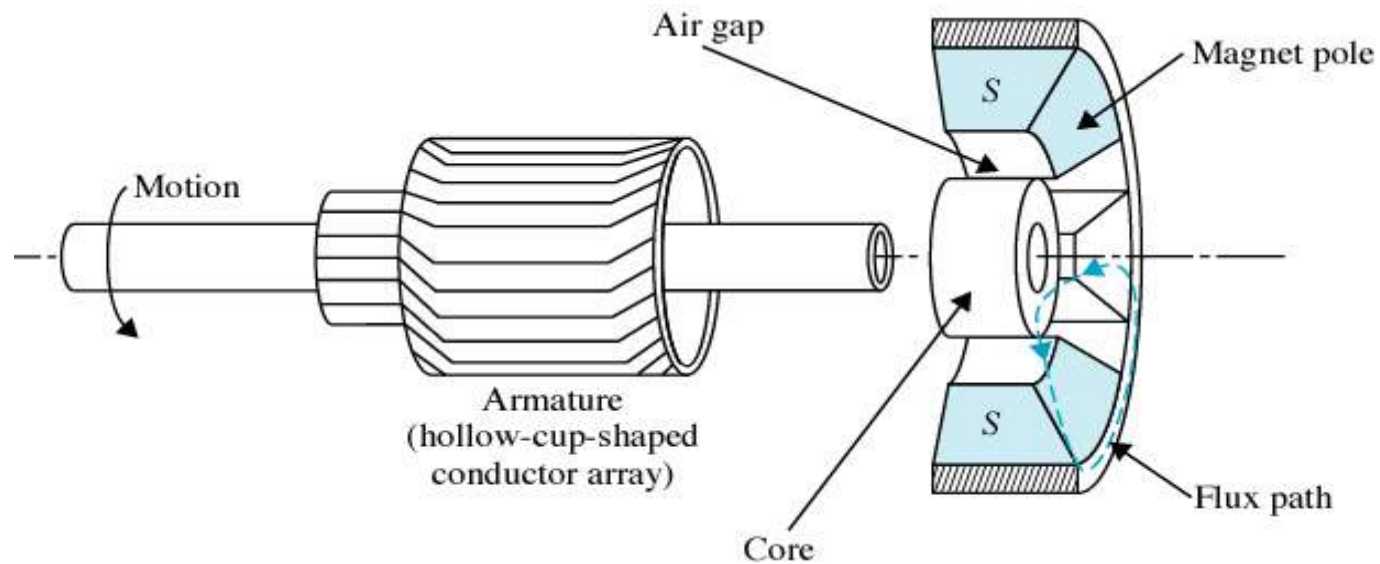
Cross-section view of a surface-wound permanent-magnet (PM) dc motor.





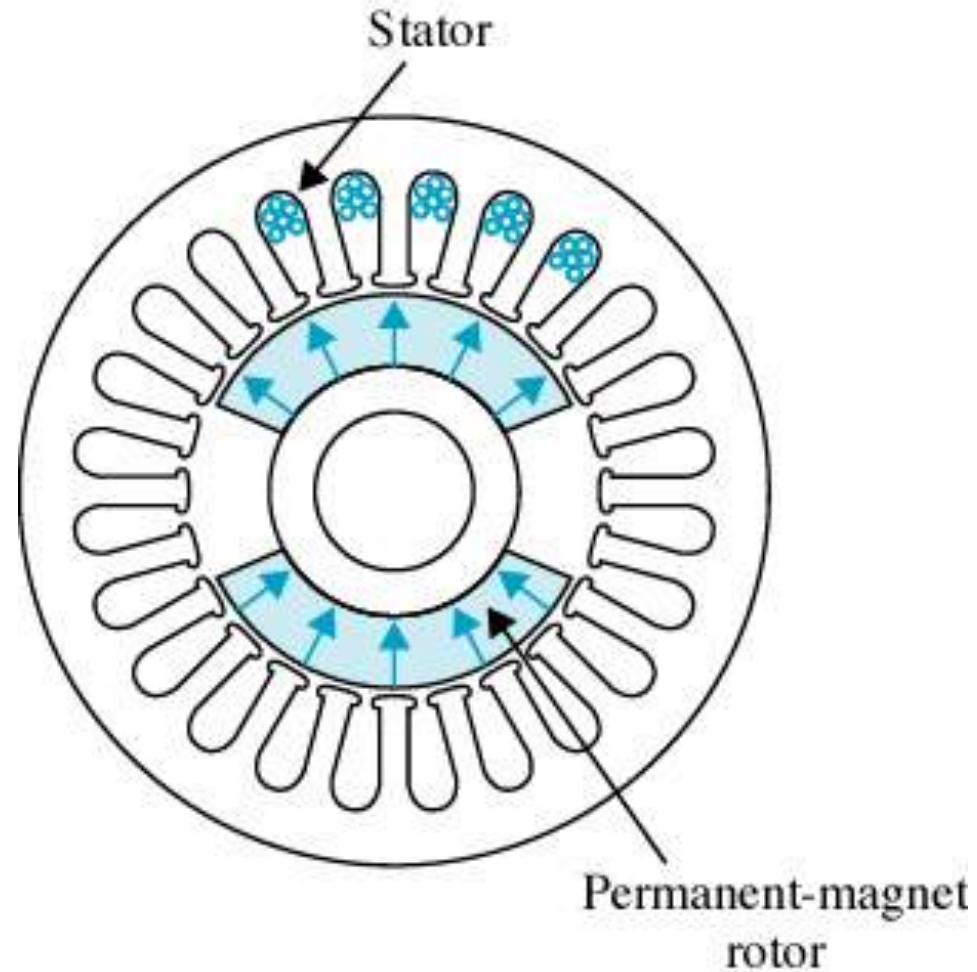
## Figure 6-26

Cross-section side view of a moving-coil dc motor.

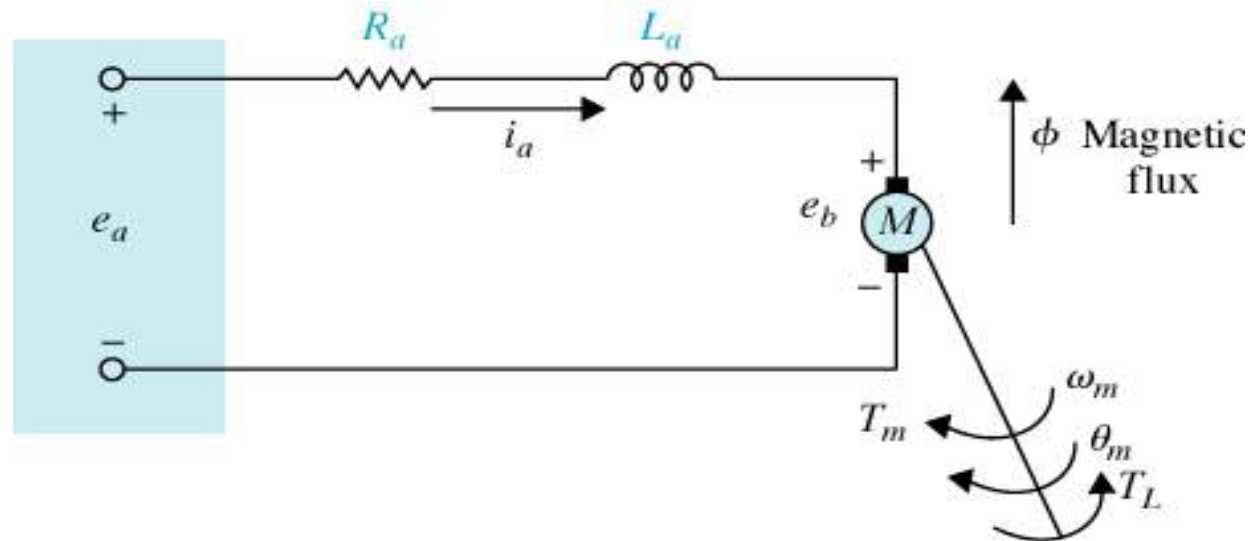


## Figure 6-27

Cross-section view of a brushless, permanent-magnet (PM) iron-core dc motor.



# 영구자석형 dc 모터의 수학적 모델링



$i_a(t)$  = 전기자전류

$R_a$  = 전기자저항

$e_b(t)$  = 역기전력

$T_L(t)$  = 부하토크

$T_m(t)$  = 전동기토크

$\theta_m(t)$  = 회전자변위

$K_t$  = 토크정수

$L_a$  = 전기자인덕턴스

$e_a(t)$  = 인가전압

$K_b$  = 역기전력정수

$\phi$  = 공극에서의 자속

$\omega_m(t)$  = 회전자각속도

$J_m$  = 회전자관성

$B_m$  = 점성마찰계수

$i_a(t)$  = armature current

$R_a$  = armature resistance

$e_b(t)$  = back emf

$T_L(t)$  = load torque

$T_m(t)$  = motor torque

$\theta_m(t)$  = rotor displacement

$K_t$  = torque constant

$L_a$  = armature inductance

$e_a(t)$  = applied voltage

$K_b$  = back-emf constant

$\phi$  = magnetic flux in the air gap

$\omega_m(t)$  = rotor angular speed

$J_m$  = rotor inertia

$B_m$  = viscous-damping coefficient

$$T_m(t) = K_m \phi i_a(t)$$

$\phi$ 는 일정하므로

$$T_m(t) = K_i i_a(t)$$

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{1}{L_a} e_b(t)$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t)$$

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_b \omega_m(t)$$

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = \frac{1}{J_m} T_m(t) - \frac{1}{J_m} T_L(t) - \frac{B_m}{J_m} \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$sI_a(s) = \frac{1}{L_a} E_a(s) - \frac{R_a}{L_a} I_a(s) - \frac{1}{L_a} E_b(s)$$

$$T_m(s) = K_i I_a(s)$$

$$E_b(s) = K_b s \Theta_m(s) = K_b \Omega_m(s)$$

$$s^2 \Theta_m(s) = \frac{1}{J_m} T_m(s) - \frac{1}{J_m} T_L(s) - \frac{B_m}{J_m} s \Theta_m(s)$$

Taking Laplace  
transform

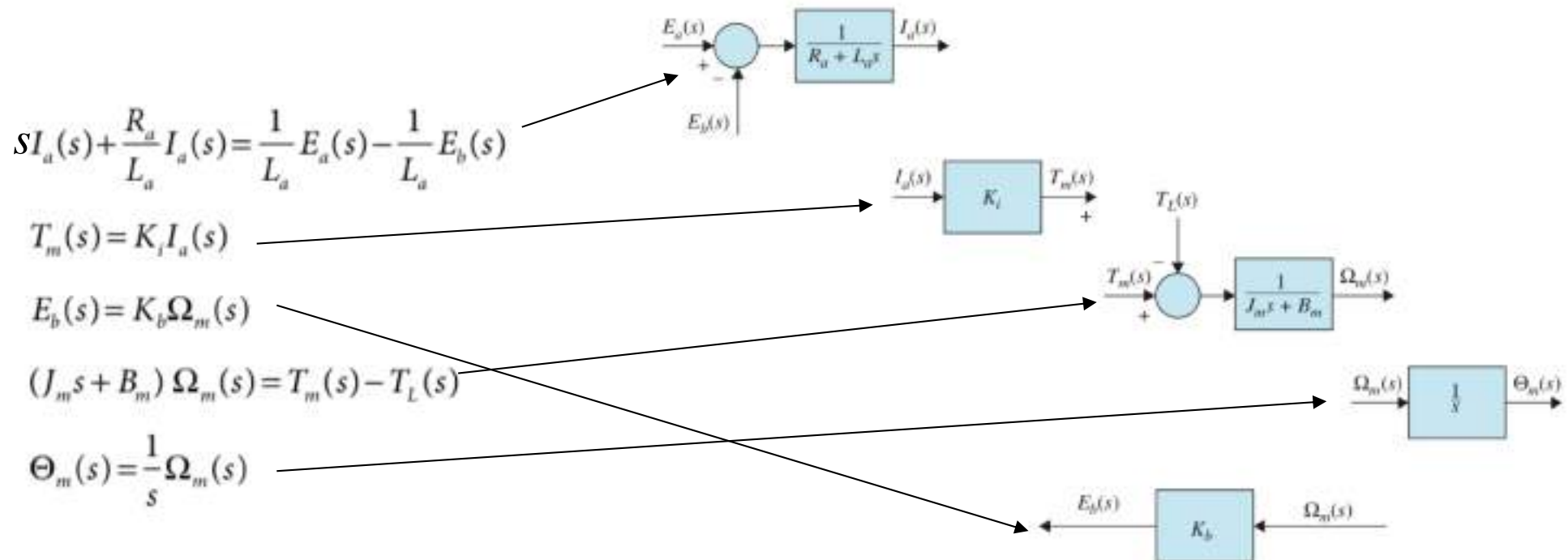
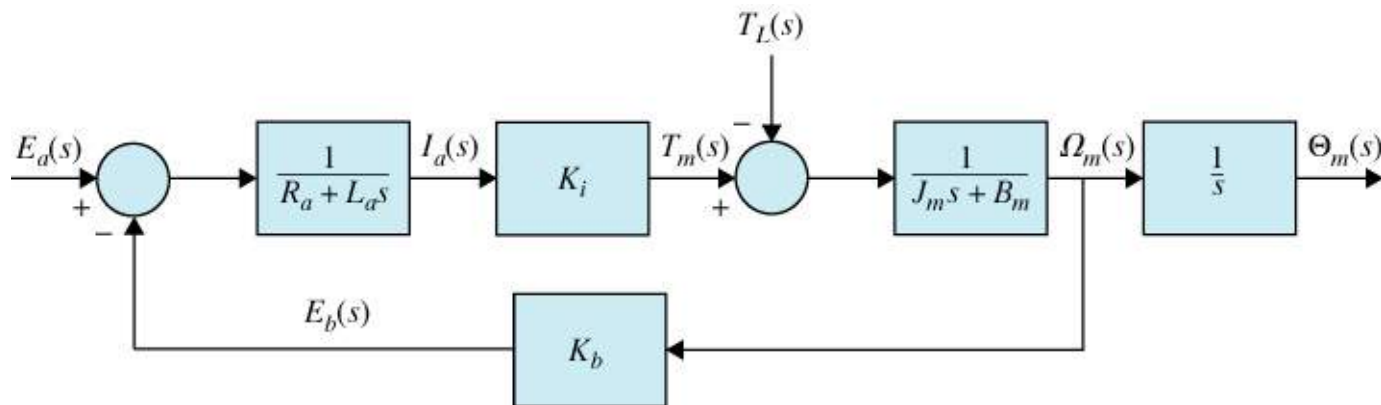
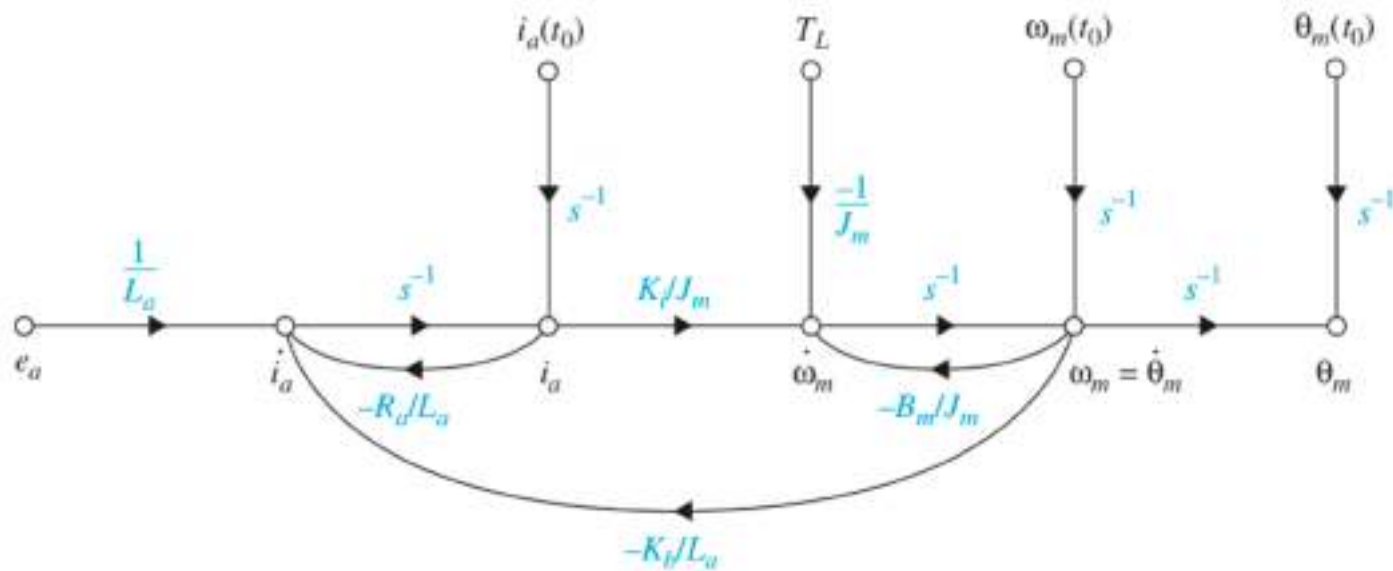


Figure 6-29 Individual block diagram representation of Eqs. (6-31) through (6-35).



$$\frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a) s^2 + (K_b K_i + R_a B_m) s}$$

Because an  $s$  can be factored out of the denominator, *the significance of the transfer function  $\Theta_m(s)/E_a(s)$  is that the dc motor is essentially an integrating device between these two variables.* This is expected because, if  $e_a(t)$  is a constant input, the output motor displacement will behave as the output of an integrator; that is, it will increase linearly with time.



**Figure 6-31** Signal-flow graph diagram of a dc-motor system with nonzero initial conditions.

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} T_L(t)$$

The **state variables** of the system can be defined as  $i_a(t)$ ,  $\omega_m(t)$ , and  $\theta_m(t)$ .



# DC 모터의 속도 및 위치제어

$R_a$  = 전기자 저항, ohm

$L_a$  = 전기자 인덕턴스, henry

$e_a$  = 전기자에 인가된 전압, volt

$e_b$  = 역기전력, volt

$\theta$  = 모터축의 각변위, radian

$T$  = 모터에서 발생된 토크,  $N\cdot m$

$J_L$  = 부하의 관성 모멘트,  $kg\cdot m^2$

$T_L$  = 외란으로 간주되는 외부부하토크,  $N\cdot m$

$J_m$  = 모터의 관성모멘트(모터축),  $kg\cdot m^2$

$J$  = 모터축에 부하가 연결된 모터 및 부하의 등가 관성모멘트,  $J = J_L/n^2 + J_m$ ,  
 $kg\cdot m^2$ (자세한 내용은 4장 참조)

$n$  = 기어비

$B$  = 모터축에 부하가 연결된 모터 및 부하의 등가 선형마찰력,  $N\cdot m/rad/sec$ (기  
 어비가 있는 경우에  $B$ 는  $n$ 으로 나누어짐)

$K_t$  = 속도센서(일반적으로 회전속도계) 이득

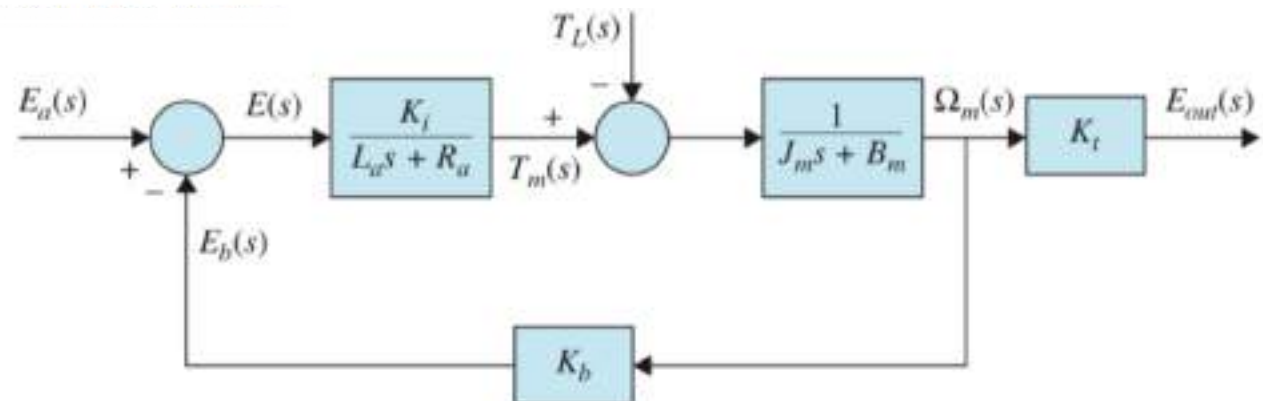
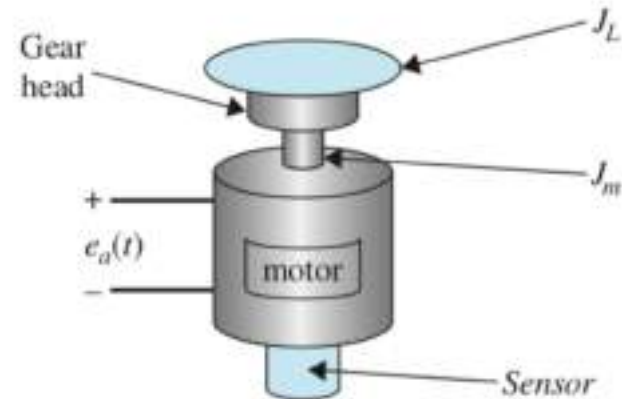


Figure 6-33 Block diagram of an armature-controlled dc motor.



- 외란 토크  $T_L$ 과 같은 발생가능한 외부부하(예: 과즙기계에서 사용자가 과일을 누르는 힘)의 영향을 포함하고 있다. 이 시스템은 입출력 형태로 볼 수 있으며,  $E_a(s)$ 는 입력이고  $\Omega(s)$ 는 출력이다.

$$\Omega_m(s) = \frac{\frac{K_i}{R_a J_m}}{\left(\frac{L_a}{R_a}\right)s^2 + \left(1 + \frac{B_m L_a}{R_a J_m}\right)s + \frac{K_i K_b + R_a B_m}{R_a J_m}} E_a(s) - \frac{\left\{1 + s\left(\frac{L_a}{R_a}\right)\right\} / J_m}{\left(\frac{L_a}{R_a}\right)s^2 + \left(1 + \frac{B_m L_a}{R_a J_m}\right)s + \frac{K_i K_b + R_a B_m}{R_a J_m}} T_L(s)$$

$L_a/R_a$ 는 모터의 전기 시정수라 불리며 시스템의 속도응답 전달함수가 2차가 되도록 하며,  $\tau_e$ 로 표현된다. 또한 외란 출력 전달함수에 영점을 추가시킨다. 그렇지만 4장에서 논의했듯이 전기자회로의  $L_a$ 는 매우 작기 때문에  $\tau_e$ 는 무시할 수 있으며, 결과적으로 단순화된 전달함수와 시스템의 블록선도를 얻게 된다. 따라서 모터축 속도는 다음과 같이 간략화된다.

$$\Omega_m(s) = \frac{\frac{K_i}{R_a J_m}}{s + \frac{K_i K_b + R_a B_m}{R_a J_m}} E_a(s) - \frac{\frac{1}{J_m}}{s + \frac{K_i K_b + R_a B_m}{R_a J_m}} T_L(s) \quad (6-47)$$

또는

$$\Omega_m(s) = \frac{K_{eff}}{\tau_m s + 1} E_a(s) - \frac{\frac{\tau_m}{J_m}}{\tau_m s + 1} T_L(s) \quad (6-48)$$

여기서  $K_{eff} = K_m/(R_a B + K_m K_b)$ 는 모터 이득상수이고,  $\tau_m = R_a J_m/(R_a B + K_m K_b)$ 는 모터의 기계 시정수이다.

중첩의 원리를 사용하면

$$\Omega(s) = \Omega(s)|_{T_L(s)=0} + \Omega(s)|_{V_a(s)=0} \quad (5-117)$$

를 구할 수 있다. 응답  $\omega(t)$ 를 구하기 위해, 중첩의 원리를 사용하고 개별적인 입력에 따른 응답을 구한다.  $T_L = 0$ (외란이 없고  $B = 0$ )에 대하여 전압  $v_a(t) = A[V_a(s) = A/s]$ 를 적용하면  $\omega(t)$ 는 다음과 같다.

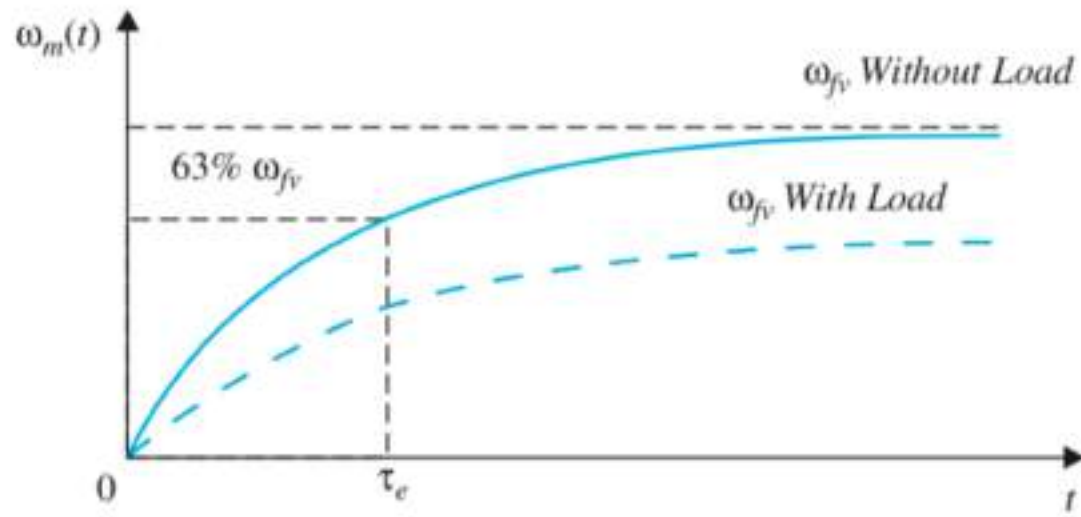
$$\omega(t) = \frac{A}{K_b} (1 - e^{-t/\tau_m}) \quad (5-118)$$

이 경우 모터의 기계 시정수  $\tau_m$ 은 모터가 관성  $J_m$ 을 가지고 얼마나 빨리 전압  $v_a$ 에 대한 정상상태에 이르는지 또는 정속도에 도달하는지를 결정하는 능력을 반영한다는 것을 기억하라. 식 (5-118)에서 속도의 최종치는  $\omega(t) = A/K_b$ 이다.  $\tau_m$ 이 증가함에 따라 정상상태에 도달하는 데 걸리는 시간이 길어진다.

만약 크기가  $D$ 인 일정한 부하토크( $T_L = D/s$ )를 시스템에 인가할 경우 속도응답 식 (5-118)은

$$\omega(t) = \frac{1}{K_b} \left( A - \frac{R_a D}{K_m} \right) (1 - e^{-t/\tau_m}) \quad (5-119)$$

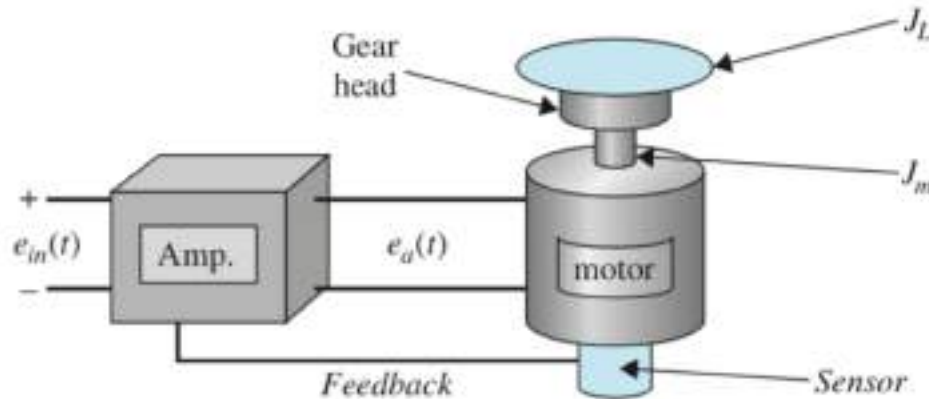
와 같이 변경된다. 이것은 외란  $T_L$ 이 모터의 최종 속도에 영향을 주는 것을 명백하게 보여 준다. 식 (5-119)로부터 구한 모터의 정상상태 속도는  $\omega_{fv} = \frac{1}{K_b} (A - \frac{R_a D}{K_m})$ 이다. 여기서  $\omega(t)$ 의 최종치는  $R_a D / K_m K_b$ 에 의해 감소된다. 실제로는  $T_L = D$  값이 절대 모터 실속(stall) 토크를 초과하지 않아야 한다는 것이다. 그러므로 모터가 회전하기 위해서는 식 (5-119)로부터  $AK_m/R_a > D$ 이며, 이것은 토크  $T_L$ 의 크기에 한계를 설정한다. 주어진 모터의 실속 토크 값은 제조업체에서 발행하는 모터의 카탈로그에 기록되어 있다.



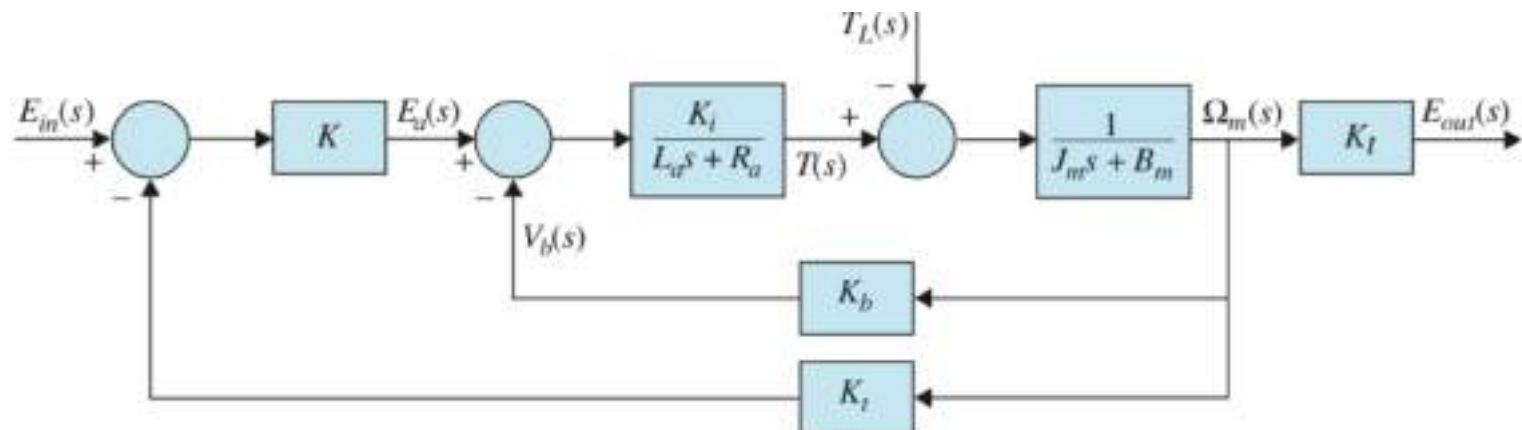
**Figure 6-34** Typical speed response of a dc motor. Solid line represents a no-load response. Dashed line represents the effect of a constant load on the speed response.

# DC 모터의 속도제어: Closed-Loop Response

- 모터의 출력속도는 토크  $T_L$  값에 의해 결정된다. 모터의 속도 성능은 비례피드백 제어기를 사용하여 향상시킬 수 있다. 그림 6-35와 같이 제어기는 속도를 감지하는 센서(일반적으로 속도 응용에서는 회전속도계(Tachometer)를 사용)와 이득  $K$ 를 가지는 증폭기(비례제어)로 구성



**Figure 6-35** Feedback control of an armature-controlled dc motor with a load inertia.



**Figure 6-36** Block diagram of a speed-control, armature-controlled dc motor.

$$L_a \approx 0,$$

$$\Omega_m(s) = \frac{\frac{K_t K_i K}{R_a J_m}}{s + \left( \frac{K_i K_b + R_a B_m + K_t K_i K}{R_a J_m} \right)} \Omega_{in}(s) - \frac{\frac{1}{J_m}}{s + \left( \frac{K_i K_b + R_a B_m + K_t K_i K}{R_a J_m} \right)} T_L(s) \quad (6-52)$$

이다. 계단입력  $\Omega_{in} = A/s$ 와 외란 토크값  $T_L = D/s$ 일 경우, 출력은

$$\omega(t) = \frac{AKK_m K_t}{R_a J_m} \tau_c (1 - e^{-t/\tau_c}) - \frac{\tau_c D}{J_m} (1 - e^{-t/\tau_c}) \quad (6-53)$$

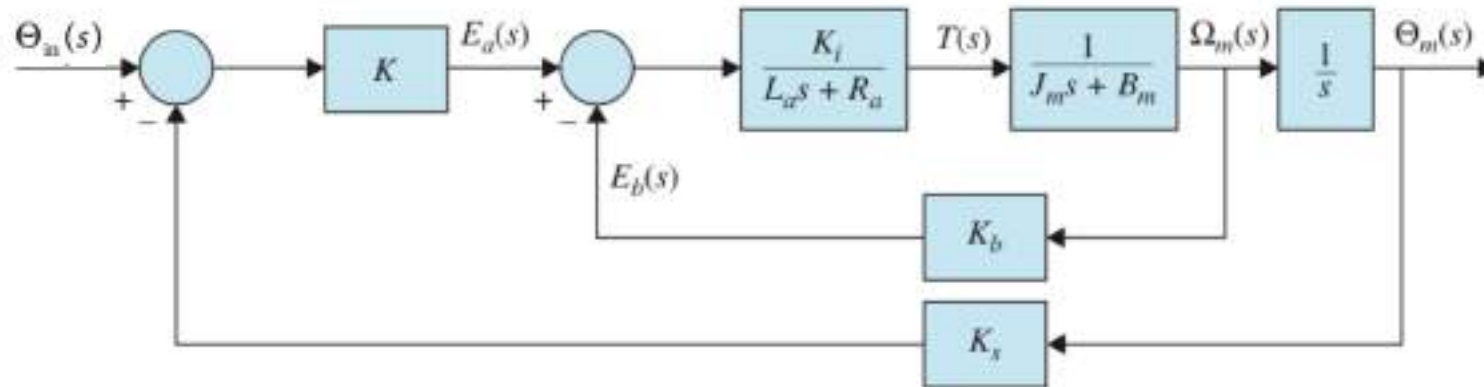
이 된다. 여기서  $\tau_c = \frac{R_a J_m}{K_m K_b + R_a B + K_t K_m K}$ 는 시스템의 기계 시정수이다. 이 경우 정상상태 응답은

$$\omega_{fv} = \left( \frac{AKK_m K_t}{K_m K_b + R_a B + K_t K_m K} - \frac{R_a D}{K_m K_b + R_a B + K_t K_m K} \right) \quad (6-54)$$

이다. 여기서  $K \rightarrow \infty$ 이면  $\omega_{fv} \rightarrow A$ 이다. 따라서 속도제어는 외란의 영향을 줄일 수 있다.



## 위치제어



**Figure 6-37** Block diagram of a position-control, armature-controlled dc motor.

폐루프 위치응답은 속도응답을 적분하여 구할 수 있다. 그림 6-33를 참조하여  $\Theta_m(s) = \Omega_m(s)/s$ 를 구한다. 그러므로 개루프 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{s(L_a J s^2 + (L_a B_m + R_a J)s + R_a B_m + K_i K_b)} \quad (6-55)$$

여기서 전체 관성  $J$ 를 사용한다. 이 경우  $L_a$  값이 작으면 시간응답은

$$\theta_m(t) = \frac{A}{K_b} (t + \tau_m e^{-t/\tau_m} - \tau_m) \quad (6-56)$$

이다. 이것은 모터축이 멈추지 않고 일정한 정상상태 속도로 회전한다는 것을 의미한다.

모터축의 위치제어를 위한 간단한 방법은 이득  $K$ 를 가지는 비례제어기를 사용하는 것이다. 그림 6-37은 페루프시스템의 블록선도를 보여 준다. 시스템은 위치각 센서로 구성되어 있다(일반적으로 위치 응용에서는 인코더나 전위차계를 사용한다). 시스템을 간략화하기 위해 입력전압을 위치입력  $\Theta_{in}(s)$ 의 값에 따라 정하면 입력과 출력은 같은 단위와 비율을 갖게 된다. 또한 출력은 센서의 이득 값을 이용하여 전압으로 변환할 수 있다. 이 경우의 페루프 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_{in}(s)} = \frac{\frac{KK_mK_s}{R_a}}{(\tau_e s + 1) \left\{ J_m s^2 + \left( B + \frac{K_b K_m}{R_a} \right) s + \frac{KK_mK_s}{R_a} \right\}} \quad (6-57)$$

여기서  $K_s$ 는 센서 이득이고  $L_a$ 가 작을 경우  $\tau_e = (L_a/R_a)$ 은 무시할 수 있으므로

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_{in}(s)} = \frac{\frac{KK_iK_s}{R_a J}}{s^2 + \left( \frac{R_a B_m + K_i K_b}{R_a J} \right) s + \frac{KK_iK_s}{R_a J}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6-58)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{R_a B_m + K_i K_b}{R_a J}$$

$$\omega_n^2 = \frac{KK_iK_s}{R_a J}$$



- Upon varying  $K$ , we can directly change  $\omega_n$  and indirectly change  $\zeta$  to achieve a desired response. For a positive  $K$ , regardless of the type of response (e.g., critically damped or underdamped), the final value of the system is  $\theta_{fv} = 1$ , which implies that the output will follow the input (recall we used a unit step input). Hence, the position will not increase as in the uncontrolled system that is represented by Eq. (6-56).