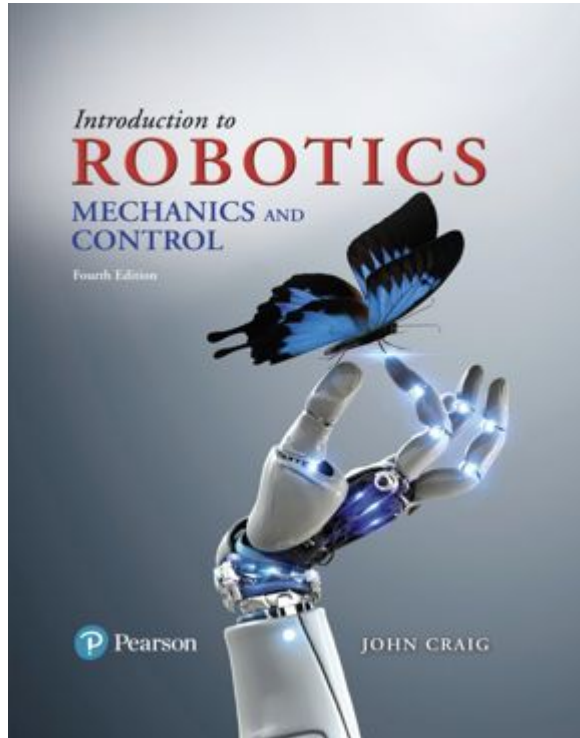


Introduction to Robotics

Mechanics and Control

4th Edition



Chapter 7

궤도 생성 (Trajectory generation)

7.1 개요

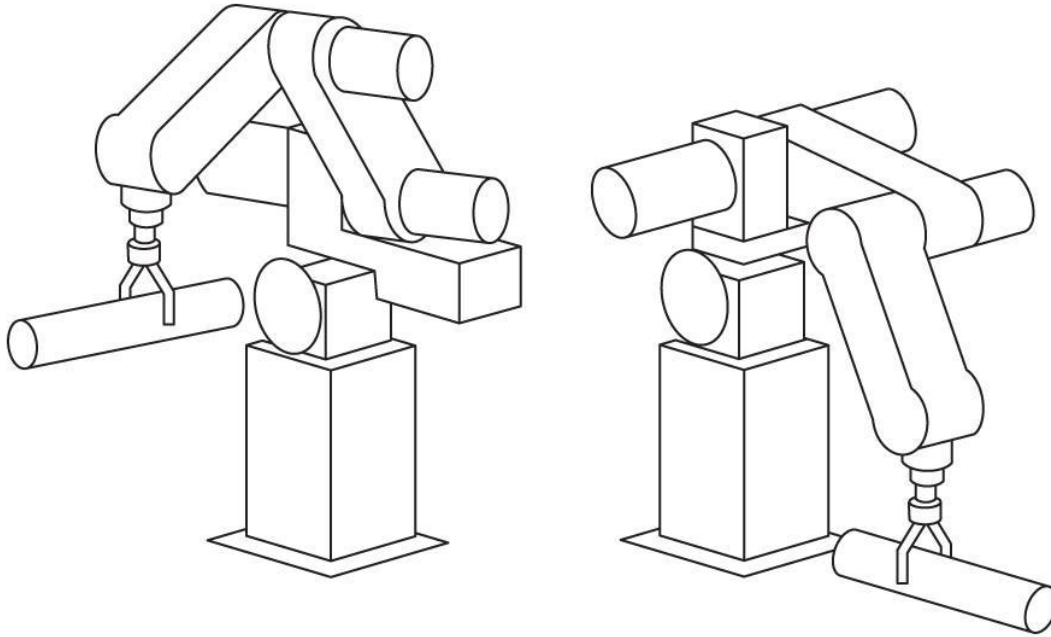
- 본 장에서는 머니플레이터의 원하는 동작을 표시하기 위하여 다차원 공간 내에서도 궤도(**trajectory**)를 계산하는 방법을 설명함
- 궤도 생성의 문제에는 공간상에서 궤도 혹은 경로(**path**)를 우리가 어떻게 명시하고자 하는가 하는 인간과의 인터페이스 문제가 포함된다. 머니플레이터 운동의 표시를 로봇 시스템 이용자에게 쉽게 하기 위해서는 작업 명시를 위한 시간과 공간상의 복잡한 함수를 작성하는 일을 사용자에게 하도록 하면 안 된다. 그보다는 원하는 운동을 간단히 기술하는 것만으로 궤도를 명시할 수 있는 능력을 갖도록 하고, 자세한 것은 시스템이 해석하도록 해야 한다 예를 들면 사용자는 원하는 목표의 위치와 말단 효과 장치의 방위만을 지정하고, 목표 위치까지의 정확한 경로, 경과 시간, 속도의 프로파일(**profile**) 등과 같은 자세한 사항은 시스템이 결정하도록 한다
- 경로 채신율(**path update rate**)은 20~ 200Hz사이의 값으로 함

7.2 경로의 표시와 생성에 관한 일반적인 고려

- 대부분의 경우에 머니플레이터의 운동을 정지계 $\{S\}$ 에 관한 공구계 $\{T\}$ 의 운동으로 간주
 - 운동의 표시가 로봇이나 말단 효과 장치 혹은 가공물과 상관 없어짐
 - 서로 다른 머니플레이터에 같은 경로 표시를 가능하게 하거나, 서로 크기가 다른 공구에 같은 머니플레이터를 사용 가능
 - 정지계에 관하여 운동을 계획함으로써 움직이는 작업장(예를 들면, 컨베이어 벨트)에 관하여 운동을 계획하고 명시 가능
 - $\{S\}$ 를 운동 중에 시간에 따라 변화시킬 수 있음
- 머니플레이터를 이용해서 수행해야 하는 일은 초기 위치에서 마지막 위치로 옮기는 것
 - 즉 공구계를 현재값 $T_{initial}$ 으로부터 원하는 마지막 값 T_{final} 으로 옮기는 것
 - 때때로 원하는 마지막 형상만을 기술하는 것보다는 중간의 상세한 운동을 지정하는 것이 필요
→ 경유점(via points): 중간의 위치와 방위
 - 경로점(path points): 모든 경유점과 초기의 점(위치와 방위) 및 마지막 점을 포함하는 점(위치와 방위)

Figure 7.1

In executing a trajectory, a manipulator moves from its initial position to a desired goal position in a smooth manner.



7.2 경로의 표시와 생성에 관한 일반적인 고려

- 머니플레이터의 운동은 항상 유연한 것이 좋음 → 유연한 함수(smooth function)와 그 1차 도함수가 연속일 때로 정의. 때로는 2차 도함수가 연속인 것이 바람직할 때도 있음
- 거칠고 덜정거리는 운동을 하면 기구의 마모를 증가시키며 머니플레이터를 자극하여 진동하게 함. 유연한 경로를 보장하기 위해서는 경유점 사이의 경로에 대하여 일종의 시간적·공간적 제약을 부과해야만 함
- 유연한 경로를 명시하고 계획하는 방법은 수없이 많지만 본 교재에서는 자주 이용되는 몇 가지 방법에 대해 설명함

7.3 관절 공간의 경로 생성법

- 이 절에서는 경로의 모양이 관절각의 함수로 표시되는 경로 생성법에 대해 설명함
 - 각 경로점은 일반적으로 정지계 $\{S\}$ 에 관한 공구계 $\{T\}$ 의 원하는 위치와 방위의 함수로 지정
 - 각각의 경유점들은 역기구학을 적용함으로써 한 세트의 관절각으로 ‘변화’함
 - 중간점들을 통과하면서 목표점에서 끝나는 유연한 함수를 n 개의 관절 각각에 대하여 구함
 - 각 구간에서 요구되는 시간은 모든 관절에 대하여 동일하므로 모든 관절은 같은 시간에 경유점들에 도달할 것이고, 결과적으로 모든 점에서 원하는 $\{T\}$ 의 직교좌표 위치를 얻음
 - 각 관절에서 걸리는 시간을 같게 지정하는 것 외에 관절의 관절각 함수를 결정하는 것은 다른 관절의 관절각 함수에 대하여 독립임
 - 경유점들 사이에서 경로의 모양은 관절 공간에서는 비교적 간단하나 직교좌표 공간에서 나타내려면 복잡함
 - 관절 공간법은 관절 공간과 직교좌표 공간과의 연속적인 대응관계를 만들지 않으므로 가장 계산하기가 쉽고, 기구의 특이성에 관련된 문제가 근본적으로 없음

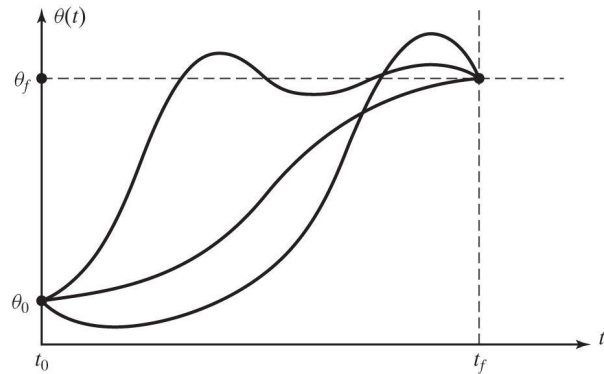
7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 3차 다항식

- 공구를 처음 시작 위치로부터 목표 위치까지 일정 시간 동안에 이동시키는 문제를 생각 해 보면, 역기구학을 사용하면 목표의 위치와 방위를 나타내는 한 세트(예를 들어, 6개)의 관절각 값을 계산할 수 있음
- 머니폴레이터의 처음 위치($t=0$ 일 때)는 한 세트의 관절각 형태로서도 알려져 있음
 $\theta(0) = \theta_0$
 - 예를 들어,
- 원하는 것은 각 관절에 대한 함수로서 t_0 (t_f 에서의 값은 관절의 목표점 위치가 되는

며,

Figure 7.2

Several possible path shapes for a single joint.



7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 3차 다항식

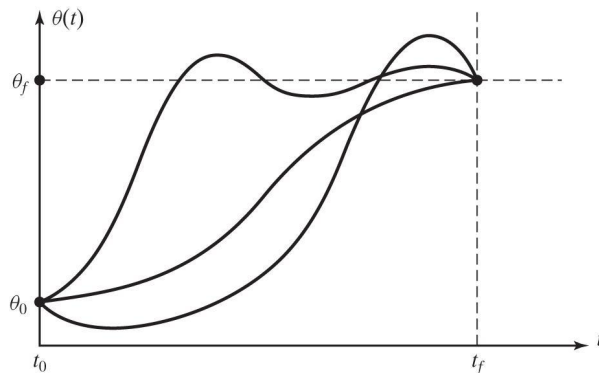
- 예를 들어, 하나의 관절에 대한 유연한 함수, $\theta(t)$ 를 구하려고 한다면,
 - 조건은 4가지가 존재함: 초기값, 최종값, 초기 속도, 최종 속도

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0 & \dot{\theta}(0) &= 0 \\ \theta(t_f) &= \theta_f & \dot{\theta}(t_f) &= 0\end{aligned}$$

- 3차 다항식은 4개의 계수를 가지고 있으므로, 위의 4개의 구속 조건은 최소한 3차 다항식으로 만족시킬 수 있음

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

Figure 7.2
Several possible path shapes for a single joint.



7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 3차 다항식

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3t$$

미분

$$\theta_0 = a_0$$

$$\theta_f = a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3$$

$$0 = a_1$$

$$0 = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2$$

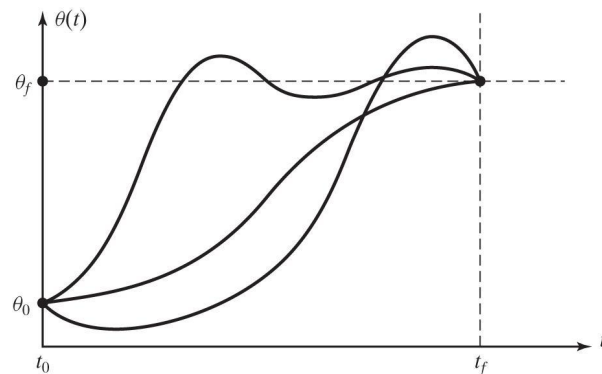
$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0)$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)$$

Figure 7.2
Several possible path shapes for a single joint.



예제 7.1 회전 관절을 갖는 단관절 로봇이 $\theta = 15^\circ$ 에서 정지해 있다. 3초 동안에 관절을 $\theta = 75^\circ$ 의 값으로 유연하게 움직이려면,

$$\begin{aligned} a_0 &= 15.0 \\ a_1 &= 0.0 \\ a_2 &= 20.0 \\ a_3 &= -4.44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 15.0 + 20.0t^2 - 4.44t^3 \\ \dot{\theta}(t) &= 40.0t - 13.33t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 40.0 - 26.66t \end{aligned}$$

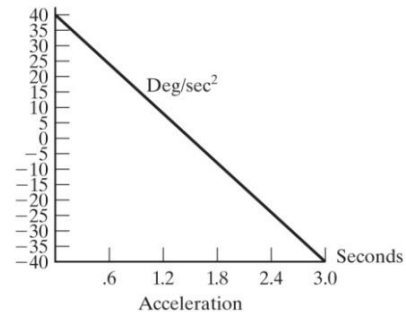
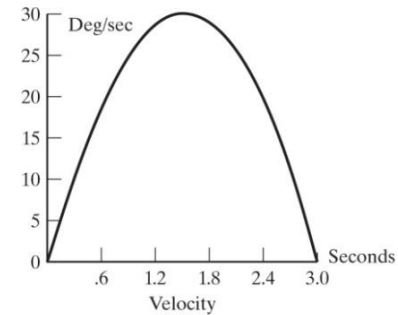
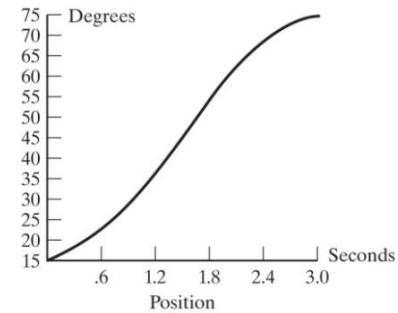


Figure 7.3
Position, velocity, and acceleration profiles for a single cubic segment that starts and ends at rest.

7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 경유점이 있는 경로의 3차 다항식

- 정지하지 않고 경유점을 통과하는 경로를 만들기 위해서 시작과 끝 점에서 속도 제한 조건을 0이 아닌 임의의 속도값을 가지도록 변형

○

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\theta(t_f) = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

$$\dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f$$

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

$$\theta_0 = a_0$$

$$\theta_f = a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3$$

$$\dot{\theta}_0 = a_1$$

$$\dot{\theta}_f = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2$$

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = \dot{\theta}_0$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)$$

7.3 관절 공간의 경로 생성법

- 각 경유점에서 원하는 속도를 지정하는 방법에는
 - 1번: 각 경유점에서의 원하는 속도를 그 순간의 공구계의 직교좌표 선속도와 각속도의 향으로 지정
 - 2번: 직교좌표 공간이나 관절 공간에서 적당한 발견적 방법(heuristic)으로 시스템이 경유점들에서의 속도를 자동적으로 선택
 - 3번: 경유점들에서의 가속도를 연속으로 하도록 시스템이 경유점들에서의 속도를 자동적으로 선택

- 위의 1번 방법은 머니플레이터의 역자코비안이 경유점에서 계산되어 경유점 들에서의 원하는 직교좌표 속도가 원하는 관절률로 ‘매핑’ 된다. 만약에 머니플레이터가 어떤 경유점에서 특이점에 도달하면, 사용자는 그 점에서의 속도를 임의로 지정할 수 없다. 사용자가 지정하는 속도를 맞출 수 있다는 것은 경로 생성법의 유용한 능력이기is 하나, 사용자에게 이러한 명세를 요구하는 것이 부담

7.3 관절 공간의 경로 생성법

- 2번 방법은 시스템이 자동적으로 적당한 방법을 이용하여 중간 속도를 선택한다. 어떤 관절에 대하여 중간점들에 의해 지정되는 경로 θ 를 그림 7.4에서 고려하자. 그림의 각 경유점에서 곡선의 접선으로 속도를 나타내도록 관절 속도를 선택한다. 즉, 경유점에서 이 선의 기울기의 부호가 바뀌면 속도를 영으로 택하고, 부호가 바뀌지 않으면 경유점에서의 속도를 두 기울기의 평균값으로 택 한다. 이 방법으로 원하는 경유점들의 명세만 가지고도 시스템은 각 점들에서의 속도를 선택할 수 있다.

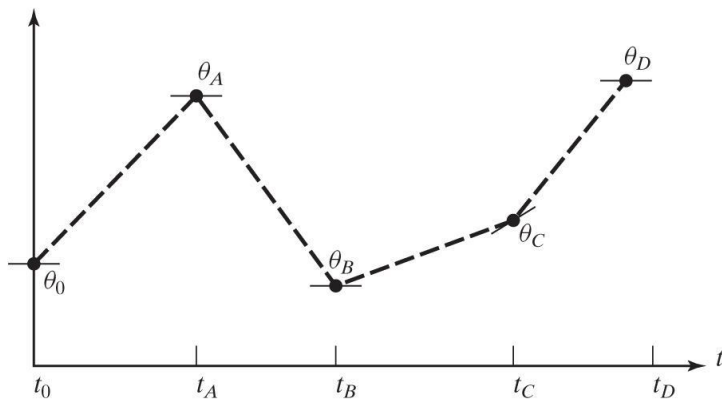


Figure 7.4
Via points with desired velocities
at the points indicated by
tangents.

7.3 관절 공간의 경로 생성법

- 3번 방법은 경유점에서의 가속도가 연속이 되도록 속도를 선택한다. 이렇게 하기 위해서는 새로운 스플라인(**spline**) 해법이 필요하고, 2개의 3차식을 연결할 때 2개의 속도 구속 조건은 **a)** 속도가 연속이 되어야 하고, **b)** 가속도가 연속이 되어야 하는 것으로 대체함
-

예제 7.2 중간의 경유점에서 가속도가 연속이 되도록 2-구간 스플라인으로 연결된 2개의 3차식의 계수를 구하라. 처음 각도는 θ_0 , 경유점의 각도 θ_v 이고, 목표점의 각도는 θ_g 이다.

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

$t = 0$ 에서 출발하고 $t = t_f$ 에서 끝나는 구간에서 각 3차식의 값을 구하면,

7.3 관절 공간의 경로 생성법

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

$$\theta_0 = a_{10}$$

$$\theta_v = a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3$$

$$\theta_v = a_{20}$$

$$\theta_g = a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3$$

$$0 = a_{11}$$

$$0 = a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2$$

$$a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21}$$

$$2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = 2a_{22}$$

$$t_f = t_{f1} = t_{f2}$$

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

$$a_{10} = \theta_0$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{12} = \frac{12\theta_v - 3\theta_g - 9\theta_0}{4t_f^2}$$

$$a_{13} = \frac{-8\theta_v + 3\theta_g + 5\theta_0}{4t_f^3}$$

$$a_{20} = \theta_v$$

$$a_{21} = \frac{3\theta_g - 3\theta_0}{4t_f}$$

$$a_{22} = \frac{-12\theta_v + 6\theta_g + 6\theta_0}{4t_f^2}$$

$$a_{23} = \frac{8\theta_v - 5\theta_g - 3\theta_0}{4t_f^3}$$

7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 고차 다항식

- 고차의 다항식이 경로 구간을 표시하는 데 자주 사용된다. 예를 들면 경로 구간의 처음과 마지막에서 위치와 속도, 그리고 가속도를 지정하기를 원할 때는 5차 다항식이

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

○

$$\theta_0 = a_0$$

$$\theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5$$

$$\dot{\theta}_0 = a_1$$

$$\dot{\theta}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4$$

$$\ddot{\theta}_0 = 2a_2$$

$$\ddot{\theta}_f = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3$$

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = \dot{\theta}_0$$

$$a_2 = \frac{\ddot{\theta}_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3}$$

$$a_4 = \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4}$$

$$a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5}$$

7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 포물선과 혼합된 1차함수

- 경로 모양을 선택하는 한 가지 다른 방법은 직선을 이용하는 것
 - 운동의 처음과 마지막에서 속도가 불연속이 된다. 위치와 속도가 연속이 되는 경로를 생성하기 위해서 직선함수에서 시작하여 포물선 혼합구간을 첨가
 - 궤도의 혼합 구간에서는 등가속도를 사용하여 속도의 변화를 유연하게 변화시킨다. 그림 7.6은 이 방법을 사용하여 생성한 간단한 경로를 보여준다. 1개의 1차 함수와 2개의 2차 함수가 전체의 경로상에서 위치와 속도가 연속이 되도록 ‘스플라인’ 한다.

Figure 7.5
Linear interpolation
requiring infinite
acceleration.

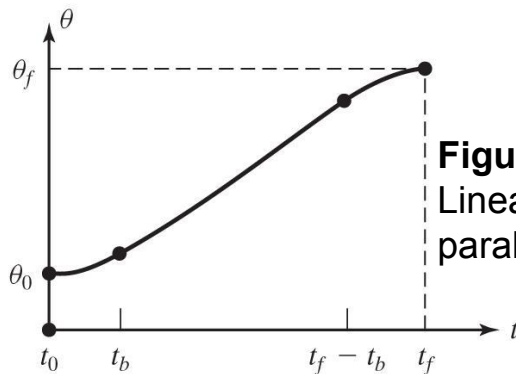
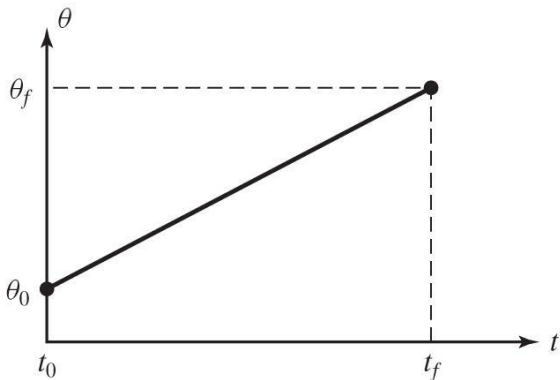


Figure 7.6
Linear segment with
parabolic blends.

7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 포물선과 혼합된 1차함수

- 혼합된 2개의 포물선들은 같은 경과 시간을 갖고 있다고 가정하면 혼합된 2개의 포물선은 같은 가속도의 절대값을 갖게 됨
- 시간상으로 중간점 인 t_h 와 위치상으로 중간점인 θ_h 에 대하여 모든 해는 대칭이 된다. 혼합 구간 마지막에서의 속도는 선형 부분에서의 속도와 같아야 하므로,

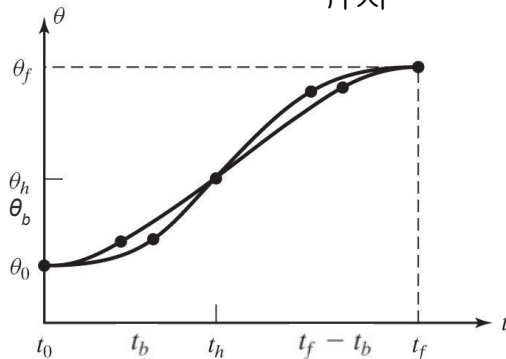
$$\ddot{\theta}t_b = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b}$$

가속도를 1번 적분하면, 속도

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t_b^2$$

가속도를 2번 적분하고 초기값 더하면 위치

Figure 7.7
Linear segment with
parabolic blends.



7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 포물선과 혼합된 1차함수

$$\ddot{\theta} t_b = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} \Rightarrow \ddot{\theta} t_b \cdot t_h - \ddot{\theta} t_b^2 = \theta_h - \theta_b$$

$$\ddot{\theta} t_b t_h - \ddot{\theta} t_b^2 = \theta_h - (\theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2) = \theta_h - \theta_0 - \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2$$

$$-\frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2 + \ddot{\theta} t_b t_h + (\theta_0 - \theta_h) = 0$$

$$t = 2 t_h$$

$$\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t_b t_h + (\theta_h - \theta_0) = 0$$

- 임의의 θ_0, θ_f 와 t 가 주어지면 위 식을 만족하도록 $\ddot{\theta}$ 와 t_b 에 의해 선택되는 임의의 경로를 생성할 수 있다. 일반적으로 $\ddot{\theta}$ 속도를 선택하고 식 (7.21)에서 t_b 를 결정한다. 선택된 가속도가 충분히 크지 않으면 해가 존재하지 않을 수 있다

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$$

근의 공식

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2}$$

판별식

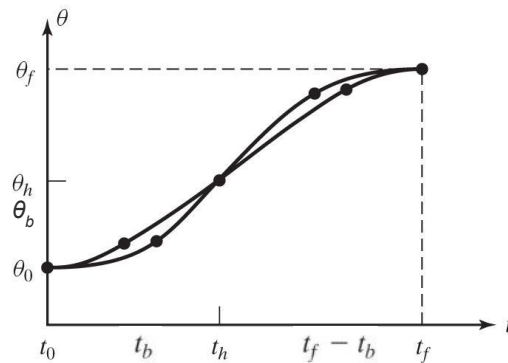


Figure 7.7
Linear segment with
parabolic blends.

예제 7.3

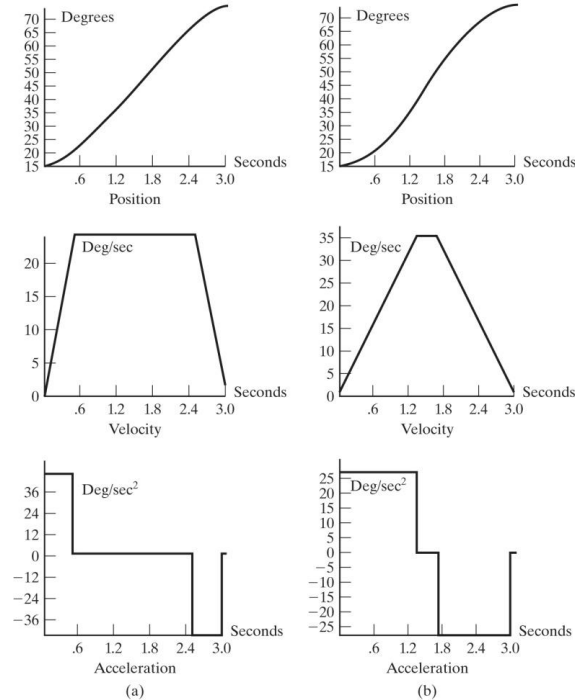
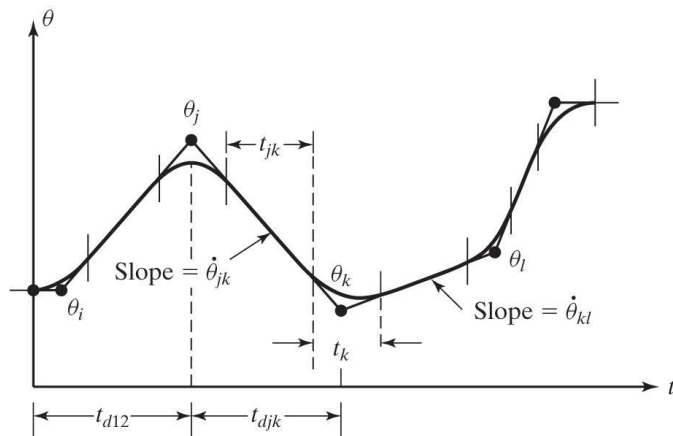


Figure 7.8
Position, velocity, and acceleration profiles for linear interpolation with parabolic blends. The set of curves on the left is based on a higher acceleration during the blends than is that on the right.

7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 경유점들을 포함하는 경우의 포물선과 혼합된 1차함수

- 임의의 개수의 경유점들이 지정된 경우에 사용할 수 있는 포물선과 혼합된 1차함수를 고려하면,
 - j 와 k 그리고 l 로 불리는 3개의 인접한 경로점들을 생각하자. 경로 k 에 있는 혼합 영역에서의 경과 시간을 t_k 로 표시한다. 점 j 와 점 k 사이의 직선 구간에서의 경과 시간은 t_{jk} 로 표시한다. 점 j 에서 점 k 를 연결하는 구간에서의 전체 경과 $\dot{\theta}_j$ 간은 t_{djk} 로 표시한다. 직선 부분에서의 속도는 이고, 점 j 에서 혼합하는 동안의 가속도는 이다

Figure 7.9
Multisegment linear path with blends.



7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 경유점들을 포함하는 경우의 포물선과 혼합된 1차함수

- 모든 경로점 θ_k 와 원하는 경과 시간 t_{djk} 그리고 각 경로점에서 사용될 $|\ddot{\theta}_k|$ 의 절대값 $\ddot{\theta}_k$ 의 크기가 주어졌을 때 우리는 혼합 시간 t_k 를 계산할 수 있음

$$\dot{\theta}_{jk} = \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}}$$

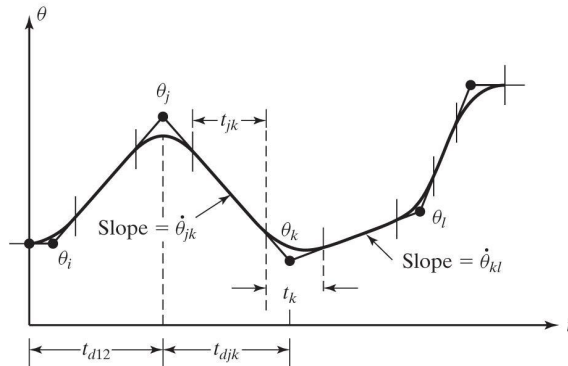
$$\ddot{\theta}_k = \text{SGN}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk})|\ddot{\theta}_k|$$

$$t_k = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k}$$

$$t_{jk} = t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k$$

- 위의 식을 적용할 때 처음과 마지막 구간만 약간 다르게 취급함

Figure 7.9
Multisegment linear path with blends.



7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 경유점들을 포함하는 경우의 포물선과 혼합된 1차함수

○

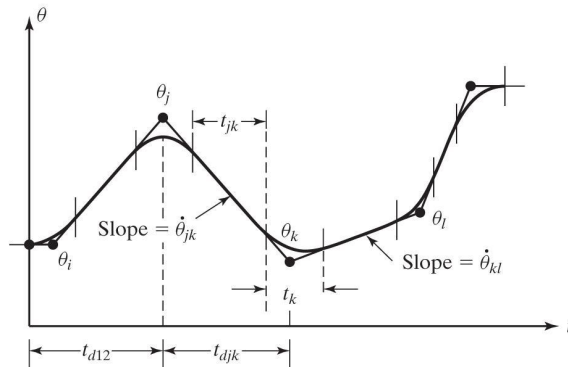
$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{jk} &= \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \\ \ddot{\theta}_k &= SGN(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk})|\ddot{\theta}_k| \\ t_k &= \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\ t_{jk} &= t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k\end{aligned}$$

- 처음 구간의 경우, t_1 을 계산하기 위해 구간의 선형 부분에서의 두 속도 표현식

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{12} - \frac{1}{2}t_1} = \ddot{\theta}_1 t_1$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= SGN(\theta_2 - \theta_1)|\ddot{\theta}_1| \\ t_1 &= t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}} \\ \dot{\theta}_{12} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} \\ t_{12} &= t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2}t_2\end{aligned}$$

Figure 7.9
Multisegment linear path with blends.



7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 경유점들을 포함하는 경우의 포물선과 혼합된 1차함수

○

$$\dot{\theta}_{jk} = \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}}$$

$$\ddot{\theta}_k = SGN(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk})|\ddot{\theta}_k|$$

$$t_k = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k}$$

$$t_{jk} = t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k$$

○ 마지막 구간의 경우,

$$\frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} = \ddot{\theta}_n t_n$$

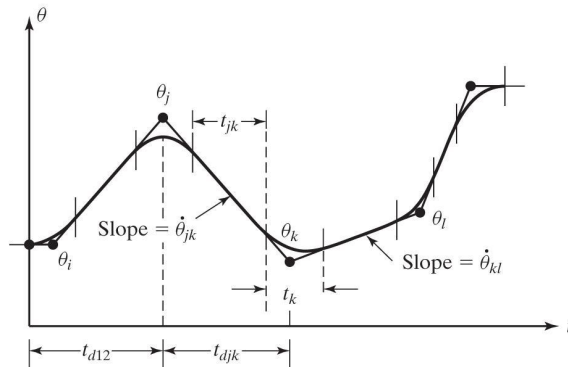
$$\ddot{\theta}_n = SGN(\theta_{n-1} - \theta_n)|\ddot{\theta}_n|$$

$$t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}}$$

$$\dot{\theta}_{(n-1)n} = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n}$$

$$t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2}t_{n-1}$$

Figure 7.9
Multisegment linear path with blends.



예제 7.4 경로점들(각도): 10, 35, 25, 10. 세 구간에서의 경과 시간은 다음과 같이 되어야 한다: 2, 1, 3초. 모든 혼합점에서 사용되는 디폴트 가속도는 50도/s^2 이다. 이 경우에 모든 구간에서의 속도와 혼합 시간, 그리고 직선 시간을 계산 하라.

맨 처음 구간인 경우에 식 (7.26)을 적용하면

$$\ddot{\theta}_1 = 50.0$$

이 계산된다. 초기점에서의 혼합 시간을 계산하기 위하여 식 (7.26)을 적용하면,

$$t_1 = 2 - \sqrt{4 - \frac{2(35 - 10)}{50.0}} = 0.27$$

을 얻는다. 식 (7.26)으로부터 속도 $\dot{\theta}_{12}$ 가 다음과 같이 계산된다.,

$$\dot{\theta}_{12} = \frac{35 - 10}{2 - 0.5(0.27)} = 13.50$$

식 (7.24)로부터 속도 $\dot{\theta}_{23}$ 이 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{\theta}_{23} = \frac{25 - 35}{1} = -10.0$$

다음에 식 (7.24)를 적용하면

$$\ddot{\theta}_2 = -50.0$$

을 얻게 된다. 그러면 식 (7.24)로부터 t_2 가 계산된다.

$$t_2 = \frac{-10.0 - 13.50}{-50.0} = 0.47$$

첫 번째 구간의 직선 부분 길이는 식 (7.26)으로부터 계산되고

$$t_{12} = 2 - 0.27 - \frac{1}{2}(0.47) = 1.50$$

식 (7.29)로부터

$$\ddot{\theta}_4 = 50.0$$

이 된다. 그러므로 마지막 구간을 위해서 식 (7.28)이 t_4 를 계산하는 데 사용되고

$$t_4 = 3 - \sqrt{9 + \frac{2(10 - 25)}{50.0}} = 0.102$$

가 된다. 속도 $\dot{\theta}_{34}$ 가 식 (7.28)로부터 계산된다.

$$\dot{\theta}_{34} = \frac{10 - 25}{3 - 0.050} = -5.10$$

예제 7.4 경로점들(각도): 10, 35, 25, 10. 세 구간에서의 경과 시간은 다음과 같이 되어야 한다: 2, 1, 3초. 모든 혼합점에서 사용되는 디폴트 가속도는 50도/s^2 이다. 이 경우에 모든 구간에서의 속도와 혼합 시간, 그리고 직선 시간을 계산 하라.

다음에 식 (7.24)로부터

$$\ddot{\theta}_3 = 50.0 \quad (7.39)$$

이 계산된다. t_3 은 식 (7.24)로부터 계산되고

$$t_3 = \frac{-5.10 - (-10.0)}{50} = 0.098 \quad (7.40)$$

이 된다. 마지막으로 식 (7.24)로부터 다음을 계산한다.

$$t_{23} = 1 - \frac{1}{2}(0.47) - \frac{1}{2}(0.098) = 0.716 \quad (7.41)$$

$$t_{34} = 3 - \frac{1}{2}(0.098) - 0.012 = 2.849 \quad (7.42)$$

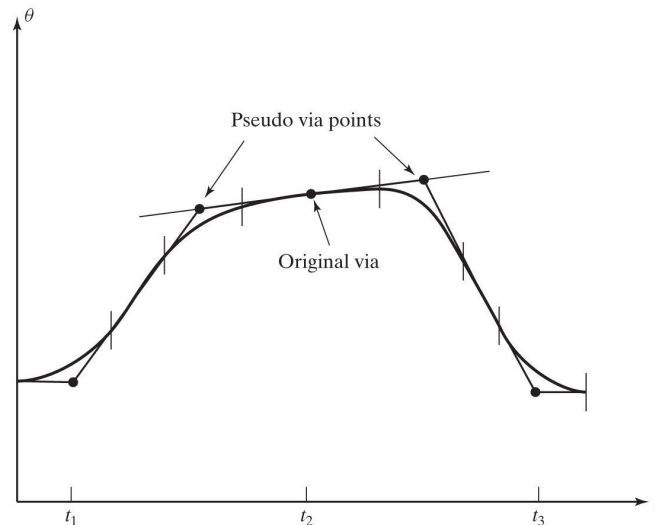
이러한 계산 결과가 궤도의 ‘계획(plan)’을 구성하게 된다. 이러한 숫자들은 로봇 작동 시 경로 생성 장치(path generator)에 의하여 θ 와 $\dot{\theta}$, 그리고 $\ddot{\theta}$ 를 일정한 샘플링에 따라 계산할 때 사용될 것이다.

7.3 관절 공간의 경로 생성법 - 경유점들을 포함하는 경우의 포물선과 혼합된 1차함수

- 만약 매니퓰레이터가 정지하지 않으면 경유점들은 실제로 도달되지 않음
- 가속 능력이 충분히 큰 경우에 경로가 원하는 경유점에 상당히 가까이 올 수 있지만, 만약에 정지함으로써 점을 통과하기를 원하면, 경유점은 경로의 지정과정에서 간단히 통과하게 할 수 있음
- 만약에 사용자가 매니퓰레이터를 정지함 없이 경유점들을 정확히 통과시키고자 한다면, 매니퓰레이터가 통과하고자 하는 경유점을 경유점 좌우의 가상 경유점(pseudo via points)으로 바꿔서 사용하면 해결됨.
- 이때, 원래의 경유점은 2개의 가상 경유점을 연결하는 경로의 직선 부분에 위치하게 됨

Figure 7.10

Use of pseudo via points to create a *through* point.



7.4 직교좌표 공간법

- 경로점들이 직교좌표계에 의하여 지정되었을 때라도, 경유점들과 목표점들 관절 공간에서의 경로로 계산할 수 있음
 - 이 절에서는 경로를 모양이 특정한 함수(직교좌표 위치와 방위를 시간의 함수로 계산하는)의 향으로 표시되는 경로 생성 방법 설명
 - 가장 일반적인 경로의 모양은 직선이지만 원이나 사인(**sine**) 곡선 혹은 다른 모양도 사용 가능
 - 각 경로점은 정지계에 대한 공구계의 원하는 위치와 방위의 향으로 명시
 - 직교좌표에 기준한 경로 생성법에서, 궤도를 형성하기 위하여 스플라인으로 결합된 함수는, 직교좌표에서의 변수를 나타내는 시간의 함수임
 - 이러한 경로는 역기구학을 미리 계산하지 않고 사용자가 정의한 경로점들로부터 직접 계획함
 - 그리고나서 역기구학을 경로 채신율에 맞추어 운전 중에 풀기 때문에 비용이 많이 든다. 즉 경로가 직교좌표 공간에서 생성된 후에 마지막 단계로서 역기구학의 계산이 원하는 관절각들을 계산하기 위하여 수행됨

7.4 직교좌표 공간법

- 직교좌표에서의 직선운동
 - 공구 끝이 공간에서 직선운동을 하도록 경로를 쉽게 지정하려고 할때 사용
 - 직선에 포물선을 스플라인 혼합한 함수를 사용하는 것이 적합함
 - 2장의 회전행렬보다는 2.8절의 각-축 표현법을 이용해서 3개의 방위를 정의하는 방법을 사용
 - 즉, 회전행렬은 각-축의 표시 ${}^S\text{ROT}({}^S\hat{K}_A, \theta_{SA})$ (혹은 간단히 SK_A)로 변환
 - 따라서 이 6×1 벡터의 직교좌표 위치와 방위를 나타내는 벡터를 X 로 나타내기로 함

$${}^S\chi_A = \begin{bmatrix} {}^SP_{AORG} \\ {}^SK_A \end{bmatrix}$$

- 만약 모든 경로점이 이렇게 표시된다면, 경로점에서 경로점으로 시간에 따라 이 6개의 양을 유연하게 운동시키는 스플라인 함수를 표시하는 것이 필요함

7.4 직교좌표 공간법

- 직교좌표에서의 직선운동

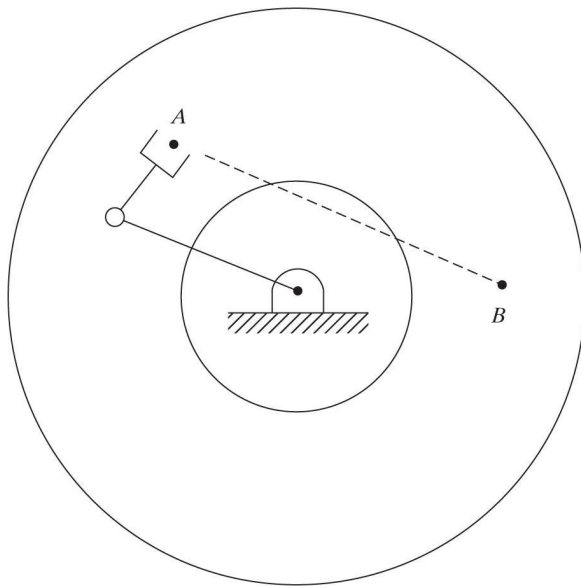
- 각 경유점에 대하여 6개의 X 값을 일단 선정하면, 직선과 포물선으로 이루어진 스플라인을 생성하기 위하여 이미 개발된 수학을 이용할 수 있음
- 그러나 우리는 1개의 구속 조건을 더해야만 하는데, 이것은 각 자유도의 혼합 시간은 같아야만 한다는 것 → 가속도는 각 자유도에서 서로 다른 값

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{jk} &= \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \\ \ddot{\theta}_k &= SGN(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk})|\ddot{\theta}_k| \\ t_k &= \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\ t_{jk} &= t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k\end{aligned}$$

7.5 직교좌표 경로에서의 기하학적인 문제들

- 첫 번째 모양의 문제: 도달할 수 없는 중간점들

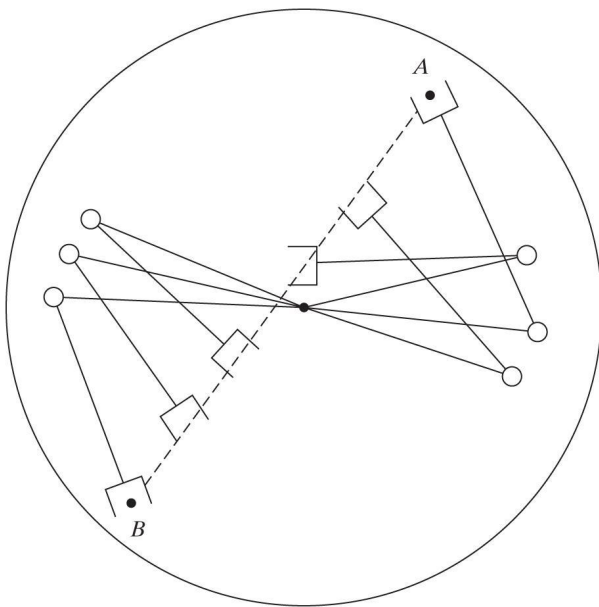
Figure 7.12
Cartesian-path
problem of type 1.



7.5 직교좌표 경로에서의 기하학적인 문제들

- 두 번째 모양의 문제: 특이점 근처에서의 높은 관절률

Figure 7.13
Cartesian-path
problem of type 2.



7.5 직교좌표 경로에서의 기하학적인 문제들

- 세 번째 모양의 문제: 서로 다른 해로 도달할 수 있는 출발점과 목표점

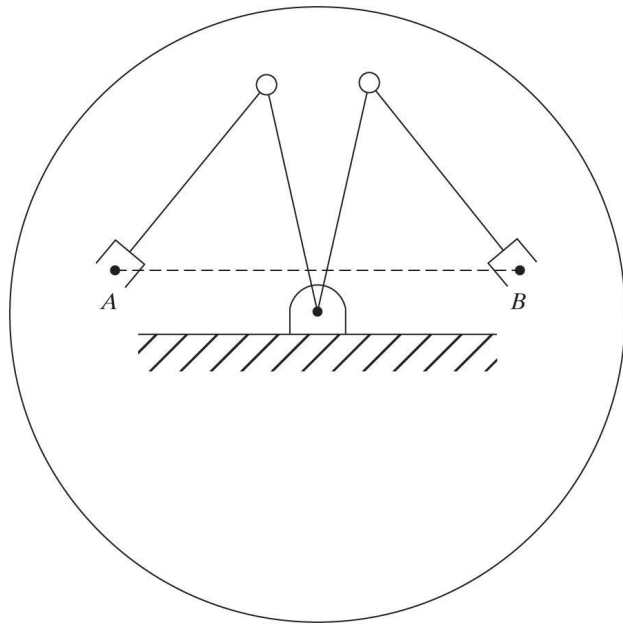


Figure 7.14
Cartesian-path
problem of type 3.

7.6 운동 중의 경로 생성

- 운동 중에 이루어지는 경로 생성 과정은 궤도를 $\dot{\theta}$ 와 $\ddot{\theta}$ 그리고 $\ddot{\theta}$ 의 항으로 만들고 이 정보를 머니플레이터의 제어 시스템에 공급하고, 경로 생성 장치는 궤도를 경로 왜 신율로 계산함
- 관절 공간 경로의 생성 (포물선과 직선 혼합 스플라인의 경우)

- 직선 부분에서는

$$\theta = \theta_j + \dot{\theta}_{jk}t$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_{jk}$$

$$\ddot{\theta} = 0$$

- 혼합 영역에서는

$$t_{inb} = t - (\frac{1}{2}t_j + t_{jk})$$

$$\theta = \theta_j + \dot{\theta}_{jk}(t - t_{inb}) + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_k t_{inb}^2$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_{jk} + \ddot{\theta}_k t_{inb}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_k$$

7.6 운동 중의 경로 생성

- 직교좌표 공간 경로의 생성 (포물선과 직선 혼합 스플라인의 경우)

- 직선 부분에서는

$$x = x_j + \dot{x}_{jk}t$$

$$\dot{x} = \dot{x}_{jk}$$

$$\ddot{x} = 0$$

- 혼합 영역에서는

$$t_{inb} = t - (\frac{1}{2}t_j + t_{jk})$$

$$x = x_j + \dot{x}_{jk}(t - t_{inb}) + \frac{1}{2}\ddot{x}_k t_{inb}^2$$

$$\dot{x} = \dot{x}_{jk} + \ddot{x}_k t_{inb}$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_k$$

7.8 동역학적 모델을 사용한 경로 계획

- 경로를 계획할 때, 흔히 혼합점에서 디폴트 값 또는 최대 가속도를 사용함.
실제로 머니플레이터가 어느 순간에서 수행할 수 있는 가속도의 양은 팔의 동역학과 액추에이터가 가지고 있는 한계값임
- 대부분의 액추에이터는 고정된 최대 토크나 가속도보다는 토크-속력 곡선으로 특성을 나타내므로 쉽지 않음
- 최대 가속도를 신중하게 선택해야 함

7.9 충돌 없는 경로 계획

- 장애물 회피
- Potential field