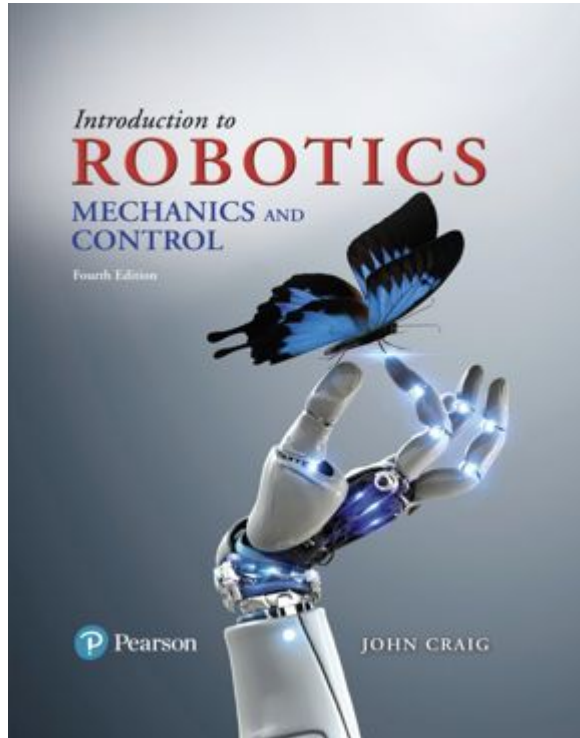


# Introduction to Robotics

Mechanics and Control

4<sup>th</sup> Edition



## Chapter 9

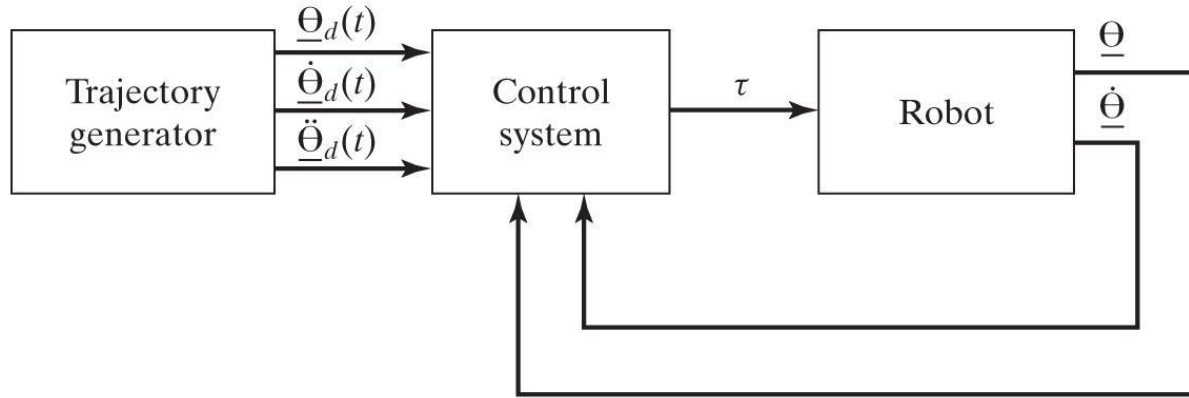
머니플레이터의 선형 제어

## 9.1 개요

- 본 장들에서는 원하는 말단 효과 장치(**end-effector**)의 공간 내에서의 운동에 대응하는 관절-위치의 시간에 대한 이력대로 머니플레이터를 운동하도록 제어하는 방법에 대해 설명함
- 머니플레이터의 동역학은 비선형 미분방정식으로 좀더 적절히 표시되므로, 머니플레이터의 제어인 경우에 이러한 선형 방법은 근본적으로 근사 방법이 된다. 그러나 이러한 근사를 하는 것이 때로 합리적이며, 현재의 산업체에서 가장 많이 사용되고 있음)
- 9.2에서 9.3까지는 3학년 자동제어 시간에 배운 내용이므로 각자 읽어볼 것

## Figure 9.1

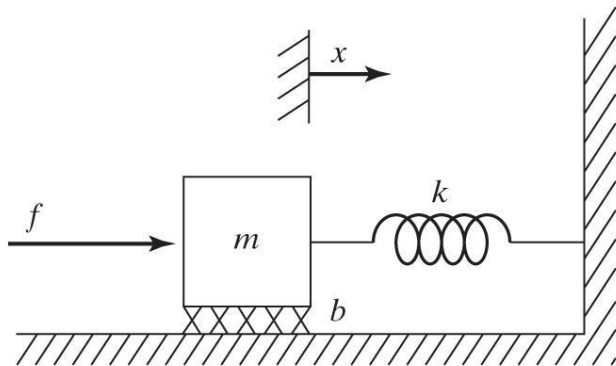
High-level block diagram of a robot-control system.



## 9.4 2차 시스템의 제어

- 2차 시스템의 응답성이 우리가 원하는 대로 나오지 않는다고 가정하자. 만약 시스템이 부족감쇠 상태에서 진동하면, 이것을 임계감쇠로 만들려고 할 것임  
→ 센서, 액추에이터와 제어 시스템을 사용하여 시스템의 행동을 원하는 대로 제어

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$



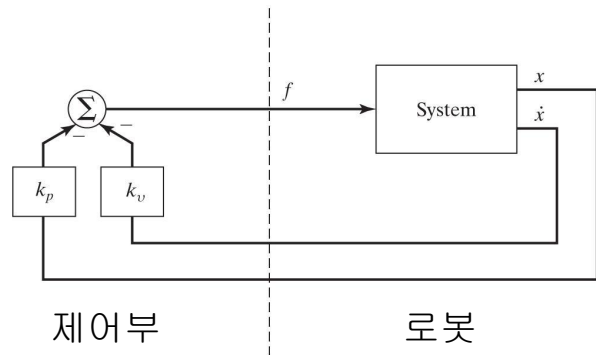
**Figure 9.6**  
A damped  
spring–mass system  
with an actuator.

## 9.4 2차 시스템의 제어

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

- 위치와 속도를 검색할 수 있는 센서를 갖고 있다고 가정하고 액추에이터에 의하여 가해져야만 할 힘을 감지된 피드백의 함수로 계산하는 제어법칙 (control law)을 다음과 같  $f = -k_p x - k_v \dot{x}$  ,
  - 여기서 제안하는 시스템은 위치 제어 시스템이고, 외란을 이겨내고 위치를 유지하는 것이 목적. 이 후 원하는 궤도를 따라가는 추종 시스템으로 업그레이드함

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -k_p x - k_v \dot{x}$$



**Figure 9.7**

A closed-loop control system. The control computer (to the left of the dashed line) reads sensor input and writes actuator output commands.

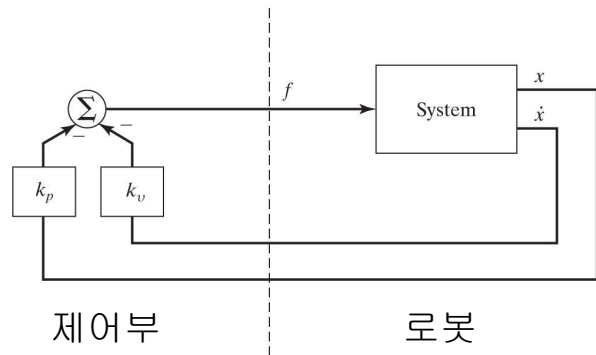
## 9.4 2차 시스템의 제어

$$m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0$$

$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0,$$

$$b' = b + k_v \text{이고 } k' = k + k_p$$

- 2차 시스템의 행동을 페루프 시스템이 갖도록 제어 이득(control gain)  $k_v$  와  $k_p$ 를 선택. 때때로 이점이 임계감쇠가 되도록  $b' = 2\sqrt{mk'}$  하거나(즉 ), 원하는 페루프 감쇠도  $k'$ 가 주어지면 이것 갖도록 선택함



**Figure 9.7**

A closed-loop control system. The control computer (to the left of the dashed line) reads sensor input and writes actuator output commands.

## 9.5 제어법칙 분할

- 2제어기를 모델 기준 부분(model-based portion)과 서보 부분(servo portion)으로 나눠서 생각해보자 → 제어 법칙 분할(control-law partitioning)
  - 시스템의 인자( $m, b, k$ )는 모델 기준 부분에만 나타나고, 서보 부분은 인자와 무관함

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

- 예를 들어, 위의 **open-loop** 운동방정식을 보자. 이 시스템의 제어기를 모델 기준 부분과 서보 부분으로 나눠서 설계할 것임
- 모델 기준 부분은 추정함(정확하게 알면 더 좋음)  $m, b, k$ 의 값을 이용해서  $m$ 을 제외한  $b, k$ 가 마치 없는 것처럼(단위 질량만 있는 시스템인 것처럼) 만듦
- 서보 부분은 이러한 단위 질량으로 이루어진 시스템을 원하는 결과가 나오도록 제어하는 부분임

## 9.5 제어법칙 분할

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

- 제어의 모델-기준 부분은 다음과 같은 모양의 제어법칙을 사용함

$$f = m f' + b \dot{x} + kx \quad \begin{matrix} \alpha = m \\ \beta = b\dot{x} + kx \end{matrix}$$

- 위의 식을 대입하면,  $\ddot{x} = f'$  (단위 질량으로 보임)
- 제어의 서보 부분은  $f'$ 을 다음과 같이 설계하는 것임

$$f' = -k_v \dot{x} - k_p x$$

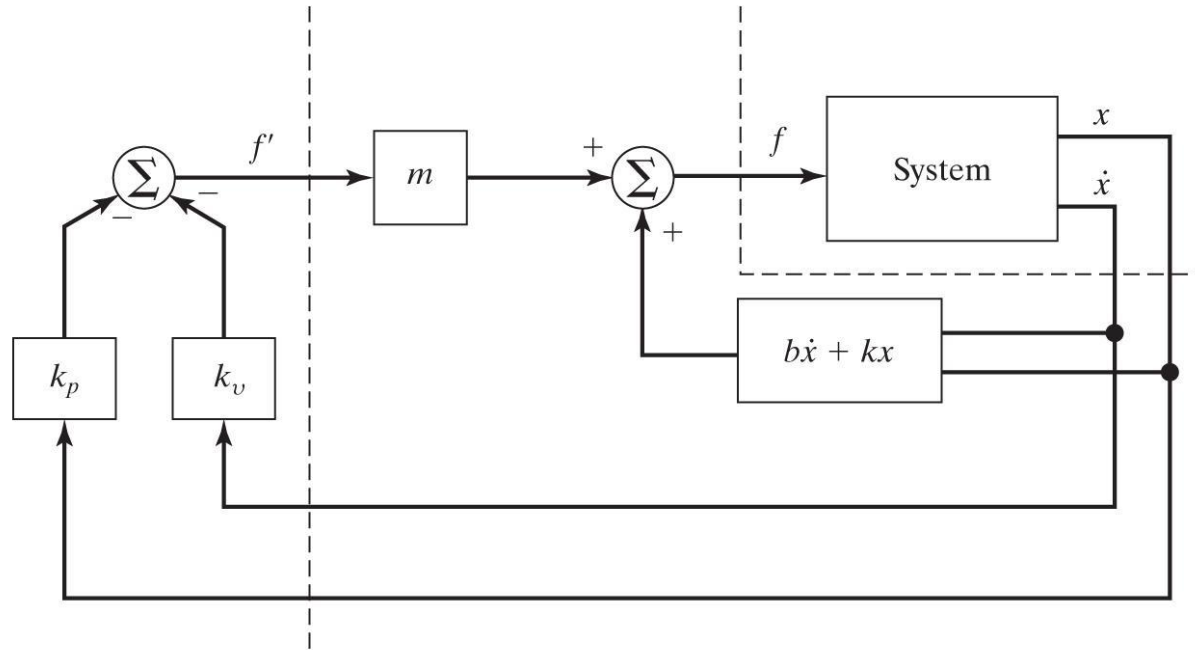
이것을 모델-기준 부분에 넣으면, 시스템의 궤적  $\dot{x}$ 와  $x$ 가 시스템의 인자  $(m, b, k)$ 와 무관하게 내  
 맘대로 제어 가능함 ( $k_v, k_p$ 를 선택해  $k_v = 2\sqrt{k_p}$  들어, 면 임계감쇠임)

$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0$$



## Figure 9.8

A closed-loop control system employing the partitioned control method.



주의점:

$m, b, k$ 를 정확히 알수록  
모델 기준 부분이 성립함  
→ 가능한가? 변할 수  
있지 않나?

## 9.6 궤도를 따르는 제어(궤도 추종)

- 궤도가 매끄럽다고 가정하고(즉 1차와 2차 미분이 존재), 8장의 궤도 생성 (trajectory generator)는 모든  $x_d, \dot{x}_d$ 와  $\ddot{x}_d$ 를 제공한다고 가정
- 원하는 궤도  $x_d, \dot{x}_d$ 와  $\ddot{x}_d$  )와 실제 궤도  $x, \dot{x}$ 와  $\ddot{x}$  ) 사이의 서보 오차를  $e = x_d - x$ 로 정의

○ 모델  $f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$  결과 동일하고,  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$  같음

대입  $\rightarrow$

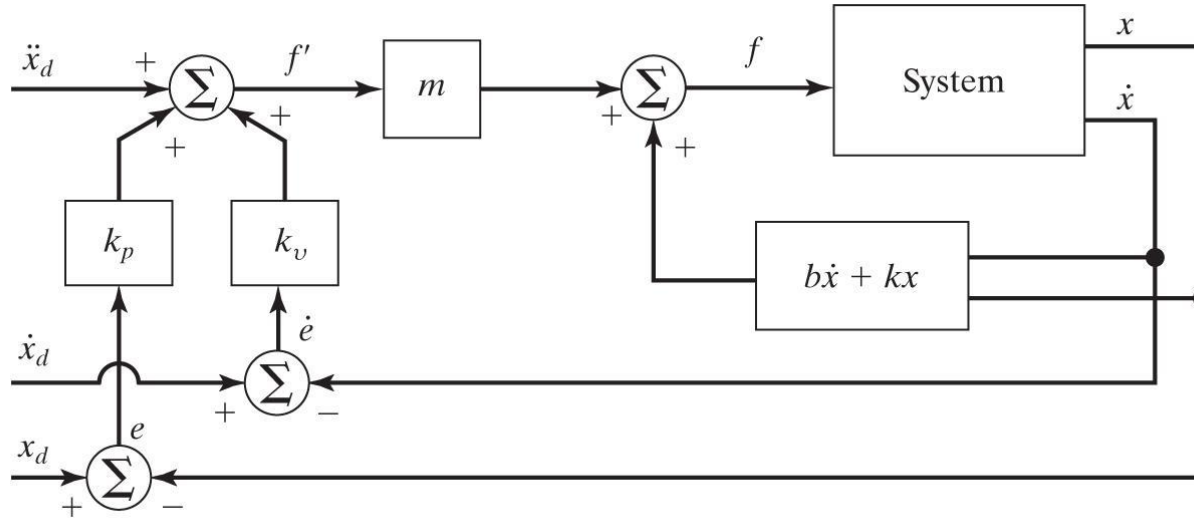
$$f = m\ddot{x}_d + b\dot{x} + kx$$

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0 \quad \text{오차 공간(error space)에서 표시}$$

위 식의 경우, 시스템의 인자 ( $m, b, k$ )와 무관하게 내 맘대로 제어 가능함 ( $k_v, k_p$ 를 선택해서)

## Figure 9.9

A trajectory-following controller for the system in Fig. 9.6.



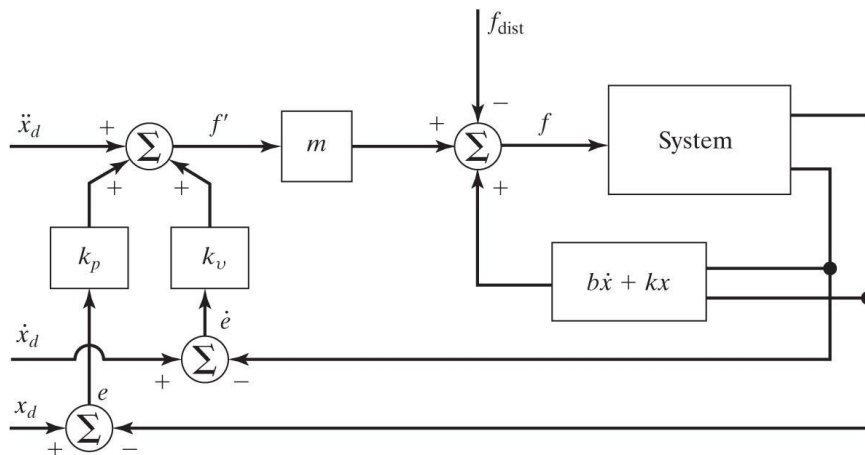
## 9.7 교란 배제(disturbance rejection)

- 외부의 교란 혹은 잡음이 있더라도 좋은 성능을 유지하는 것
  - 궤도를 따라가는 제어기에 교란 힘  $f_{\text{dist}}$ 가 입력으로 추가됨

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = f_{\text{dist}}$$

- $f_{\text{dist}}$ 가 bounded되고 그 크기가  $a$ 로 제한되면, 위의  $e(t)$ 도 bounded 됨  $\rightarrow$  BIBO  $\rightarrow$  시스템이 안정됨

$$\max_t f_{\text{dist}}(t) < a$$



**Figure 9.10**

A trajectory-following control system with a disturbance acting.

## 9.7 교란 배제(disturbance rejection)

- 정상 상태 오차(시간이 흐른 뒤 출력이 일정해지면서 유지되는 오차) → 미분값이 0

$$k_p e = f_{\text{dist}}$$

$$e = f_{\text{dist}}/k_p$$

- $e$ 는 정상 상태 오차(steady-state error)이고, 위치 이득  $k_p$ 이 커지면 정상 상태 오차는 작아짐
- 그렇지만 0이 아님 → 시분할  $f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt$  오차를 0으로 만들 수 있음(자동제어에서 배움)

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{\text{dist}} \quad \longrightarrow \quad \text{PID 제어기}$$

$$k_i e = 0 \quad e = 0$$

## 9.8 연속 대 이산 시간 제어

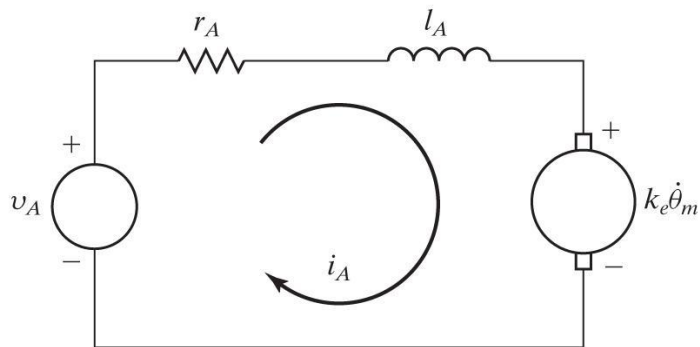
- 본 교재에서 제어 컴퓨터는 제어방법 계산을 무한히 빠르게 계산한다고 가정했고, 결과적으로 액추에이터 힘  $f$ 는 시간의 연속 함수라고 가정했음
- 실제 계산은 어느 정도 시간 필요하고, 결과적인 힘의 명령은 분산된 ‘계단 같은 (staircase)’ 함수임. 우리는 이 책 전체를 통하여 이와 같이 매우 빠른 제어 컴퓨터의 근사를 가정할 것임.
  - 이러한 근사는 제어될 시스템의 고유 진동수보다  $f$ 의 계산되는 율이 훨씬 빠르면 유효함
  - 이산 시간 제어(discrete time control), 또는 디지털 제어(digital control) 분야에서는 이러한 근사를 하지 않으며, 시스템을 해석할 때 제어 시스템의 서보율(servo rate)을 고려함
- 서보율(또는 sampling rate)을 선택하는 데 고려해야 할 점
  - 기준 입력의 추적: 기준 입력 밴드 폭의 2배
  - 교란 배제: 잡음의 상관관계 시간(correlation time)보다 10배 정도 작게
  - 반에일리어싱 (anti-aliasing)
  - 구조의 공진: 시스템의 구조적 고유 진동수의 2배가 되도록

## 9.9 관절 1개의 모델링과 제어

- 머니플레이터의 회전 관절 1개의 단순화한 모델을 고민해보자
  - 모터와 기어가 있고, 링크가 연결되어 있음
- 모터의 식은 자동제어에서 배움
  - $\tau_m = k_m i_a$        $v = k_e \dot{\theta}_m$

$$l_a \dot{i}_a + r_a i_a = v_a - k_e \dot{\theta}_m$$

모터의 인덕턴스를  
무시



**Figure 9.11**  
The armature circuit of  
a DC torque motor.

## 9.9 관절 1개의 모델링과 제어

- 유효 관성: 기어를 사용할 경우, 토크/속력/관성 등이 기어비에 의해 다르게 표현됨

$$\tau = \eta \tau_m$$

$$\dot{\theta} = (1/\eta) \dot{\theta}_m$$

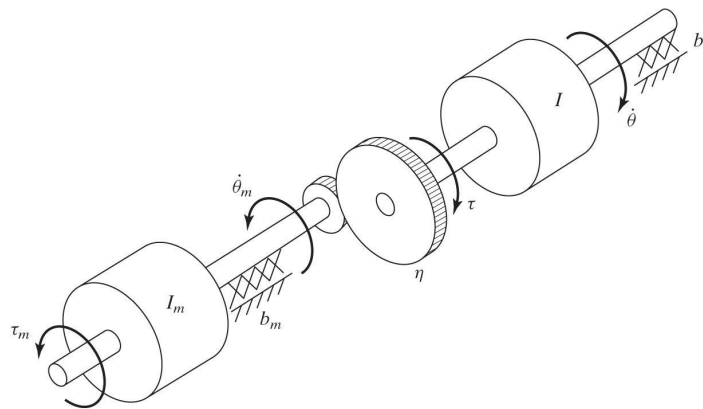
$$\tau_m = I_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + (1/\eta) (I \ddot{\theta} + b \dot{\theta})$$

$$\tau_m = \left( I_m + \frac{I}{\eta^2} \right) \ddot{\theta}_m + \left( b_m + \frac{b}{\eta^2} \right) \dot{\theta}_m$$

$$\tau = (I + \eta^2 I_m) \ddot{\theta} + (b + \eta^2 b_m) \dot{\theta}$$

유효 관성

유효 감쇠



**Figure 9.12**

Mechanical model of a DC torque motor connected through gearing to an inertial load.



## 9.9 관절 1개의 모델링과 제어

- 6장에서 기구의 관절 관성,  $I$ 는 형상과 하중의 변화에 따라 실제로 변한다는 것을 알고 있음. 다행히 높은 기어 비를 갖고 있는 로봇의 경우에, 이 변화는 매우 작아서 무시함
- 모델이 되지 않은 유연성
  - 모든 기계 부품은 강성이라고 가정했지만 실제로는 유연함
  - 이를 모델링하면 수식의 차수가 올라가고 복잡함. 이를 무시하려면, 강성이 충분하다고 해야 함 → 모델이 되지 않은 공진의 고유 진동수가 매우 높아서 지배하는 2개의 극점의 영향에 비  $\omega_{res}$ 하여 무시할 수 있음  $\omega_n$
  - 대략, 가장 낮은 구조의 수( )가 페루프 고유 진동수( )와 다음과 같은 관계를 가지면,  $\omega_n \leq \frac{1}{2}\omega_{res}$

→ 예제 9.7 참조

- 산업용 머니플레이터는 구조의 공진이 **5Hz**와 **25Hz** 정도임. 최근에 설계된 지전 구동 방식의 설계는 가장 낮은 구조의 공진 주파수를 **70Hz**까지 올리

- 예제 9.7 인자의 값  $m = 1, b = 1, k = 1$ 인 그림 9.6의 시스템을 고찰하라.  
 모델이 되지 않은 시스템의 가장 낮은 모델의 공진 주파수는 8 radians/s로 알려져 있다.  $\alpha, \beta$  그리고 이득  $k_p$ 와  $k_v$ 를 위치 제어법칙을 위하여 결정하라  
 (임계감쇠 = 감쇠비  $\zeta$ 는 1)

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \dot{x} + x$$

$$\omega_n \leq \frac{1}{2} \omega_{\text{res}}$$

$$\omega_n = 4 \text{ radians/s}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

에서

$$k_p = 16.0$$

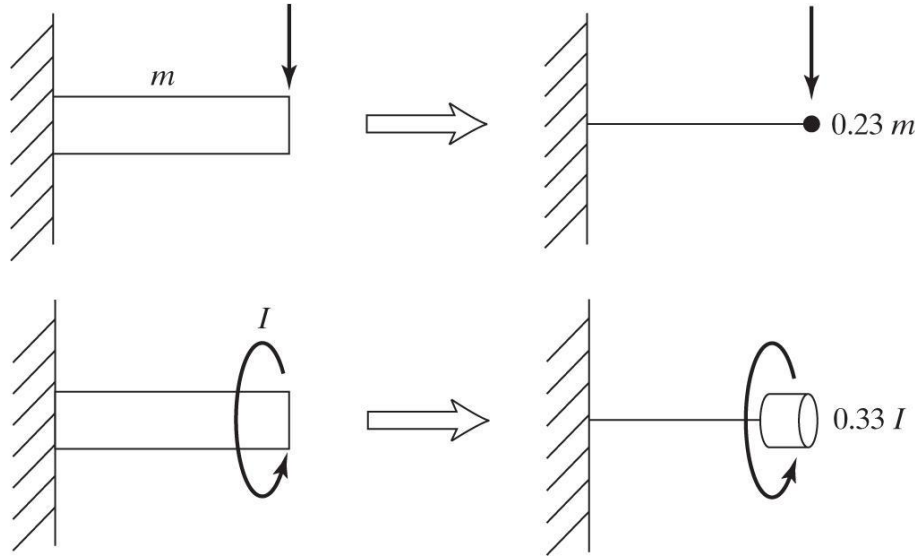
$$k_v = 8.0$$

## 9.9 관절 1개의 모델링과 제어

- 공진 주파수의 추정
  - 구조의 유연성은 공진을 일으킨다. 구조의 유연성이 알려져 있는 각각의 경우에 유연한 멤버(member)의 유효 질량 혹은 관성이 기술되면, 결과적인 진동 현상의 개략적인 해석이 가능. 간단한 스프링 질량 시스템에 의하면  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  시스템을 근사화하면,
  -
- 보(beam)와 축의 가장 낮은 공진 주파수를 개략적으로 알기 위해서 질량의 집중 모델(lumped model)을 제안함. 질량  $m$ 이 끝단의 질량  $0.23m$ 으로 대체되고, 마찬가지로 분포된 관성  $I$ 가 축의 끝단에  $0.33I$ 대체되는 것으로 해석
- 높은 페루프 밴드폭(bandwidth)을 얻고자 하면, 제어법칙을 위하여 사용된 시스템에 구조의 유연성을 포함시키야 함. 결과적인 시스템 모델은 고차이고, 이러한 경우에 적용되는 제어 기술은 매우 정교해짐 → 어려워서 산업제체에서도 아직 잘 안씀

## Figure 9.13

Lumped models of beams for estimation of lowest lateral and torsional resonance.



## 9.9 관절 1개의 모델링과 제어

- 요약하여 다음과 같은 세 가지의 중요한 가정

1. 모터의 인덕턴스  $l_a$ 는 무시될 수 있다.

2. 많은 기어를 고려하는 경우, 유효 관성  $I_{\max} + \eta^2 I_m$  인 상수로 모델링한다.

3. 가장 낮은 구조의 고유 진동수  $\omega_{\text{res}}$ 가 서보 이득을 결정하는 데 사용되는 경우를 제외하고는 구조의 유연성이 무시된다.

$$\alpha = I_{\max} + \eta^2 I_m$$

$$\beta = (b + \eta^2 b_m) \dot{\theta}$$

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$



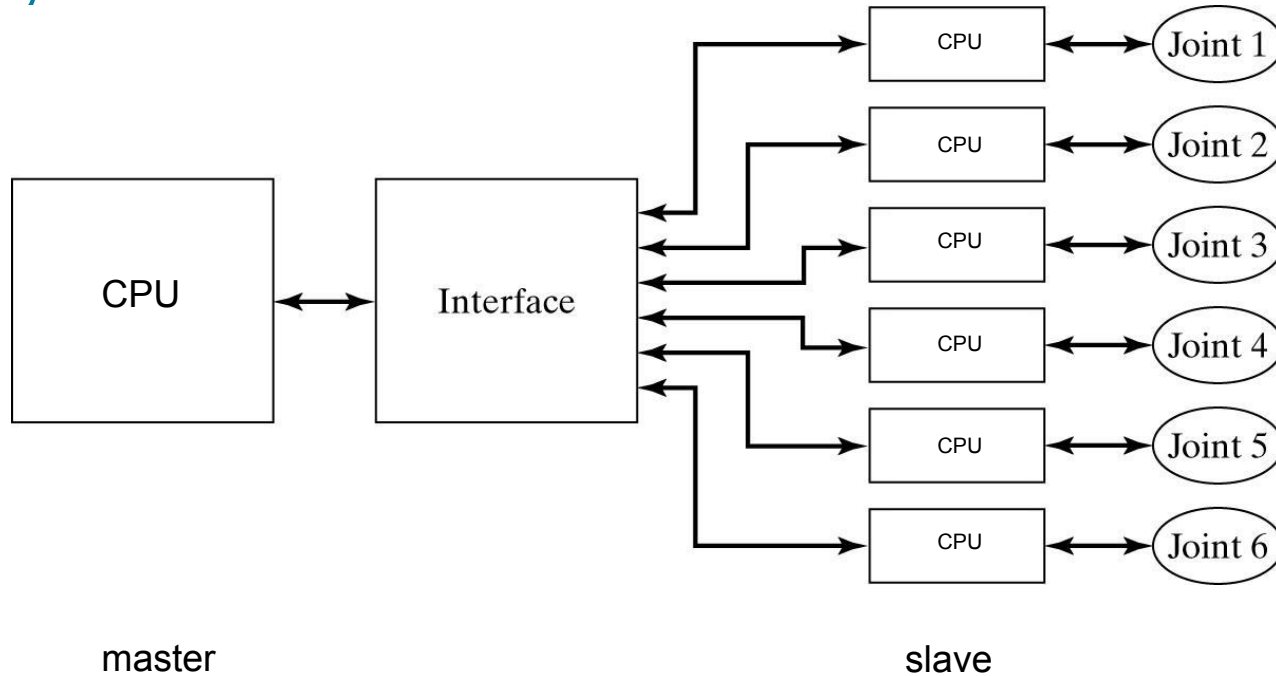
$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \tau_{\text{dist}}$$

$$k_p = \omega_n^2 = \frac{1}{4} \omega_{\text{res}}^2$$

$$k_v = 2\sqrt{k_p} = \omega_{\text{res}}$$

## Figure 9.14

Hierarchical computer architecture that forms a typical robot control system.



**Figure 9.15**  
Functional blocks of a joint-control system.

