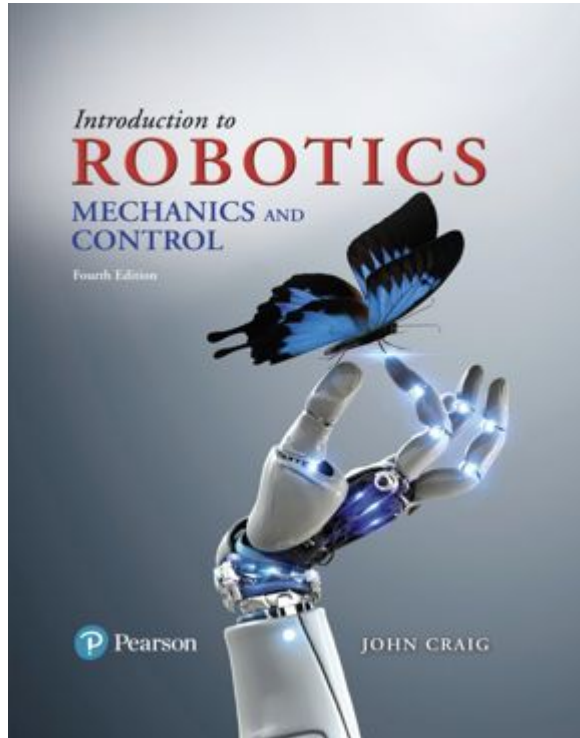


Introduction to Robotics

Mechanics and Control

4th Edition



Chapter 6

머니플레이터 동역학
(dynamics)

6.1 개요

- 본 장에서는 머니플레이터의 운동 방정식을, 액추에이터에 의하여 가해진 토크 또는 머니플레이터에 가해진 외력에 의해서 머니플레이터의 운동이 이루어졌다는 방식으로 고려함
- 첫 번째는 궤도~~궤도~~위치, 속도, 가속도($\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$) 을 알고, 관절토크 벡터 τ 를 찾아내는 문제임. 이 동역학의 처리 방법은 머니플레이터 제어 문제에 유익하게 사용될 수 있음(10장)
- 두 번째 문제는 기구가 관절 토크를 가한 상태에서 어~~궤도~~위치, 속도, 가속도($\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$) 계산하는 것임
 - 즉, 토크 벡터 τ 가 주어지면, 결과로 나타나는 머니플레이터의 운동 즉 을 계산하는 것임. 이것은 머니플레이터를 모의 시험(시뮬레이션)할 때에 유용함

6.2 강체의 가속

- 강체 운동의 해석을 가속의 경우로 연장하면, 어떤 시점에서 선 및 각속도 벡터를 미분해서 선 및 각가속도를 얻음

○

$${}^B\dot{V}_Q = \frac{d}{dt} {}^B V_Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B V_Q(t + \Delta t) - {}^B V_Q(t)}{\Delta t}$$

$${}^A\dot{\Omega}_B = \frac{d}{dt} {}^A \Omega_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A \Omega_B(t + \Delta t) - {}^A \Omega_B(t)}{\Delta t}$$

$$\dot{v}_A = {}^U\dot{V}_{AORG} \quad \dot{\omega}_A = {}^U\dot{\Omega}_A$$

$${}^B V_Q = \frac{d}{dt} {}^B Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B Q(t + \Delta t) - {}^B Q(t)}{\Delta t}$$

6.2 강체의 가속

- 선가속도

$${}^A V_Q = {}^A R^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R^B Q$$

식 5.12

$${}^A ({}^B V_Q) = {}^A R^B V_Q$$

식 5.4

$$\frac{d}{dt} ({}^A R^B V_Q) = {}^A R^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R^B Q$$

대입

○ 식 5.12를 미분하면,

$${}^A \dot{V}_Q = \frac{d}{dt} ({}^A R^B V_Q) + {}^A \dot{\Omega}_B \times {}^A R^B Q + {}^A \Omega_B \times \frac{d}{dt} ({}^A R^B Q)$$

6.2 강체의 가속

- 선가속도

$${}^A\dot{V}_Q = \underbrace{{}^A_R{}^B\dot{V}_Q}_{\text{원점 선가속도}} + \underbrace{{}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B V_Q}_{\text{회전 가속도}} + \underbrace{{}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_R{}^B Q}_{\text{회전 가속도}} + \underbrace{{}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B Q)}_{\text{회전 가속도}}$$

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A_R{}^B\dot{V}_Q + 2{}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B V_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_R{}^B Q + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B Q)$$

- 원점이 일치하지 않는 경우로 일반화하기 위하여 {B}의 원점 선가속도를 나타내는 항을 추가하면, (식 5.13에서 사용한 방법임)

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{BORG} + {}^A_R{}^B\dot{V}_Q + 2{}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B V_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_R{}^B Q + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B Q)$$

일반적인 관절의 링크의 선가속도

- 특수한 경우에 BQ 가 상수일 때 ${}^B V_Q = {}^B\dot{V}_Q = 0$

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{BORG} + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B Q) + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_R{}^B Q$$

회전 관절일 때의 링크의 선가속도

6.2 강체의 가속

- 각가속도

- {B}가 {A}에 기준하여 ${}^A\Omega_B$ 로 회전하고, {C}가 {B}에 기준하여 ${}^B\Omega_C$ 로 회전하는 경우

$${}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}^A_R{}^B\Omega_C$$

- 위 식을 미분하면,

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + \frac{d}{dt}({}^A_R{}^B\Omega_C)$$

$$\frac{d}{dt}({}^A_R{}^BQ) = {}^A_R{}^B\dot{Q} + {}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^BQ$$

식 6.6

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A_R{}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B\Omega_C$$

- 매니퓰레이터 링크의 각가속도를 구할 때 사용함

6.3 질량 분포

- 관성 모멘트(moment of inertia)와 관성 텐서(inertia tensor)
 - 관성 모멘트(관성 능률): “물체가 자신의 회전운동을 유지하려는 정도를 나타내는 물리량”으로써, 직선 운동에서의 질량에 대응되는 양이다. 기호는 통상적으로 I 이며, 간혹 J 로 나타내기도 한다. 관성 모멘트는 회전운동에서 매우 중요한 역할을 차지하는데, 관성 모멘트를 통해서 회전운동을 기술하는 데 꼭 필요한 각운동량, 각속도, 각가속도, 토크 사이의 관계를 이어주는 물리량이기 때문이다. 관성 모멘트를 표현하는 방법에는 두가지, 스칼라로 나타내는 스칼라 관성 모멘트와 더 고등의 텐서로 나타내는 관성 모멘트 텐서, 간단히 관성 텐서(inertia tensor)를 사용한 표현이 있다. 보통 스칼라 관성 모멘트를 간단히 관성 모멘트라 하기도 한다. 간단한 회전의 경우에는 복잡한 관성 텐서보다 스칼라 관성 모멘트만으로도 각 물리량 사이의 관계를 충분히 기술할 수 있다. 하지만 스칼라 관성 모멘트는 회전하는 팽이나 자이로스코프와 같이 복잡한 회전에 대한 물리량 사이의 관계를 기술하지 못하기 때문에, 이러한 경우에는 관성 텐서를 사용해 각 물리량 사이의 관계를 기술한다.
 - 최초로 관성 모멘트란 개념을 사용한 사람은 레온하르트 오일러이다. 그가 1730년에 발표한 책 《고체 또는 강체의 운동론》에서 관성 모멘트란 개념이 처음으로 등장하고 모멘트의 주축과 같은 이와 관련된 여러 개념들이 이 책을 통해 발표되었다.” - 위키피디아

6.3 질량 분포

- 관성 모멘트(moment of inertia)와 관성 텐서(inertia tensor)
 - 한 축 주위로 회전운동을 하는 경우에, 관성 모멘트(moment of inertia)라는 개념을 쓴다는 사실에 이미 친숙해 있을 것이다. 3차원 안에서 자유롭게 움직일 수 있는 강체에 대해서는 무한 개수의 가능한 회 전축이 존재할 수 있다. 어떤 임의의 축 주위로 회전하는 경우, 강체의 질량 분포를 완벽하게 규정하는 방법이 필요하다. 여기에서 관성 텐서 (inertia tensor)를 소개한다
 - 기준계에 대한 강체의 질량 분포에 관한 정보를 주는 한 세트의 양을 정의하기로 한다. 그림 6.1은 계를 부착한 강체를 보여준다. 관성 텐서가 어느 계에 기준하여 정의될 수 있지만, 강체를 부착된 계 안에서 정의된 관성 텐서를 고려하는 기준계를 좌측 상단첨자로 표시하기로 한다. 계 $\{A\}$ 에 기준한 관성 텐서는 3, $I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho dv$ 된다

$${}^A I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho dv$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho dv$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy\rho dv$$

$$I_{xz} = \iiint_V xz\rho dv$$

$$I_{yz} = \iiint_V yz\rho dv$$

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dv$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dv$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy \rho dv$$

$$I_{xz} = \iiint_V xz \rho dv$$

$$I_{yz} = \iiint_V yz \rho dv$$

질량 관성 모멘트 (mass moments of inertia): 각각의 경우에 질량 요소 ρdv 상응하는 축으로부터의 수직 거리의 제곱을 곱한 것을 적분

관성의 질량적 (mass products of inertia)

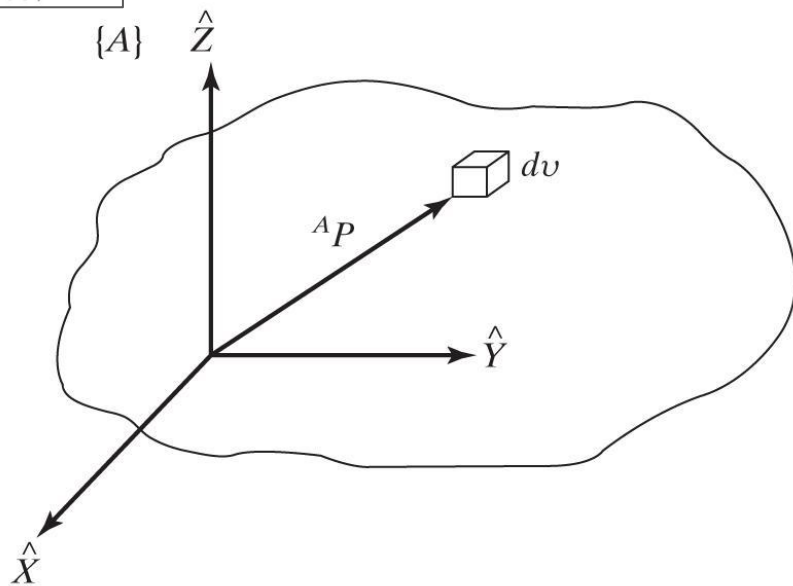


Figure 6.1

The inertia tensor of an object describes the object's mass distribution. Here, the vector ${}^A P$ locates the differential volume element, dv .

6.3 질량 분포

- 관성 모멘트(moment of inertia)와 관성 텐서(inertia tensor)
 - 어떤 물체의 경우에, 이 6개의 독립적인 양은 이 양들이 정의되는 기준계의 위치와 방향에 따라 결정되는 함수이다. 기준계의 방향을 자유롭게 선택 할 수 있으며, 관성적 (product of inertia)을 영으로 만들 수 있다. 그렇게 배열할 때 기준계의 축을 주축 (principal axes), 상응하는 질량 모멘트를 주관성 모멘트 (principal moments of inertia)라고 한다.

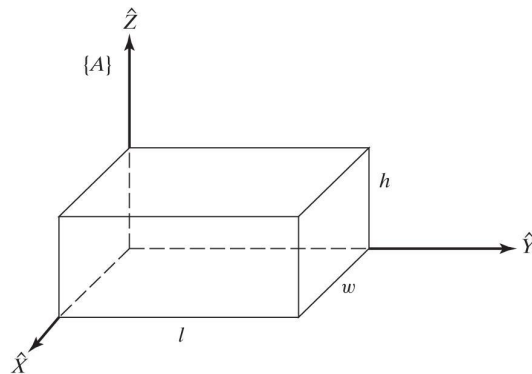
예제 6.1 균일 밀도 ρ 를 갖는 직육면체의 관성 텐서를 구하라.

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^h \int_0^l (y^2 + z^2) \omega \rho \, dy \, dz \\ &= \int_0^h \left(\frac{l^3}{3} + z^2 l \right) \omega \rho \, dz \\ &= \left(\frac{hl^3 \omega}{3} + \frac{h^3 l \omega}{3} \right) \rho \\ &= \frac{m}{3} (l^2 + h^2) \end{aligned}$$

$$I_{yy} = \frac{m}{3} (\omega^2 + h^2)$$

$$I_{zz} = \frac{m}{3} (l^2 + \omega^2)$$

Figure 6.2
A body of uniform density.



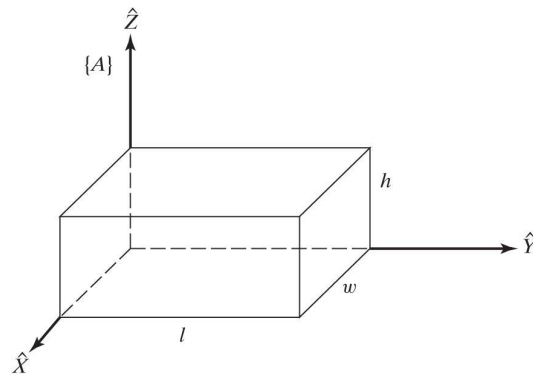
6.3 질량 분포

예제 6.1 균일 밀도 ρ 를 갖는 직육면체의 관성 텐서를 구하라.

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy\rho \, dx \, dy \, dz & I_{xz} &= \frac{m}{4} h\omega \\ &= \int_0^h \int_0^l \frac{\omega^2}{2} y\rho \, dy \, dz & I_{yz} &= \frac{m}{4} hl \\ &= \int_0^h \frac{\omega^2 l^2}{4} \rho \, dz \\ &= \frac{m}{4} \omega l \end{aligned}$$

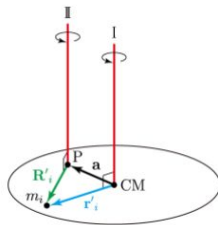
$${}^A I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(l^2 + h^2) & -\frac{m}{4}\omega l & -\frac{m}{4}h\omega \\ -\frac{m}{4}\omega l & \frac{m}{3}(\omega^2 + h^2) & -\frac{m}{4}hl \\ -\frac{m}{4}h\omega & -\frac{m}{4}hl & \frac{m}{3}(l^2 + \omega^2) \end{bmatrix}$$

Figure 6.2
A body of uniform density.



6.3 질량 분포

평행축 정리(parallel-axis theorem) - 출처: 나무위키



평행축 정리는 한 물체의 서로 평행한 두 회전축에 대한 관성 모멘트의 관계이다.

질량이 M 인 질점계의 질량중심을 CM 이라 하고, 그 점에서 수직으로 지나가는 회전축 I 에서 측정된 계의 관성 모멘트를 I_{CM} 이라 하자. 또, 계에서 i 번째 질점을 m_i 라 놓고, 회전축 I 를 기준으로 i 번째 질점까지의 위치 벡터를 \mathbf{r}'_i [4]라 하면,

$$I_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}'_i) = \sum_{i=1}^n m_i r_i'^2$$

이때, 축을 CM 으로부터 \mathbf{a} 만큼 평행이동한 회전축 II 에서 측정된 관성 모멘트를 I_P 라 하자. 이때, 축으로부터 질점까지의 거리 벡터는 $\mathbf{R}'_i = \mathbf{r}'_i - \mathbf{a}$ 가 된다. 따라서

$$I_P = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{R}'_i \cdot \mathbf{R}'_i) = \sum_{i=1}^n m_i [(\mathbf{r}'_i - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{a})]$$

가 되고, 모든 항을 전개하면,

6.3 질량 분포

평행축 정리(parallel-axis theorem) - 출처: 나무위키

$$I_P = \sum_{i=1}^n m_i r_i'^2 + \sum_{i=1}^n m_i a^2 - 2\mathbf{a} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i$$

\mathbf{a} 는 constant vector이므로 시그마를 벗고 나올 수 있고, 제 3항은 질량중심을 나타내는 벡터[\[참고\]](#)와 관련된 것인데, \mathbf{r}'_i 이 질량중심으로부터 측정된 벡터이기 때문에 제 3항은 0이 된다. 따라서

$$I_P = \sum_{i=1}^n m_i r_i'^2 + \sum_{i=1}^n m_i a^2$$

이고, 제 1항은 위에서 구했던 I_{CM} 이고, 제 2항의 $\sum_{i=1}^n m_i = M$ 으로써 질점계의 총 질량이므로 다음이 성립한다.

$$I_P = I_{CM} + Ma^2$$

이 정리는 연속체에 대해서도 똑같은 방법으로 증명되므로 질점계 및 강체에 모두 적용할 수 있다.

6.3 질량 분포

- 평행축 정리(parallel-axis theorem)를 이용하여 기준 좌표계의 전위에 따른 관성 텐서의 변화를 계산할 수 있다. 평행축 정리는 질량 중심에 원점을 갖는 계에서의 관성 텐서를 다른 기준계에 대한 관성 텐서와 연결시켜준다. $\{C\}$ 가 물체의 질량 중심에 위치해 있고, $\{A\}$ 가 임의로 전위된 계라면 이 정의는 다음 2개 방정식으로 표현

$${}^A I_{zz} = {}^C I_{zz} + m(x_c^2 + y_c^2)$$

$${}^A I_{xy} = {}^C I_{xy} - m x_c y_c$$

$$P_c = [x_c, y_c, z_c]^T$$

- 는 $\{A\}$ 에 기 ${}^A I = {}^C I + m[P_c^T P_c I_3 - P_c P_c^T]$ 를 나타냄

6.3 질량 분포

예제 6.2 예제 6.1의 강체의 관성 텐서를 물체의 중심에 원점을 갖고 있는 좌표계에 대해 기술하라.

평행축 정리를 적용하면,

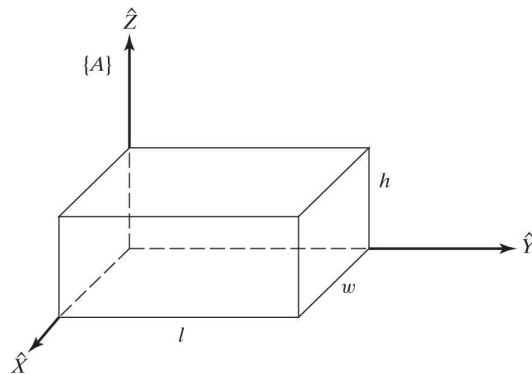
$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega \\ l \\ h \end{bmatrix}$$

$$^c I_{zz} = \frac{m}{12}(\omega^2 + l^2)$$

$$^c I_{xy} = 0$$

$$^c I = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(\omega^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(l^2 + \omega^2) \end{bmatrix}$$

Figure 6.2
A body of uniform density.



6.3 질량 분포

예제 6.2 예제 6.1의 강체의 관성 텐서를 물체의 중심에 원점을 갖고 있는 좌표계에 대해 기술하라.

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega \\ l \\ h \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} {}^C I_{zz} &= \frac{m}{12}(\omega^2 + l^2) \\ {}^C I_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

P_C

$${}^A I = {}^C I + m[P_C^T P_C I_3 - P_C P_C^T]$$

$${}^C I = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(\omega^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(l^2 + \omega^2) \end{bmatrix}$$

$${}^A I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(l^2 + h^2) & -\frac{m}{4}\omega l & -\frac{m}{4}h\omega \\ -\frac{m}{4}\omega l & \frac{m}{3}(\omega^2 + h^2) & -\frac{m}{4}hl \\ -\frac{m}{4}h\omega & -\frac{m}{4}hl & \frac{m}{3}(l^2 + \omega^2) \end{bmatrix}$$

$${}^A I = {}^C I + m[P_C^T P_C I_3 - P_C P_C^T]$$

$${}^C I = {}^A I - m\left[\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega & l & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ l \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega \\ l \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega l & h l \end{bmatrix}\right]$$

$$= {}^A I - \frac{m}{4} \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{bmatrix} + \frac{m}{4} \begin{bmatrix} \omega^2 & \omega l & \omega h \\ \omega l & l^2 & l h \\ h \omega & h l & h^2 \end{bmatrix}$$

$$= {}^A I + \frac{m}{4} \begin{bmatrix} 0 & \omega l & \omega h \\ \omega l & 0 & l h \\ h \omega & h l & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(l^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{3}(\omega^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}(l^2 + \omega^2) \end{bmatrix}$$

6.3 질량 분포

- 관성 텐서에 대한 추가적 성질은 다음과 같음
 - a. 물체의 질량 분포가 기준계의 **2**개 축으로 이루어진 평면에 대하여 대칭이면 대칭면에 수직인 좌표축을 인자로 갖고 있는 관성적들은 모두 **0**이다
 - b. 관성 모멘트는 언제나 양이다. 관성적은 음, 양의 부호를 가질 수 있다.
 - c. 관성 모멘트 **3**요소의 합은 기준계의 방향에 관계없이 불변이다
 - d. 관성 텐서의 고유치(**eigen value**)는 물체의 주 모멘트이다. 또한 그때의 고유 벡터는 주축이 된다.
- 대부분의 머니플레이터들은 링크의 기하학적 구성이 좀더 복잡하여 식 (6.17)의 적용은 실상 어려움. 실용적인 대안은 각 링크의 관성 모멘트를 계산하지 않고 축 정 장치(예를 들면, 관성 진자)를 써서 측정하는 것임

6.4 뉴턴의 방정식, 오일러의 방정식

- 만약 각 링크에 대하여 질량 중심의 위치와 관성 텐서를 알고 있다면, 질량 분포는 완전히 파악되었다고 할 수 있음
- 운동에 필요한 힘은, 목적하는 가속도와 링크의 질량 분포와의 함수임. 뉴턴의 방정식(Newton's equation)과 그것의 회전체에 대한 유사한 오일러의 방정식(Euler's equation)은 힘, 관성 그리고 가속이 어떻게 연관되는가를 기술함

- 뉴턴의 방정식

$$F = m\dot{v}_C$$

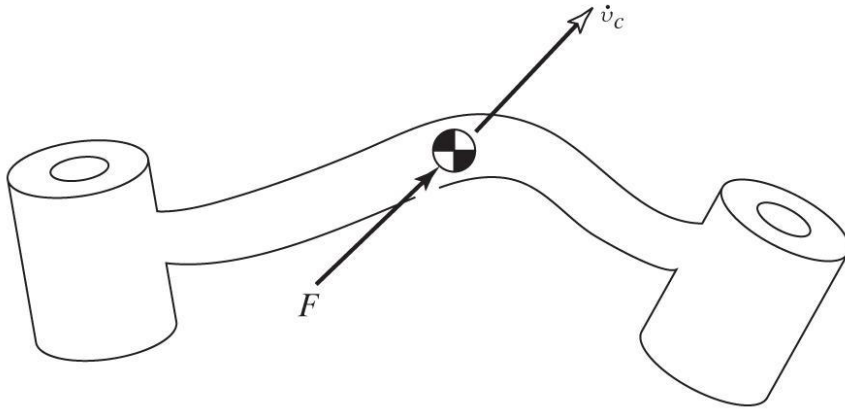


Figure 6.3

A force F acting at the center of mass of a body causes the body to accelerate at \dot{v}_C .

- 오일러의 방정식

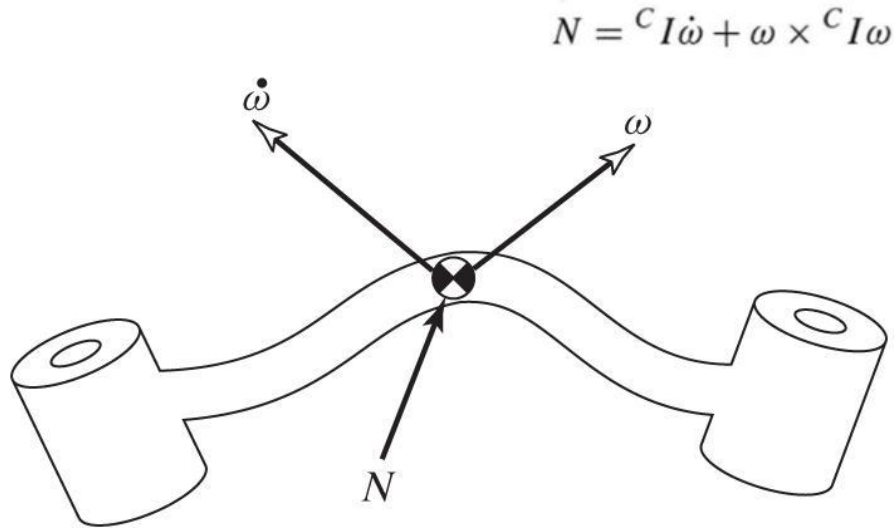



Figure 6.4

A moment N is acting on a body, and the body is rotating with velocity ω and accelerating at $\dot{\omega}$.

6.5 반복 뉴턴-오일러의 동역학 공식

- 머니플레이터의 주어진 궤적을 그리는 데 필요한 토크를 계산하는 문제 - 동역학 문제
위치, 속도, 가속도($\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$)
 - 관절의 위치와 속도를 알고 있다고 가정. 로봇의 질량분포 및 기구학에 관한 정보를 갖고 있음
 - 본 교재에서 설명하는 방법은 **Luh, Walker, Paul**이 제안한 방법이며, 다른 방법이 많음
 - 2단계로 문제를 풀것음
 - 1단계: 속도와 가속도 계산의 외향 반복(링크 1에서 링크 n으로)
 - 2단계: 힘과 토크 계산의 내향 반복(링크 n에서 링크 1로)
- 1단계: 속도와 가속도 계산의 외향 반복
 - 링크에 작용하는 관성력을 계산하기 위하여 임의의 순간 시점에서 머니플레이터의 각 링크의 질량 에 대하여 회전속도 및 회전 가속도를 계산할 수 있어야만 한다. 링크1에서 시작하여 ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$ 거쳐 링크 n까지 외향으로 반복 원리를 이용하여 계산하게 된다.
 - ${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1}R^i \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$

이분하
고 식
6.15
이용

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A_R{}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A_R{}^B\Omega_C$$

6.5 반복 뉴턴-오일러의 동역학 공식

- 관절 $i+1$ 이 프리즘 형이면,

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^i R^i \omega_i$$

- 링크 질량 중심의 선가속도는



$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1})$$

미분하
고 식
6.12

$${}^A \dot{V}_Q = {}^A \dot{V}_{BORG} + {}^A \Omega_B \times ({}^A \Omega_B \times {}^A_R {}^B Q) + {}^A \dot{\Omega}_B \times {}^A_R {}^B Q$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_i R [{}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) + {}^i \dot{v}_i]$$

- 관절 $i+1$ 이 프리즘 형이면,

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = & {}^{i+1}_i R (\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) + {}^i \dot{v}_i) \\ & + 2 {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \end{aligned}$$

6.5 반복 뉴턴-오일러의 동역학 공식

- 링크 질량 중심의 선가속도는

$${}^i\dot{v}_{C_i} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{C_i} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i + {}^iP_{C_i}) + {}^i\dot{v}_i$$

- 계 {c}는 원점이 링크의 질량 중심에 위치한 상태로 각 링크에 부착되고, 링크계 i와 같은 방위를 갖는 것으로 상상하면, 위 식은 관절운동을 일제 포함하지 않고 있으므로, 관절 i+1이 회전이거나 또는 미끄럼형에 관계없이 성립함
- ${}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0$

6.5 반복 뉴턴-오일러의 동역학 공식

- 2단계: 링크에 작용하는 힘과 토크

- 6.4절의 뉴턴-오일러 방정식을 적용하여 각 링크 질량 중심에 작용하는 관성력과 토크를 계산함

$$F_i = m\dot{v}_{C_i}$$

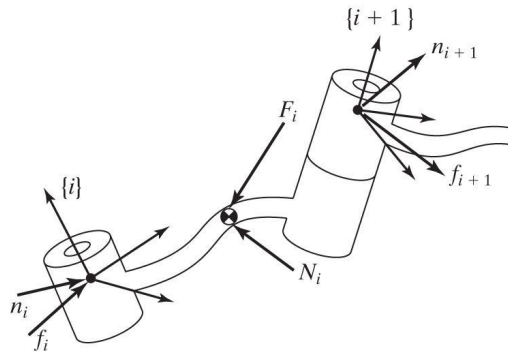
$$N_i = {}^C_i I \dot{\omega}_i + \omega_i \times {}^C_i I \omega_i$$

- 각 링크에 작용하는 힘과 토크를 계산했으면, 이제 각 링크에 가해지고 있는 힘과 토크를 일으키게 하는 관성 토크를 계산

f_i = 링크 $i-1$ 에 의해 링크 i 에 가해지는 힘

n_i = 링크 $i-1$ 에 의해 링크 i 에 가해지는 토크

Figure 6.5
The force balance,
including inertial forces,
for a single manipulator link.



6.5 반복 뉴턴-오일러의 동역학 공식

- 2단계: 링크에 작용하는 힘과 토크
 - 링크 i 에 작용하는 힘을 합하면 힘 평형관계를 얻음

$${}^i F_i = {}^i f_i - {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1}$$

- 질량 중심 주위의 토크를 합하고 그 합을 영으로 하면 토크 평형식에 도달함

$${}^i N_i = {}^i n_i - {}^i_{i+1} R^{i+1} n_{i+1} + ({}^i P_{C_i}) \times {}^i f_i - ({}^i P_{i+1} - {}^i P_{C_i}) \times {}^i f_{i+1}$$

- 몇 가지 회전행렬을 추가하면,

$${}^i N_i = {}^i n_i - {}^i_{i+1} R^{i+1} n_{i+1} - {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i - {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1}$$

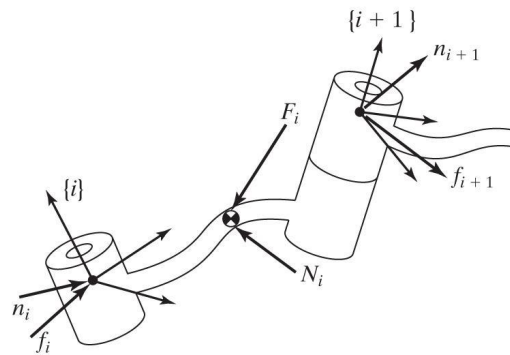


Figure 6.5

The force balance, including inertial forces, for a single manipulator link.

6.5 반복 뉴턴-오일러의 동역학 공식

- 2단계: 링크에 작용하는 힘과 토크

- 마지막으로 힘과 토크 방정식을 정돈하여 높은 번호의 이웃에서부터 낮은 번호의 이웃으로 반복관계를 정돈하면,

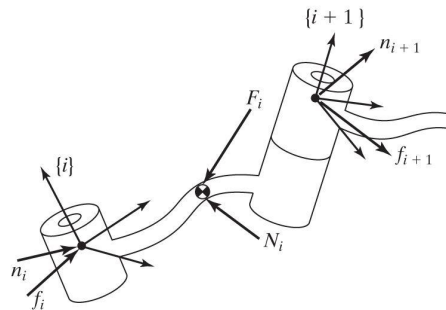
$$\begin{aligned} {}^i f_i &= {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \\ {}^i n_i &= {}^i N_i + {}^i_{i+1} R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1} \end{aligned}$$

- 정적인 경우에서 같이 한 링크에 의하여 그 이웃에 가해지는 토크의 Z 요소를 택하여 필요한 관절 토크를 찾으면,

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i$$

$$\tau_i = {}^i f_i^T {}^i \hat{Z}_i$$

프리즘 관절의
경우



6.5 반복 뉴턴-오일러의 동역학 공식

- 자유 공간에서 움직이는 로봇에서 ${}^{N+1}f_{N+1}$ 과 ${}^{N+1}n_{N+1}$ 은 영으로 고정되며, 따라서 링크 n에서 식을 처음 적용하는 것은 매우 쉬움. 만약 로봇이 주위와 접촉하고 있다면 힘과 모멘트는 ${}^{N+1}f_{N+1}$ 과 ${}^{N+1}n_{N+1}$ 을 영이 아닌 값으로 힘 평형식에 포함할 수 있음
- 반복형 뉴턴-오일러 동역학 알고리즘 (Luh, Walker, Paul이 제안한 방법) 요약

○ 1단계

$$\begin{aligned}
 {}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^iR^i \dot{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \\
 {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} &= {}^iR^i \ddot{\omega}_i + \left({}^iR^i \dot{\omega}_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \right) + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \\
 {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} &= {}^iR^i (\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + \omega_i \times (\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1}) + \dot{v}_i) \\
 {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} &= {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \\
 &\quad + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \\
 {}^{i+1}F_{i+1} &= m_{i+1} {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} \\
 {}^{i+1}N_{i+1} &= {}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1}
 \end{aligned}$$

링크 간 회전속도 전파

링크 간 가가속도 전파

링크 계 원점의 선가속도 전파

링크 질량 중심의 선가속도 전파

링크 질량 중심에 작용하는
관성력

6.5 반복 뉴턴-오일러의 동역학 공식

- 반복형 뉴턴-오일러 동역학 알고리즘 (Luh, Walker, Paul이 제안한 방법) 요약
 - 2단계 내향 반복($j: 6 \rightarrow 1$)

$${}^i f_i = {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^i_{i+1} R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i$$

$$+ {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1}$$

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i$$

링크 $i+1$ 에 의해 링크 i 에 가해지는
힘

링크 $i+1$ 에 의해 링크 i 에 가해지는
토크

- 동역학 알고리즘에 중력 포함

- 링크에 가해지는 중력의 효과는 매우 단순(${}^i \ddot{\mathbf{v}}_0$ 에 ^{관절 토크} $= \mathbf{G}$ 라는(여기에서 \mathbf{G} 는 중력 가속도 벡터) 형태로 포함할 수 있음. 이것은 로봇의 기저가 위쪽으로 $1g$ 가속도로 가속되고 있다라고 하는 것과 같음. 이 가상의 상방향 가속은 기구에 중력이 작용할 때와 완전히 동일한 효과를 나타냄

6.6 반복식 대 폐형

- 지금까지 동역학 해석은 반복적인(**recursive**) 수치 연산을 통해서 구했음. 하지만 해석적(폐형)으로 푸는 것도 의미가 있음. 이걸 5장에서 반복적인 수치 해석법 설명 후 자코비안의 기호 형태를 유도했던 방법과 유사함

6.6 반복식 대 폐형

- 지금까지 동역학 해석은 반복적인(**recursive**) 수치 연산을 통해서 구했음. 하지만 해석적(폐형)으로 푸는 것도 의미가 있음. 이걸 5장에서 반복적인 수치 해석법 설명 후 자코비안의 기호 형태를 유도했던 방법과 유사함

6.7 폐형식의 동역학 방정식 예

- 2-링크 평면 머니플레이터에 대한 동역학 방정식의 폐형식을 계산하면, 문제를 단순화시키기 위하여 질량 분포를 매우 단순하다고 가정한 후, 모든 질량을 각 링크의 원단(가장 먼 위치)에 점 질량의 형태로 존재한다고 하자. 이들 질량을 m_1 과 m_2 라 한다.

6.7 폐형식의 동역학 방정식 예

- 첫째로, 반복형 뉴턴-오일러 방정식에 나타나게 될 인자의 값을 결정하면,

$${}^1P_{C_1} = l_1 \hat{x}_1$$

$${}^2P_{C_2} = l_2 \hat{x}_2$$

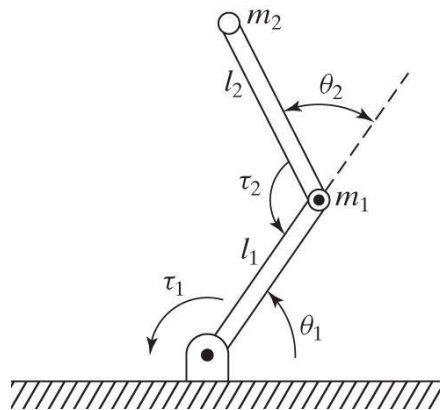
- 점 질량의 가정 때문에, 각 링크의 질량 중심에서 쓰인 관성 텐서는 영행렬이다.

$$c_1 I_1 = 0$$

$$c_2 I_2 = 0$$

- 말단 효과 장치 $f_3 = 0$ (용하 $\omega_0 = 0$) 이 없고 기저가 회전하지
 $n_3 = 0$ $\dot{\omega}_0 = 0$ ${}^0\dot{v}_0 = g\hat{y}_0$

Figure 6.6
Two-link planar manipulator with point masses at distal ends of links.



6.7 폐형식의 동역학 방정식 예

- 첫째로, 반복형 뉴턴-오일러 방정식에 나타나게 될 인자의 값을 결정하면,
 - 순차적 링크계 간의 회전

$${}^i_{i+1}R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0.0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$${}^{i+1}_iR = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0.0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

- 링크 1에 대한 외향 반복은

$${}^1\omega_1 = \dot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

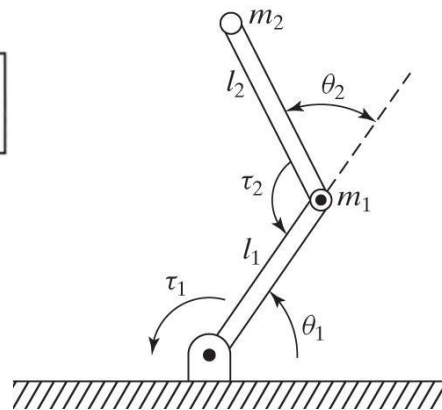
$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1F_1 = \begin{bmatrix} -m_1l_1\dot{\theta}_1^2 + m_1gs_1 \\ m_1l_1\ddot{\theta}_1 + m_1gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figure 6.6
Two-link planar
manipulator with point
masses at distal ends of
links.



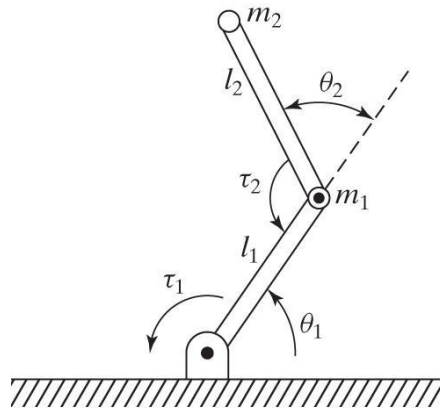
6.7 폐형식의 동역학 방정식 예

- 링크 2에 대한 외향 반복은

$$\begin{aligned}
 {}^2\omega_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} & {}^2\dot{v}_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2\dot{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} & {}^2\dot{v}_{C_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & & & + \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2F_2 &= \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2N_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figure 6.6

Two-link planar manipulator with point masses at distal ends of links.



6.7 폐형식의 동역학 방정식 예

- 링크 2에 대한 내향 반복은

$${}^2f_2 = {}^2F_2$$

$${}^2n_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1l_2c_2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2 + m_2l_2gc_{12} + m_2l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}$$

- 링크 1에 대한 내향 반복은

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2l_1s_2\ddot{\theta}_1 - m_2l_1c_2\dot{\theta}_1^2 + m_2gs_{12} - m_2l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2l_1c_2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1s_2\dot{\theta}_1^2 + m_2gc_{12} + m_2l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -m_1l_1\dot{\theta}_1^2 + m_1gs_1 \\ m_1l_1\ddot{\theta}_1 + m_1gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1l_2c_2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2 + m_2l_2gc_{12} + m_2l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_1l_1gc_1 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1^2\ddot{\theta}_1 - m_2l_1l_2s_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2l_1gs_2s_{12} \\ + m_2l_1l_2c_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2l_1gc_2c_{12} \end{bmatrix}$$

6.7 폐형식의 동역학 방정식 예

- 관절 토크는 ${}^i n_i$ 의 Z요소임

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ \tau_2 &= m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\end{aligned}$$

2-링크 평면 머니플레이터의 동역학 해석 결과임. 일반적인 6자유도 머니플레이터라면 ?

6.8 머니플레이터 동역학 방정식의 구조

- 머니플레이터의 동역학 방정식을 1개의 방정식을 사용하여 세부 사항은 나타내지 않고 방정식의 일부 구조만 보여주는 것이 편리함
- 형태 공간 방정식(state space equation)

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ \tau_2 &= m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\end{aligned}$$

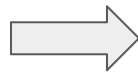


$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

- $M(\Theta)$ 는 머니플레이터의 $n \times n$ 질량행렬 (mass matrix), $V(\Theta, \dot{\Theta})$ 는 원심력과 코리올리 항의 $n \times 1$ 벡터, $G(\Theta)$ 는 중력의 $n \times 1$ 벡터임

- 예제 6.3 $M(\Theta)$ $V(\Theta, \dot{\Theta})$ $G(\Theta)$ 을 구하라.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ \tau_2 &= m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\end{aligned}$$



정리

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 c_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

- 모든 매니퓰레이터 관성행렬은 대칭이고 양의 정치 (positive definite)이다. 따라서 언제나 역이 존재

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

원심력: 관절 속도의 제곱에 비례

코리올리 힘: 2개 관절 속도의 곱

- 관절 속도에 관한 항

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

- 중력항은 중력 상수 g 가 포함된 항

6.8 머니플레이터 동역학 방정식의 구조

- 형태 공간 방정식(state space equation)
- 자세 공간 방정식(configuration space equation)

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + B(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta)$$

- $B(\Theta)$ 은 $n \times n(n-1)/2$ 차원의 코리올리 계수이며 $[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]$ 는 $n \times n(n-1)/2 \times 1$ 차원의 관절 속도의 곱으로, 다음과 같음

$$[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] = [\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \ \dots \ \dot{\theta}_{n-1}\dot{\theta}_n]^T$$

- $C(\Theta)$ 은 원심력항 계수의 $n \times n$ 행렬이며 $[\dot{\Theta}^2]$ 은 $n \times 1$ 벡터로서 다음과 같음

$$[\dot{\theta}_1^2 \ \dot{\theta}_2^2 \ \dots \ \dot{\theta}_n^2]^T$$

- 행렬들이 머니플레이터의 위치만의 함수임. 덜 복잡함

예제 6.4 예제 6.3에서 $B(\theta)$ 와 $C(\theta)$ 를 구하라

- 자세 공간 방정식(configuration space equation) $\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + B(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta)$
 - $B(\theta)$ 은 $n \times n(n-1)/2$ 차원의 코리올리 계수이며 $[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]$ 는 $n \times n(n-1)/2 \times 1$ 차원의 관절 속도의 곱
 - $C(\theta)$ 은 원심력항 계수의 $n \times n$ 행렬이며 $[\dot{\Theta}^2]$ 은 $n \times 1$ 벡터

$$[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] = [\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2]$$

$$[\dot{\Theta}^2] = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$B(\Theta) = \begin{bmatrix} -2m_2l_1l_2s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2l_1l_2s_2 \\ m_2l_1l_2s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

6.9 머니플레이터 동역학의 라그랑주 공식

- 뉴턴-오일러 방법에 대한 다른 방법으로 라그랑주 동역학 공식(Lagrangian dynamic formulation)을 간단히 소개함
 - 동역학에 대한 에너지 방식 접근법임 (고등학교 때 물체의 움직임을 힘으로 해석하거나 위치에너지-운동에너지로 해석하는 방법 배움)
 - 우선, 머니플레이터의 i 번째 링크의 운동에너지 k_i 는 다음과 같음

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^i \omega_i^T C_i I_i {}^i \omega_i$$

- 첫 번째 항은 링크의 질량 중심의 선속도에 의한 에너지이고, 두 번째 항은 각속도에 의한 에너지이다. 머니플레이터 전체의 운동 에너지는 각각의 링크 운동 에너지의 합

$$k = \sum_{i=1}^n k_i$$

6.9 머니플레이터 동역학의 라그랑주 공식

- v_{Ci} 와 ${}^i w_i$ 는 Θ 와 $\dot{\Theta}$ 의 함수이므로, 머니플레이터의 운동 에너지는 관절의 위치와 속도의 $k(\Theta, \dot{\Theta})$ 로 표현가능

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T M(\Theta) \dot{\Theta}$$

- 위 식의 표현은 2차 형식(quadratic form)으로 알려져 있고, 식을 전개하면 $\dot{\Theta}$ 항은 2차 항만 만 관계되어 나타남. 운동 에너지의 합은 항상 양이므로, 머니플레이터의 질량행렬은 양의 정치(positive definite) 행렬이어야만 함
- 양의 정치 행렬의 특성은 2차 형식이 언제나 양의 스칼라로 나타나며, 위 식은 점 질량의 운동 에너지의 표현과 유사함
- $k = \frac{1}{2} m v^2$
- i 번째 링크의 위치 에너지 u_i 는

$$u_i = -m_i {}^0 g^T {}^0 P_{C_i} + u_{ref_i}$$

6.9 머니풀레이터 동역학의 라그랑주 공식

- i 번째 링크의 위치 에너지 u_i 는

$$u_i = -m_i {}^0g^T {}^0P_{C_i} + u_{ref_i}$$

- 여기서 0g 는 3×1 중력 벡터이고, ${}^0P_{C_i}$ 는 i 번째 링크의 질량 중심까지의 위치 벡터이며 u_{ref} 는 u_i 의 최소값이 영이 되도록 취한 임의의 상수

$$u = \sum_{i=1}^n u_i$$

- 라그랑주 동역학 공식은, 기계 시스템의 운동 에너지와 위치 에너지의 차로 정의되는 라그랑주라고 불리는 스칼라 함수로부터 운동방정식을 유도하는 방법임

$$\mathcal{L}(\Theta, \dot{\Theta}) = k(\Theta, \dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

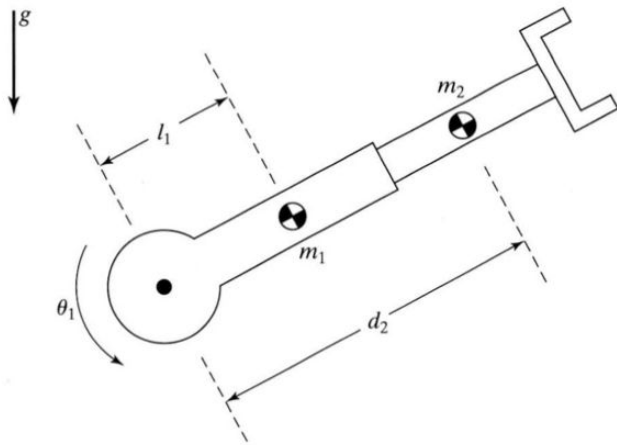
6.9 머니플레이터 동역학의 라그랑주 공식

- 따라서 머니플레이터의 운동방정식은

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = \tau$$

예제 6.5 RP 머니플레이터의 링크는 다음과 같은 관성 텐서를 갖고 있을 때 운동방정식은?

$$c_1 I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$
$$c_2 I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$



예제 6.5 RP 머니플레이터의 링크는 다음과 같은 관성 텐서를 갖고 있을 때
운동방정식은?

$$k_1 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{zz1}\dot{\theta}_1^2$$

$$u_1 = m_1l_1g \sin(\theta_1) + m_1l_1g$$

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2d_2^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{d}_2^2$$

$$u(\Theta) = g(m_1l_1 + m_2d_2) \sin(\theta_1) + m_1l_1g + m_2gd_{2max}$$

$$\tau_1 = (m_1l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2d_2^2)\ddot{\theta}_1 + 2m_2d_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ + (m_1l_1 + m_2d_2)g \cos(\theta_1)$$

$$\tau_2 = m_2\ddot{d}_2 - m_2d_2\dot{\theta}_1^2 + m_2g \sin(\theta_1)$$

$$k_2 = \frac{1}{2}m_2(d_2^2\dot{\theta}_1^2 + \dot{d}_2^2) + \frac{1}{2}I_{zz2}\dot{\theta}_1^2$$

$$u_2 = m_2gd_2 \sin(\theta_1) + m_2gd_{2max}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} (m_1l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2d_2^2)\dot{\theta}_1 \\ m_2d_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2d_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} g(m_1l_1 + m_2d_2) \cos(\theta_1) \\ g m_2 \sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2d_2^2) & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 2m_2d_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ -m_2d_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1l_1 + m_2d_2)g \cos(\theta_1) \\ m_2g \sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

6.10 직교좌표 공간에서의 머니플레이터 동역학

- 이 절에서는 직교좌표 공간에서의 말단 효과 장치의 가속을 말단 효과 장치에 작용하는 직교좌표 힘과 모멘트에 연관시키는 동역학 방정식에 대해서 설명함
 - 직교좌표계 상태 공간 방정식: 머니플레이터의 운동을 직교좌표계 변수를 가지고 일반적인 형태로 표시하는 것이 바람직한 경우가 있음

$$\mathcal{F} = M_x(\Theta)\ddot{\chi} + V_x(\Theta, \dot{\Theta}) + G_x(\Theta)$$

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

- F 는 로봇의 말단 효과 장치에 작용하는 힘-토크 벡터이며, χ 는 말단 효과 장치의 위치와 방위를 나타내며 상응하는 직교좌표계 벡터임
- $M_x(\Theta)$ 는 직교좌표 질량행렬 (Cartesian mass matrix)이고 $V_x(\Theta, \dot{\Theta})$ 는 직교좌표 공간에서의 속도 $\dot{\chi}$ 에 비례하는 벡터이고 $G_x(\Theta)$ 는 직교좌표 공간에서의 중력항의 벡터임

6.10 직교좌표 공간에서의 머니폴레이터 동역학

- 식 5.96처럼 말단 효과 장치에 작용하는 힘 F 는 액추에이터에 의하여 다음 식처럼 관절에 가해짐

$$\tau = J^T(\Theta)\mathcal{F}$$

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

- 위의 식에 자코비안의 전치의 역을 곱하면,

$$J^{-T}\tau = J^{-T}M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta, \dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta)$$

$$\mathcal{F} = J^{-T}M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta, \dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta)$$

6.10 직교좌표 공간에서의 매니폴레이터 동역학

- 식 5.64처럼 자코비안의 정의에서

$$\dot{\chi} = J\dot{\Theta}$$

- 위의 식을 미분하면,

$$\ddot{\chi} = \dot{J}\dot{\Theta} + J\ddot{\Theta}$$

$$\ddot{\Theta} = J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta}$$

$$\mathcal{F} = J^{-T}M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta, \dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta) \implies \mathcal{F} = J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta, \dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta)$$

$$M_x(\Theta) = J^{-T}(\Theta)M(\Theta)J^{-1}(\Theta)$$

$$V_x(\Theta, \dot{\Theta}) = J^{-T}(\Theta)(V(\Theta, \dot{\Theta}) - M(\Theta)J^{-1}(\Theta)\dot{J}(\Theta)\dot{\Theta})$$

$$G_x(\Theta) = J^{-T}(\Theta)G(\Theta)$$

예제 6.6 2-링크 평면 머니플레이터에 대한 직교좌표 공간 형태의 동역학을 유도하라

$$J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad J^{-1}(\Theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 & 0 \\ -l_1 c_2 - l_2 & l_1 s_2 \end{bmatrix} \quad \dot{J}(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 c_2 \dot{\theta}_2 & 0 \\ -l_1 s_2 \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_x(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 + \frac{m_1}{s_2^2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$V_x(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} -(m_2 l_1 c_2 + m_2 l_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 - (2m_2 l_2 + m_2 l_1 c_2 + m_1 l_1 \frac{c_2}{s_2^2}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + l_1 m_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$G_x(\Theta) = \begin{bmatrix} m_1 g \frac{c_1}{s_2} + m_2 g s_{12} \\ m_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

- $s_2 = 0$ 일 때, 특이 위치에 놓이게 되며, 동역학 항 중 어떤 것은 무한대로 감. 예를 들어 $\theta_2 = 0$ 일 때(팔이 밖으로 곧게 뻗어졌을 때), 말단 효과 장치의 실효 직교 좌표 질량은 예상되는 바와 같이 링크-2 말단 계의 X_2 방향을 따라 무한대감. 일반적으로 특이 형상에서는 운동을 불가능하게 하는 특이 방향이 존재하나, 이 방향에 직교하는 부분 공간에서는 일반적으로 운동이 가능

6.10 직교좌표 공간에서의 머니폴레이터 동역학

- 직교좌표 형상 공간 토크 방정식

$$\mathcal{F} = M_x(\Theta)\ddot{\chi} + V_x(\Theta, \dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \quad \tau = J^T(\Theta)\mathcal{F}$$

- 두 식을 합치면,

$$\tau = J^T(\Theta)(M_x(\Theta)\ddot{\chi} + V_x(\Theta, \dot{\Theta}) + G_x(\Theta))$$

$$\tau = J^T(\Theta)M_x(\Theta)\ddot{\chi} + B_x(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C_x(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta)$$

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + B(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta)$$

6.11 비강체(non-rigid body) 효과의 포함

- 지금까지 마찰을 고려하지 않았음. 구동기를 사용하면 필연적으로 마찰이 존재함
 - 마찰의 가장 간단한 모형은 점성마찰(viscous friction)

$$\tau_{friction} = v\dot{\theta}$$

- 관절 속도의 부호에만 영향을 받는 쿨롱 마찰(coulomb friction)

$$\tau_{friction} = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta})$$

- 위의 2가지를 모두 포함하면,

$$\tau_{friction} = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + v\dot{\theta}$$

$$\tau_{friction} = f(\theta, \dot{\theta})$$

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta})$$

6.12 동적 시뮬레이션

- 머니플레이터의 동적 움직임을 시뮬레이션하기 위해서는 전 슬라이드의 동역학 모델을 사용함

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta})$$

$$\ddot{\Theta} = M^{-1}(\Theta)[\tau - V(\Theta, \dot{\Theta}) - G(\Theta) - F(\Theta, \dot{\Theta})]$$

- 위의 식을 수치 적분 방법 중의 한 가지(오일러 적분)를 적용해서 $t = 0$ 에서 시작해서 시간 순으로 반복적으로 적분해 나감. 초기 조건은 다음과 같음

$$\Theta(0) = \Theta_0$$

$$\dot{\Theta}(0) = 0$$

$$\dot{\Theta}(t + \Delta t) = \dot{\Theta}(t) + \ddot{\Theta}(t)\Delta t$$

$$\Theta(t + \Delta t) = \Theta(t) + \dot{\Theta}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\Theta}(t)\Delta t^2$$