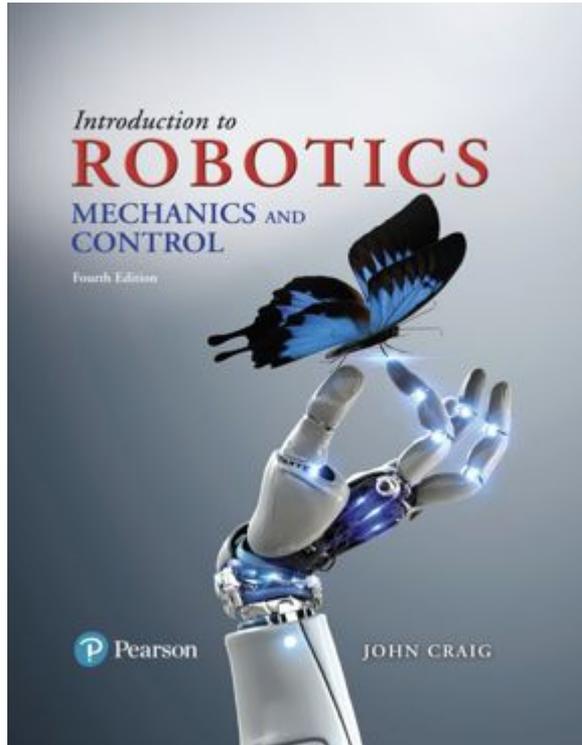


# Introduction to Robotics

Mechanics and Control

4<sup>th</sup> Edition



## Chapter 10

머니플레이터의 비선형 제어

## 10.1 개요

- 9장에서 머니플레이터 제어 문제를 선형 해석하기 위해 여러 가지 근사치를 만들었다. 이러한 근사치 중에서 가장 중요한 것은 각 관절이 서로 독립이라고 생각할 수 있다는 것과 각 관절 액츄에이터에서 ‘바라본(seen)’ 관성이 일정하다는 것이다. 앞의 장에서 소개되었듯이 선형 컨트롤러를 설계하는 데 있어서, 이러한 근사는 균일하지 않는 감쇠와 다른 바람직하지 않은 효과를 작업 공간에서 유발한다.
- 이 장에서는 이러한 가정을 하지 않아도 되는 좀더 진보된 제어 기술을 소개한다. 제6장에서 일반적인 머니플레이터에 대하여 유도한  $n \times 1$  비선형 벡터 운동 미분방정식을 컨트롤러에 적용할 것이며, 이 중에서 **computed torque method**를 설명한다.

## 10.2 비선형이며 시간에 따라 변화하는 시스템

- 자동제어 수업시간에 비선형 시스템을 특정 동작점에서 선형화해서 해석했음
- 여기서는 비선형 방정식을 직접 다룸
- 그림 9.6의 스프링이 비선형 특성을 갖는다고 하면, 9장의 선형 제어기의 모델-기준 부분이 계속 바뀌게 됨. 하지만 스프링의 비선형 효과가 제어법칙의 비선형 항에 의하여 정확히 상쇄됨으로써 전체적인 강성이 모든 시간 동안에 일정하게 유지되게 하는  $k_p$ 를 계산함으로써 가능할 수 있다. 이러한 제어법을 선형화 제어법칙이라고 하며, 이 방법에서 비선형 제어항이 제어될 시스템의 비선형 부분을 ‘상쇄’ 하기 위하여 사용되고, 그 결과 전체 페루프는 선형이 됨
-

- 예제 10.1 아래 그림에 보인 비선형 스프링의 특성을 고려해보자.  $f = kx$ 로 표시되는 일반적인 선형 스프링 대신에 이 스프링은  $f = qx^3$ 으로 기술한다. 이 스프링이 [그림 9.6]의 시스템을 이루고 있다. 이 시스템의 강성이  $k_{CL}$ 일 때, 시스템의 감쇠가 임계감쇠가 되도록 제어법칙을 결정하면,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + qx^3 = f$$

$$f = \alpha f' + \beta$$

$$\alpha = m$$

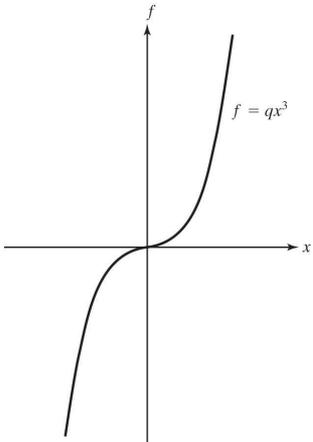
$$\beta = b\dot{x} + qx^3$$

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

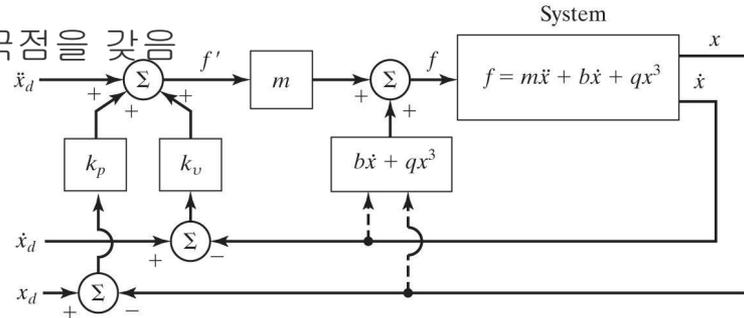
결과적으로 페루프 시스템은 9장의 선형

- 시스템 결과와 같아짐. 즉, 고정 위치에 극점을 갖음

**Figure 10.1**  
The force-vs.-distance characteristic of a nonlinear spring.



**Figure 10.2**  
A nonlinear control system for a system with a nonlinear spring.



- 예제 10.2 비선형 마찰 특성을 고려하자. 선형 마  $f = b\dot{x}$  로 표시되는 반면, 이 쿨롱  $f = b_c \text{sgn}(\dot{x})$  로 표시된다. 이와 같은 마찰이 시스템이 존재할 때, 시스템의 비선형 모델-기준 부분이 항상 임계감쇠가 되도록 제어 시스템을 설계하라

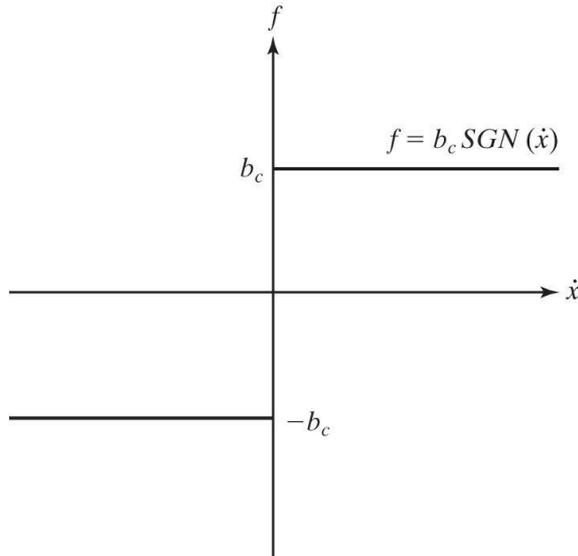
$$m\ddot{x} + b_c \text{sgn}(\dot{x}) + kx = f$$

$$f = \alpha f' + \beta$$

$$\alpha = m$$

$$\beta = b_c \text{sgn}(\dot{x}) + kx$$

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

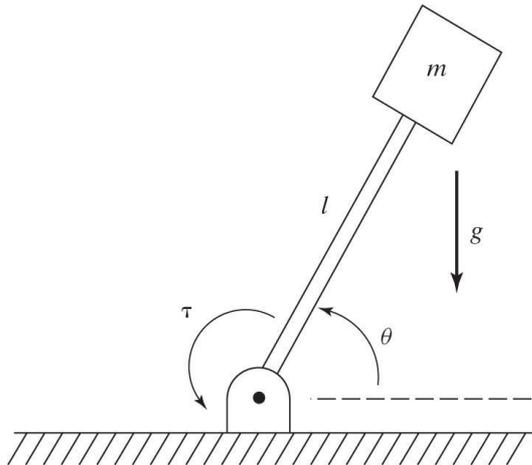


**Figure 10.3**  
The force-vs.-velocity  
characteristic of Coulomb  
friction.

- 예제 10.3 1개의 링크로 이루어진 머니플레이터를 고려하자. 이것은 1개의 회전 관절을 갖고 있다. 질량은 링크의 맨 끝에 위치하고 있다고 생각하자. 따라서 관성 모멘트는  $ml^2$ 이다 관절에는 쿨롱 마찰과 점성 마찰이 작용하고 있고, 중력 때문에 생기는 무게가 있다.

**Figure 10.4**

An inverted pendulum or a one-link manipulator.



$$\tau = ml^2\ddot{\theta} + v\dot{\theta} + c\text{sgn}(\dot{\theta}) + mlg\cos(\theta)$$

$$f = \alpha f' + \beta$$

$$\alpha = ml^2$$

$$\beta = v\dot{\theta} + c\text{sgn}(\dot{\theta}) + mlg\cos(\theta)$$

$$f' = \ddot{\theta}_d + k_v\dot{e} + k_p e$$

## 10.2 비선형이며 시간에 따라 변화하는 시스템

- 비선형 제어 이론은 일반적으로 매우 어렵지만, 앞서의 간단한 경우에는 비선형 제어 장치 설계가 어렵지 않았음. 여기서 사용한 방법을 요약하면,
  - 제어될 시스템의 비선형 부분을 ‘상쇄’하기 위하여, 비선형 모델-기준 제어법칙을 계산한다. → 이러한 역모델(**inverse model**)의 파라미터와 구조를 알아야 함(실제는 어려움)
  - 시스템을 단위 질량에 대하여 개발한 간단한 선형 서보 법칙을 이용하여 제어할 수 있도록 선형 시스템으로 바꾼다.

## 10.3 다입력, 다출력 제어 시스템

- 모델-기준 부분과 서보 부분으로 분리하는 방법은 그대로 적용. 다만, 행렬과 벡터의 형태로 표현
- $$F = \alpha F' + \beta \quad F' = \ddot{X}_d + K_v \dot{E} + K_p E$$
- 디커플되도록 설계해야 편함 (대각선 행렬)

## 10.4 머니플레이터의 제어 문제

- 6장의 머니플레이터 동역학 운동방정식을 보면,

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

- 추가로 마찰 혹은 비강체 특성을 포함하면

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta})$$

$$\tau = \alpha\tau' + \beta$$

$$\alpha = M(\Theta)$$

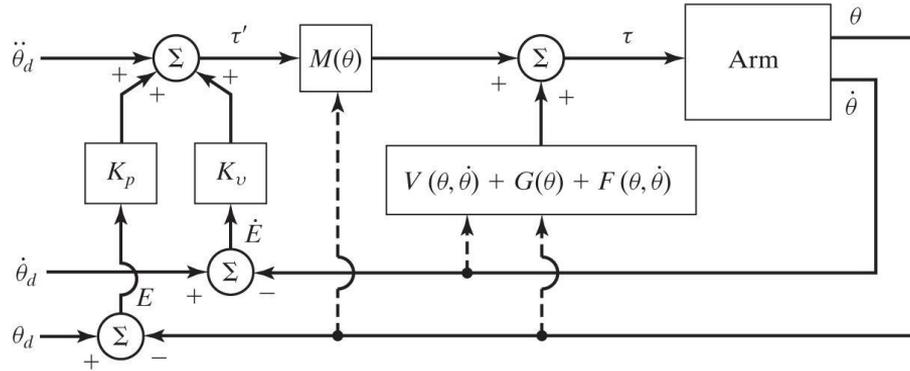
$$\beta = V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta})$$

$$\tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v\dot{E} + K_pE$$

$$E = \Theta_d - \Theta$$

$$\ddot{E} + K_v\dot{E} + K_pE = 0$$

**Figure 10.5**  
A model-based manipulator-control system.

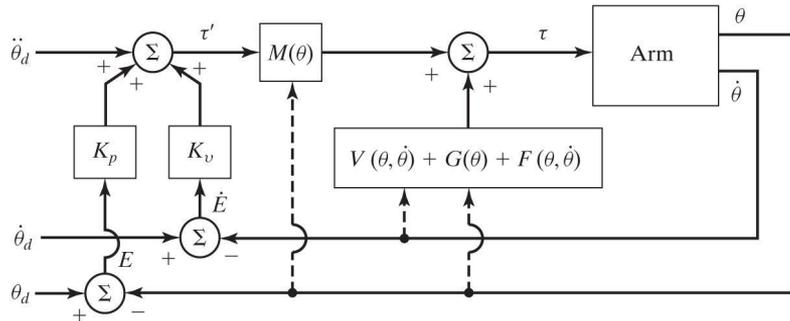


- 이상적인 성능은 실제로는 얻을 수 없는데, 주된 두 가지 이유는
  - 연속 시간 제어에 반대한 전자계산기의 이산 특성(discrete nature)
  - 머니플레이터 모델의 부정확성

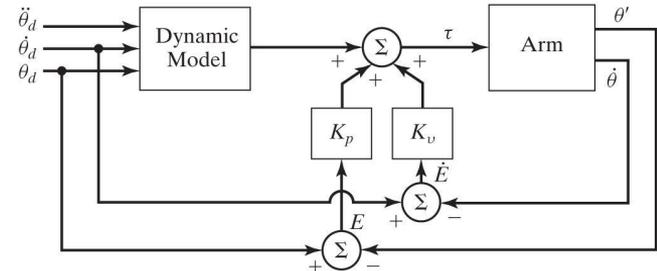
# 10.5 실제적인 고려

- 앞서의 디커플 선형화 제어기에서 몇 개의 가정이 틀림
  - 모델을 계산하는데 걸리는 시간 → 일정한 샘플링률 → 이산 시간 제어(discrete time control)
    - 일반적으로 계산이 매우 빠리, 그리고 매우 자주 수행될 수 있으면 연속 시간으로 근사하는 것이 유효하다고 가정
    - 정방향 피드 비선형 제어(feedforward nonlinear control): 시간이 짧아서 좋음

**Figure 10.5**  
A model-based  
manipulator-control system.



**Figure 10.6**  
Control scheme with the model-based  
portion “outside” the servo loop.



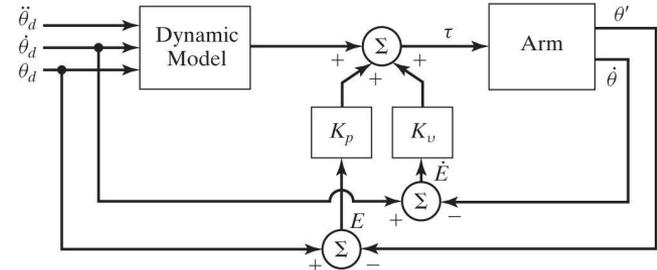
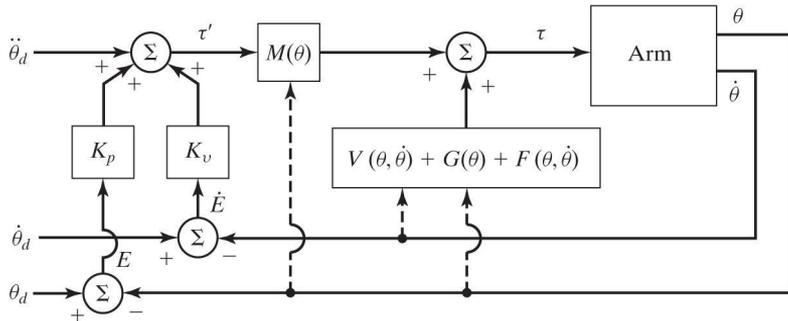
# 10.5 실제적인 고려

- 정방향 피드 비선형 제어(feedforward nonlinear control)

- 모델-기준 제어 부분이 서보 제어 루프의 바깥쪽에 있음. 따라서 이득으로 오차를 곱하는 과정만 하는 빠른 내부 서보 루프를 갖을 수 있고, 모델-기준 토크는 느린 비율로 더해질 수 있음
- 디커플링이 완전하지 않음

$$\ddot{E} + M^{-1}(\Theta)K_v\dot{E} + M^{-1}(\Theta)K_pE = 0$$

**Figure 10.5** A model-based manipulator-control system. **Figure 10.6** Control scheme with the model-based portion “outside” the servo loop.

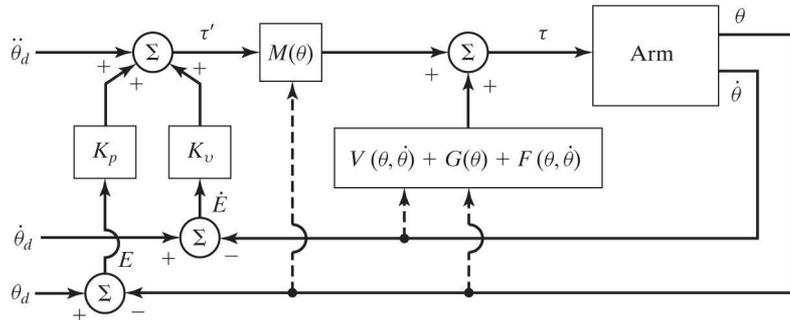


# 10.5 실제적인 고려

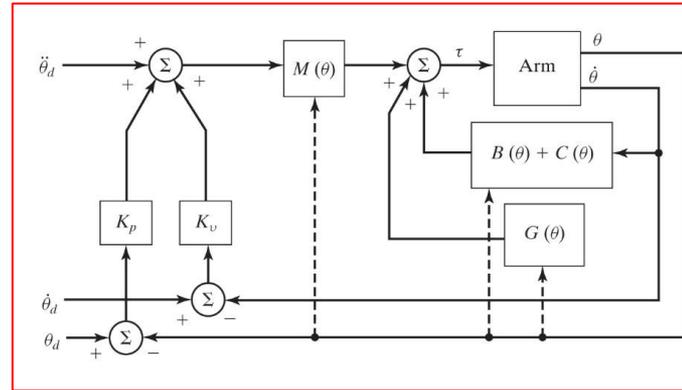
- 이중 샘플링률 계산 토크 구현
  - 머니플레이터의 동역학적 파라미터가 머니플레이터의 위치만의 함수로 나타나도록 항상 공간(configuration)의 형식으로 표현하면(식 6.105처럼). 이러한 함수들은 이면(background) 공정이나 혹은 제 2의 제어 컴퓨터에 의해 계산될 수도 있으며, 혹은 미리 계산된 표로부터 읽어 들일 수 있음 → 페루프 서보율을 높이고 동역학적 파라미터 채신율은 낮출 수 있음

**Figure 10.5**  
A model-based  
manipulator-control system.

$$\tau = J^T(\Theta)M_x(\Theta)\ddot{\chi} + B_x(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C_x(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta) \quad \text{식 6.105}$$



**Figure 10.7**  
An implementation of the  
model-based



# 10.5 실제적인 고려

- 인자(파라미터)에 관한 지식 부족
  - 동역학적 모델이 정확하게 알려져 있지 않을 경우: 마찰 모델, 새로운 공구 등

$$\ddot{E} + K_v \dot{E} + K_p E = M^{-1}(\Theta) \tau_d$$

$$E = K_p^{-1} M^{-1}(\Theta) \tau_d \quad \text{식 9.56 참조}$$

- 머니플레이터의 동역학의 모델이 완전하지 않으면

$$\hat{M}(\Theta), \hat{V}(\Theta, \dot{\Theta}), \hat{G}(\Theta), \hat{F}(\Theta, \dot{\Theta}) \neq M(\Theta), V(\Theta, \dot{\Theta}), G(\Theta), F(\Theta, \dot{\Theta})$$

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta})$$

$$\tau = \alpha \tau' + \beta$$

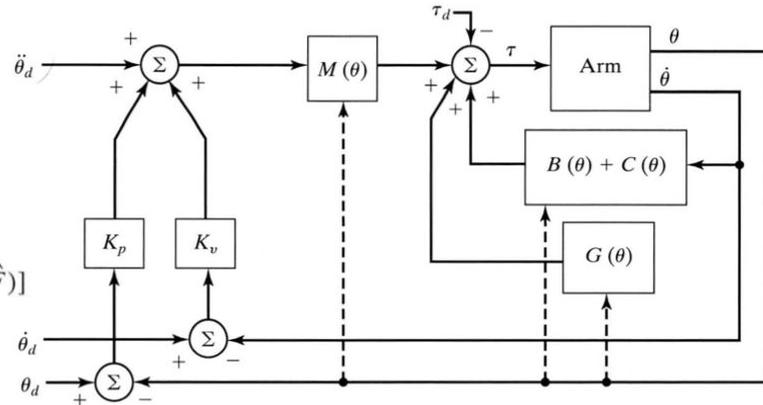
$$\alpha = \hat{M}(\Theta)$$

$$\beta = \hat{V}(\Theta, \dot{\Theta}) + \hat{G}(\Theta) + \hat{F}(\Theta, \dot{\Theta})$$

$$\ddot{E} + K_v \dot{E} + K_p E$$

$$= \hat{M}^{-1} [(M - \hat{M}) \ddot{\Theta} + (V - \hat{V}) + (G - \hat{G}) + (F - \hat{F})]$$

**Figure 10.8**  
The model-based controller with an external disturbance acting.



## 10.6 최근의 산업용 로봇 제어 시스템

- 산업용 로봇 생산자들은 경제적인 이유 때문에 완벽한 머니플레이터 모델을 제어 장치에 사용하는 것이 효과가 없을 것이라고 결론을 내리고, 머니플레이터는 오차에 의해서만 구동되는 간단한 제어기를 사용함

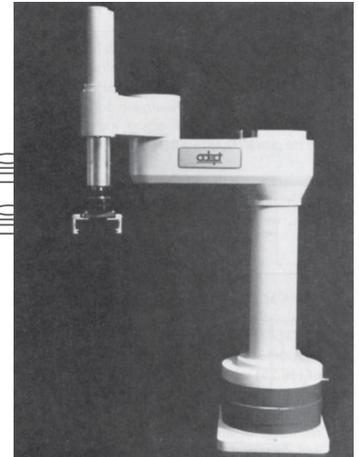
$$\alpha = I \quad \tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E + K_i \int E dt$$

$$\beta = 0$$

- 많은 경우에  $\ddot{\Theta}_d$  는 얻을 수가 없으므로 이 항을 간단히 영으로 놓음
- 즉 대부분의 간단한 로봇 제어 장치는 모델-기준 요소를 ‘전혀’ 사용하지 않음
- 모든 형상에 대해 외란을 임계감쇠로 제어하는 고정  $K_v, K_p$  와  $K_i$  )은 없음
- 평균이득을 선택하고 기계 설를 잘해서 가능한 제어가 잘 되도록 함

$$\tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E + K_i \int E dt + \hat{G}(\Theta)$$

**Figure 10.9**  
The Adept One, a direct-drive robot by Adept Technology, Inc.



## 10.7 리아프노프 안정성 해석

- 자동제어에서 배운 안정성 평가(해석) 방법은 선형시스템에만 적용가능함
- 우리가 다루는 머니플레이터가 비선형 시스템이므로 안정성 해석 방법을 따로 배워야 함

- 대표적인 예가 리아프노프 안정성 해석  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$  대입을 이용함
- 예를 들어, 질량-스프링-마찰 시스템에서  $v = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$  대입
- 시스템의 에너지는
- 이 식을 미분해서 에너지  $\dot{v} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$

$$\dot{v} = -b\dot{x}^2$$

- 에너지의 변화율이 양이 아니므로 언제나 시스템의 에너지는 줄어듬(방출). 즉 언젠가는 에너지가 0이 되어 멈춤 → 안정함
- 절대 안정도만 알려줌. 상대 안정도는 알 수가 없음
- 에너지 함수  $v(x)$ 를 제안하고 이를 이용해서 리아프노프 안정성을 해석함(책 344 페이지 참조)

- 예제 10.6 다음의 머니플레이터와 제어법칙을 고려하면,

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

$$\tau = K_p E - K_d \dot{\Theta} + G(\Theta)$$

이 컨트롤러는 머니플레이터가 궤도를 따르도록 하는 대신에, 머니플레이터의 동역학에 의해 명세된 경로를 따라서 목표점으로 머니플레이터를 움직이게 한 다음 머니플레이터가 그 위치에 머물도록 함

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + K_d \dot{\Theta} + K_p \Theta = K_p \Theta_d$$

위 시스템의 안정성을 증명해

$$v = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T M(\Theta) \dot{\Theta} + \frac{1}{2} E^T K_p E$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \dot{M}(\Theta) \dot{\Theta} + \dot{\Theta}^T M(\Theta) \ddot{\Theta} - E^T K_p \dot{\Theta}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \dot{M}(\Theta) \dot{\Theta} - \dot{\Theta}^T K_d \dot{\Theta} - \dot{\Theta}^T V(\Theta, \dot{\Theta})$$

$$= -\dot{\Theta}^T K_d \dot{\Theta}$$



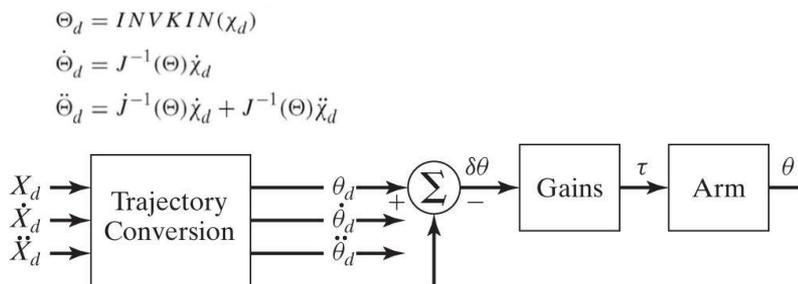
$$\frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \dot{M}(\Theta) \dot{\Theta} = \dot{\Theta}^T V(\Theta, \dot{\Theta})$$

라그랑주의 운동방정식의 구조를 검사하면 알 수 있음 (연습문제 6.17 참조)

- 오늘날의 산업용 로봇이 안정하다는 것을 어느 정도 설명함

## 10.8 직교좌표 기준 제어 시스템

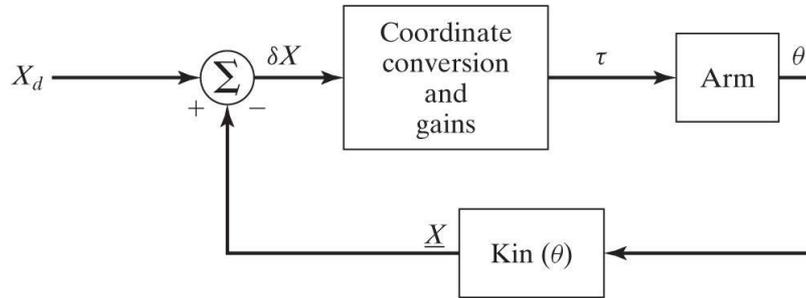
- 직교좌표 제어(Cartesian based control) 방법을 산업용 로봇에 현재는 사용하고 있지 않으나, 연구하고 있으므로 소개하겠음
  - 지금까지 9장, 10장에서 설명한 머니플레이터의 제어 방법에서 원하는 궤도는 관절의 위치, 속도, 그리고 가속도의 시간에 대한 향으로 얻을 수 있다고 가정하고, 이러한 원하는 입력이 주어졌을 때, 관절 기준 제어 방법을 설계함
  - 7장에서 직교좌표에서 직선 경로를 표시하기 위한 관절 공간의 궤도를 시간에 따라 계산했음
  - 궤도 변환(trjectory conversion) 과정을 통해 원하는 직교좌표 경로를 제어 시스템에 사용함
  - 단점: 1차, 2차의 수치해를 사용하기 때문에 미분 시 잡음 유발하고 지연 유발함



**Figure 10.10**  
A joint-based control scheme  
with Cartesian-path input.

## 10.8 직교좌표 기준 제어 시스템

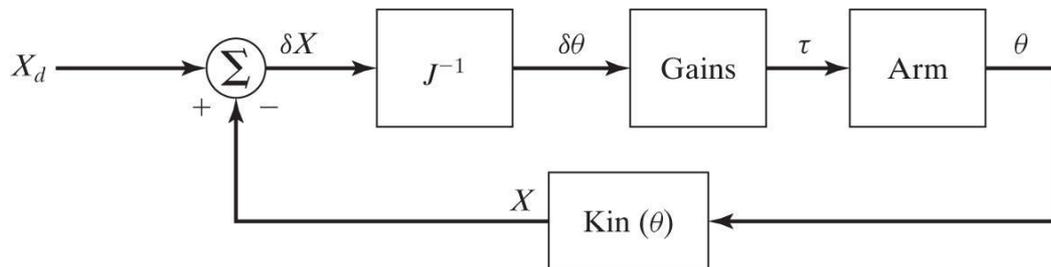
- 그림 10.11은 직교좌표 기준 제어(Cartesian based control) 방법: 머니플레이터의 위치를 센싱해서 이를 즉시 기구학 방정식에 의해 직교좌표의 위치 표시로 변환하고, 원하는 직교좌표 위치와 비교되어 만들어진 오차를 제어하는 방법
- 직교좌표 기준 제어 장치는 ‘루프 안에서’ 기구학적인 변환을 요구하는 많은 계산을 수행해야 하므로 관절 기준 제어 시스템 대비 느림(즉 낮은 샘플링 주파수로 계산함) → 안정성과 외란 제거 능력 저하



**Figure 10.11**  
The concept of a Cartesian-based control scheme.

## 10.8 직교좌표 기준 제어 시스템

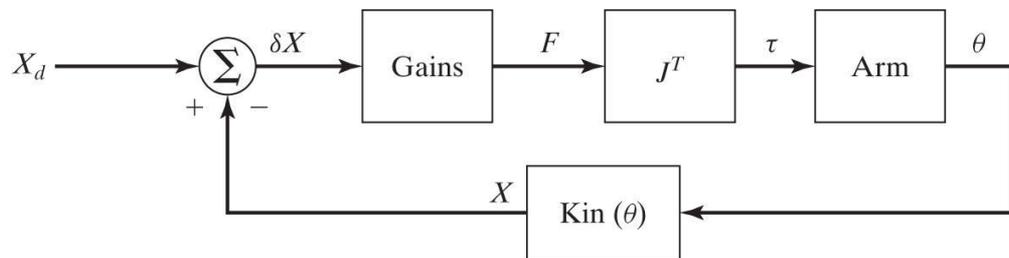
- 또다른 방법이 그림 10.12에 설명되어 있음.
  - 직교좌표 위치는 원하는 위치와 비교되고, 직교좌표 공간에서 오차인  $\delta X$ 를 형성한다. 이 오차는 제어 장치가 제 역할을 하면 매우 작을 것이고, 역자코비안에 의해 관절 공간의 작은 변위로 매핑될 수 있다. 관절 공간에서의 결과적인 오차 %는 이러한 오차를 작게 하는 토크를 계산하기 위해 이득으로 곱해진다.
  - → 역자코비안 제어기(inverse-Jacobian controller)



**Figure 10.12**  
The inverse-Jacobian  
Cartesian-control scheme.

## 10.8 직교좌표 기준 제어 시스템

- 또다른 방법이 그림 10.13에 설명되어 있음.
  - 직교좌표 오차 벡터는 직교좌표 힘 벡터를 계산하기 위해 이득으로 곱해진다. 이것은 로봇의 말단 효과 장치에 작용했을 때, 직교좌표 오차를 줄이는 방향으로 말단 효과 장치를 미는 (push) 직교 좌표 힘으로 생각할 수 있다. 이 직교좌표 힘 벡터(실제는 힘-토크 벡터)는 관찰된 오차를 줄이는 방향으로 작용하는 등가의 관절 토크를 계산하기 위한 자코비안 전치를 통해 매핑된다.
  - → 전치 자코비안 제어기(transpose Jacobian controller)



**Figure 10.13**  
The transpose-Jacobian  
Cartesian-control scheme.

## 10.8 직교좌표 기준 제어 시스템

- 직교좌표 디커플링 방법

- 6.10절의 직교좌표 공간의 머니플레이터 동역학에서 ( $F$ 는 말단 효과 장치에 작용하는 힘-토크 벡터)

$$\mathcal{F} = M_x(\Theta)\ddot{\chi} + V_x(\Theta, \dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \quad \text{식 6.91}$$

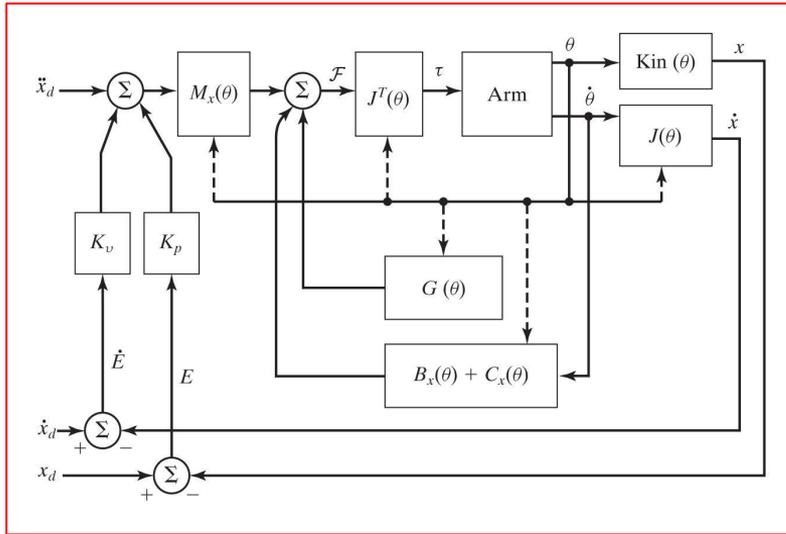
$$\tau = J^T(\Theta)\mathcal{F}$$

식 6.92 ( $F$ 를 구한 후 필요한 관절 토크 계산)

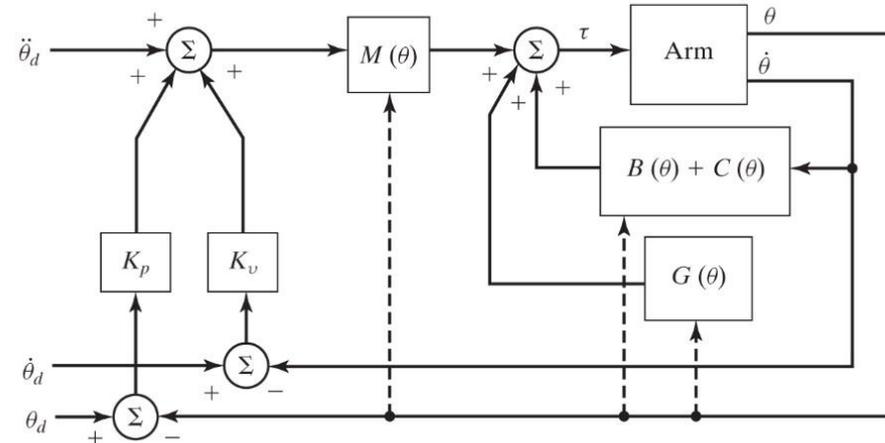
- 위의 직교좌표 공간의 동역학과 그림 10.5/10.7의 모델 기준 제어를 합치면, 다음 그림 10.14와 10.15의 직교좌표 기준 제어가 만들어짐



**Figure 10.15**  
An implementation of the Cartesian model-based control scheme.

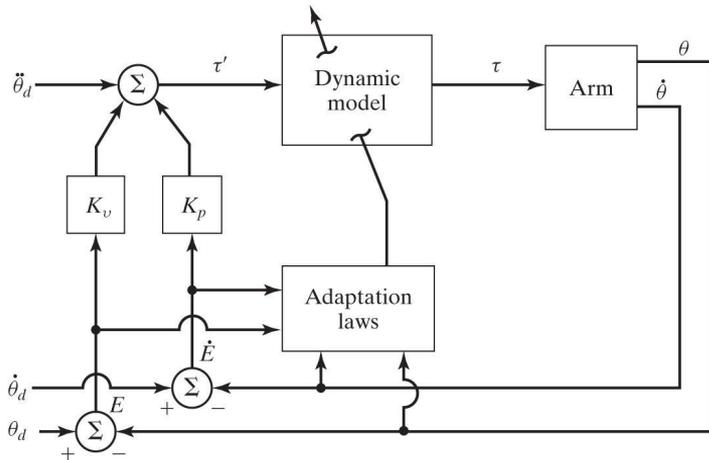


**Figure 10.7**  
An implementation of the model-based manipulator-control system.



## 10.9 적응제어(adaptive control)

- 모델의 파라미터가 실제 장치의 파라미터와 맞지 않으면, 식 (10.25)에서와 같이 서보 오차가 생길 것이다. 이 서보 오차는 적절한 적응 방식(**adaptive scheme**)에 쓰여서 오차가 사라질 때까지, 모델 인자를 갱신하는데 사용됨 → 적응제어



**Figure 10.16**  
The concept of an  
adaptive manipulator  
controller.