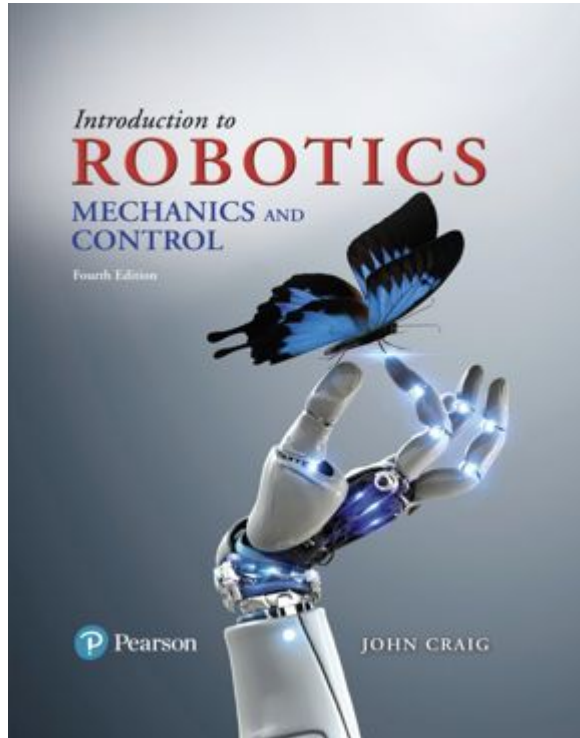


# Introduction to Robotics

Mechanics and Control

4<sup>th</sup> Edition



## Chapter 3

머니플레이터 기구학

## 3.1 개요

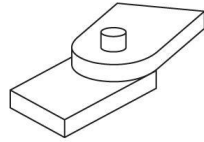
- 기구학(kinematics): 힘을 고려하지 않은 운동 자체만을 다루는 학문. 위치, 속도, 가속도 및 그 외 모든 위치 변수의 고차원 미분을 다룸
- 동역학(dynamics): 힘, 토크 등 운동을 일으키는 요인과 운동 자체의 관계를 다루는 학문

## 3.2 링크의 표시

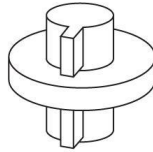
- 머니플레이터는 관절(joint)와 링크(link)의 연결로 구성
  - 관절은 1개의 자유도(degree of freedom, DOF)를 가짐
  - 본 교과서에서는 회전 관절(revolute joint)와 프리즘 관절(prismatic joint)만 다룸
  - 로봇의 기구는 움직이지 않는 기저(base)로부터 시작하여 기구 번호 0부터 순번을 정함
  - 첫 번째 움직이는 링크를 기구 번호 1, ... 로봇 머니플레이터의 끝 링크를 n으로 정함
  - 말단 효과 장치(end-effector, 손)를 3차원에서 일반적으로 나타내기 위해서는 최소한 6개의 관절이 필요
  - 사람의 팔과 손을 생각해보자
  - 전형적인 머니플레이터는 5개 또는 6개의 관절을 가짐 (3개도 많이 사용함. 그럼 7, 8개의 관절은?)
  - 예외: parallel link 구조 (youtube 동영상 참조)

## Figure 3.1

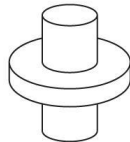
The six possible lower-pair joints.



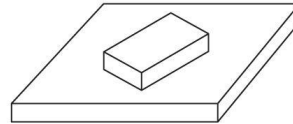
Revolute



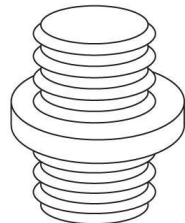
Prismatic



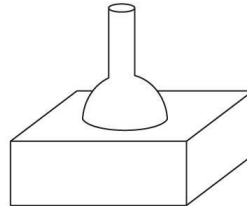
Cylindrical



Planar



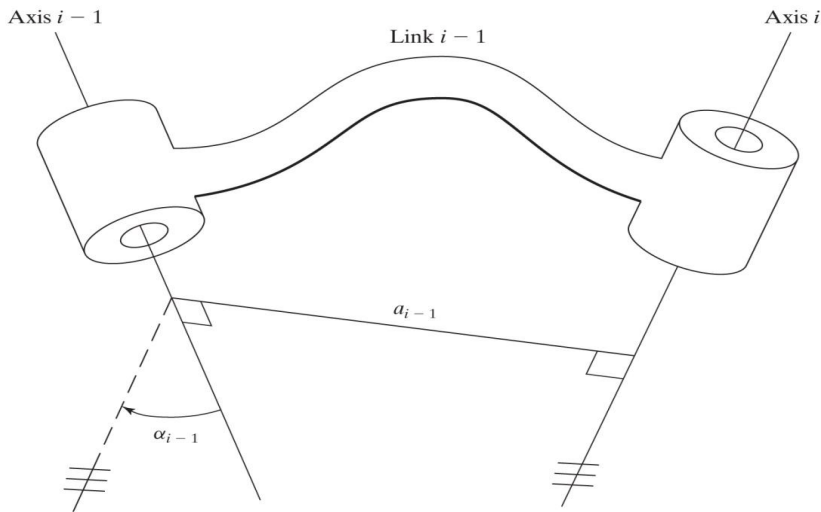
Screw



Spherical

## 3.2 링크의 표시

- 링크(link)는 두 이웃하는 관절(joint) 축 사이의 관계를 정의하는 강체(rigid body)라고 간단하게 생각할 수 있음
  - 관절축  $i$ 는 공간상의 선 또는 벡터의 방향이라고 정의되며, 그 주위로 링크  $i$ 가 링크  $i-1$ 에 기준하여 회전한다. 기구학적 목적으로 링크는 공간상의 두 축의 상대적 위치를 정의하는

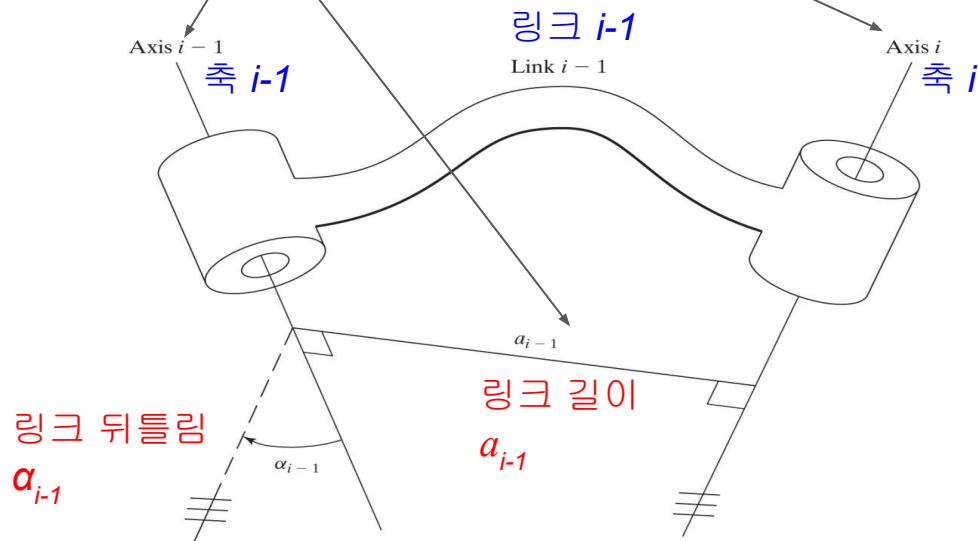


**Figure 3.2**

The kinematic function of a link is to maintain a fixed relationship between the two joint axes it supports. This relationship can be described with two parameters: the link length,  $a$ , and the link twist,  $\alpha$ .

## 3.2 링크의 표시

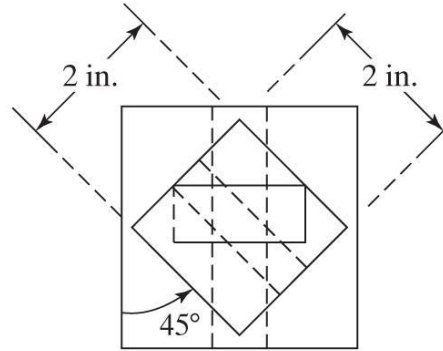
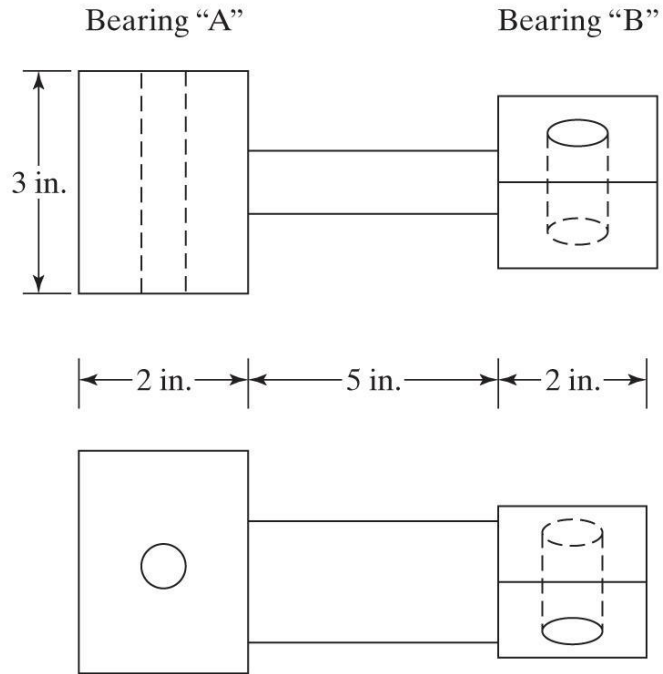
- 3차원에서 2개 축 사이의 거리는 두 축에 공동으로 수직한 선상에서 측정. 이 수직선(법선)은 항상 존재하고 평행할 때를 제외하고는 유일함.



**Figure 3.2**

The kinematic function of a link is to maintain a fixed relationship between the two joint axes it supports. This relationship can be described with two parameters: the link length,  $a$ , and the link twist,  $\alpha$ .

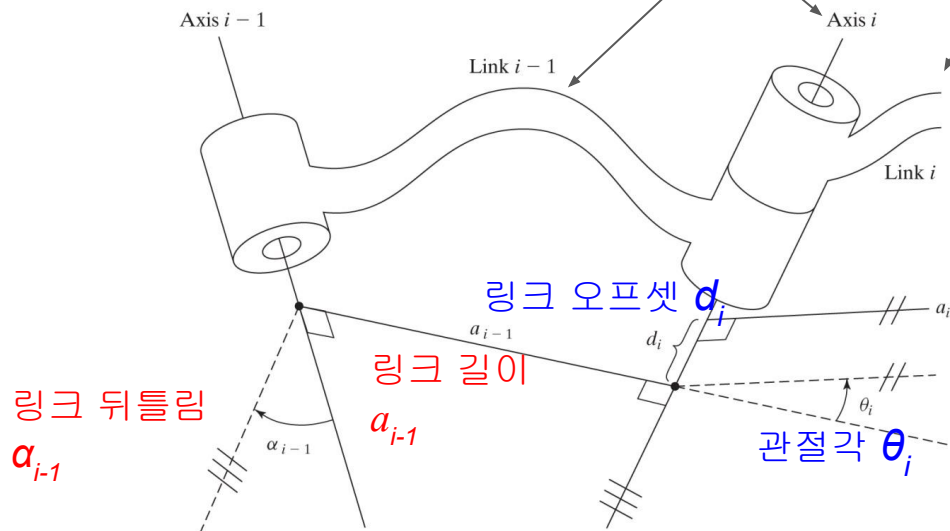
## 예제 3.1



**Figure 3.3**  
A simple link that supports  
two revolute axes.

### 3.3 링크 연결(관절(joint))의 표시

- 아래 그림에서 관절축  $i$ 를 기준으로 링크  $i-1$ 과 링크  $i$ 이 연결되고, 관절축  $i$ 를 따라서 측정한 링크들 간의 거리를 링크 오프셋(link offset),  $d_i$  이라고 함
- 관절축  $i$ 를 따라서 링크  $i$ 와 링크  $i-1$ 의 각도 차이를 관절각(joint angle),  $\theta_i$ 라고 함



**Figure 3.4**

The link offset,  $d_i$ , and the joint angle,  $\theta_i$ , are two parameters that may be used to describe the nature of the connection between neighboring links.



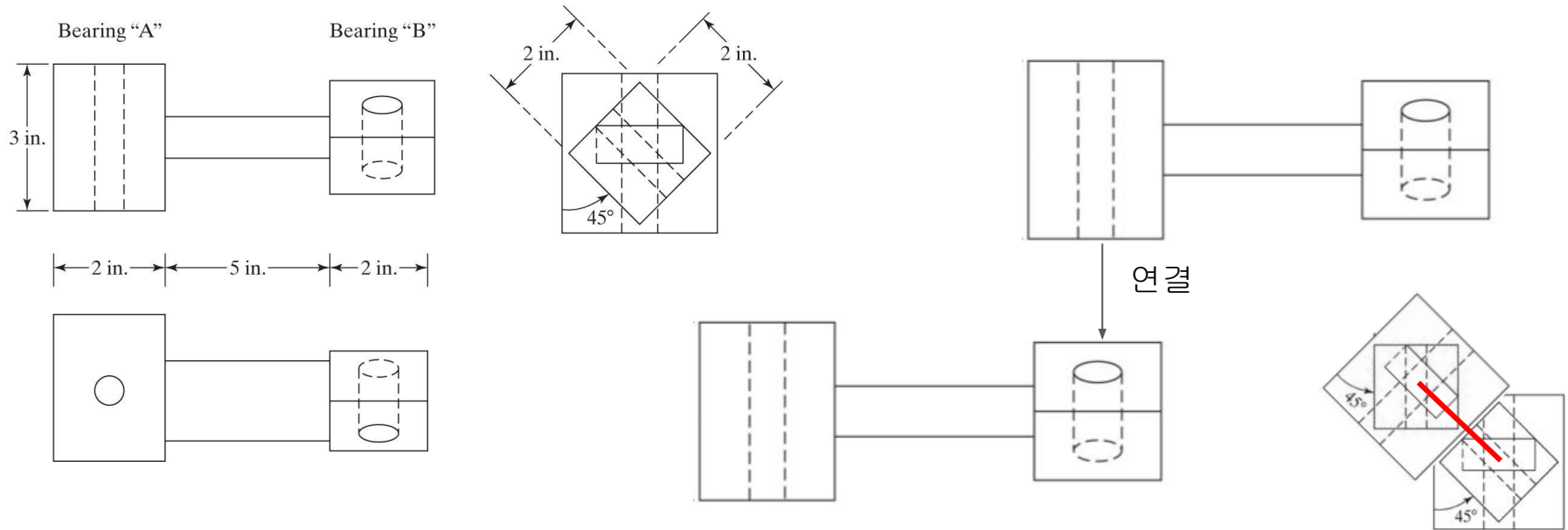
### 3.3 링크의 표시

- 첫 번째와 마지막 링크는 그 이전이나 이후의 링크가 없어서 상대적인 값을 구할 수가 없음 → 계산을 쉽게 하도록 즉  $a_0 = a_n = 0.0$ 과  $\alpha_0 = \alpha_n = 0.0$ )
- 그리고 나서 관절 2부터 n-1까지는 앞 슬라이드처럼, 오프셋  $d_i$ , 관절각  $\theta_i$ 등을 구함
- 만약 관절 1이 회전 관절이면,  $\theta_1$ 의 영의 위치는 임의로 선택하고  $d_1 = 0$ 으로 함
- 만약 관절 1이 프리즘 관절이면  $d_1$ 의 영의 위치는 임의로 선택하고  $\theta_1 = 0$ 으로 함
- 임의로 값을 선택할 수 있다면 항상 계산이 편한 방법으로 선택함

### 3.3 링크 인자 - 데나비트-하텐버그 (Denavit-Hartenberg, DH)

- 어떠한 로봇도 기구학적으로 각 링크에 대한 다음 4개의 값을 기술할 수 있음
  - 링크 길이  $a_{i-1}$ , 링크 뒤틀림  $\alpha_{i-1}$ , 링크 오프셋  $d_i$ , 관절각  $\theta_i$
  - 위의 4개 중에 모터를 장착해서 제어하는 인자(회전 관절에서는 관절각, 프리즘 관절에서는 링크 오프셋)만 변수이고 나머지 3개는 상수임
  - 따라서 6관절 로봇이 회전 관절만 있으면, 18개의 상수, 6개의 변수가 존재함

## 예제 3.2

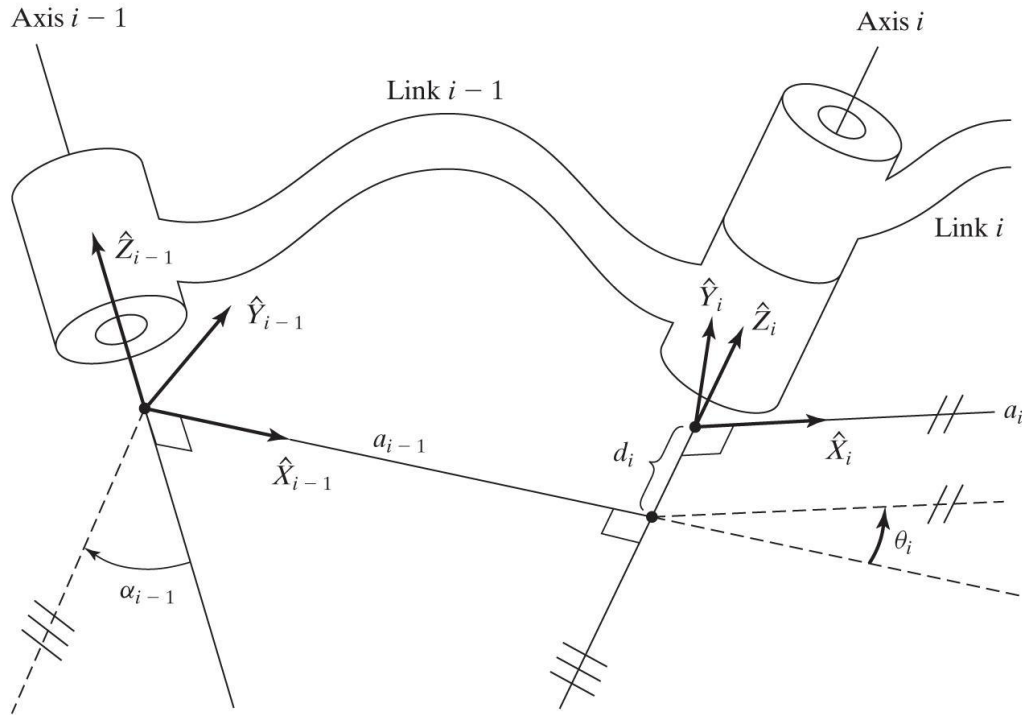


## 3.4 링크계를 부착시키는 규약

- 링크 사이의 상대 위치, 방위 관계를 표현하기 위해 각 링크에 좌표계(2장에서 배움)를 부착(원점과  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ 축)함  $\rightarrow$  좌표계  $\{i\}$ 는 링크  $i$ 에 부착함
- 1번 링크에서  $n-1$ 번 링크까지
  - 좌표계  $\{i\}$ 의  $Z$ 축, 즉  $Z_i$ 는 관절축  $i$ 와 일치한다. 좌표계  $\{i\}$ 의 원점은  $a_i$ 가 관절축  $i$ 을 수직으로 교차하는 지점에 놓여 있음.  $X_i$ 는 관절  $i$ 에서 관절  $i+1$ 을 가리키는  $a_i$ 를 따르는 방향을 취한다.
  - $a_i = 0$ 인 특별한 경우에는,  $X_i$ 가  $Z_i$ 와  $Z_{i+1}$ 이 이루는 면에 수직하게 선택
  - $a_i$ 를  $X_i$ 에 대하여 오른손 법칙을 따라 측정하도록 정의
  - $Y_i$ 는  $i$ 번째 계를 완전하게 하기 위하여 오른손 법칙을 따라 선택

## Figure 3.5

Link frames are attached so that frame  $\{i\}$  is attached rigidly to link  $i$ .



## 3.4 링크계를 부착시키는 규약

- 첫 번째 0 링크

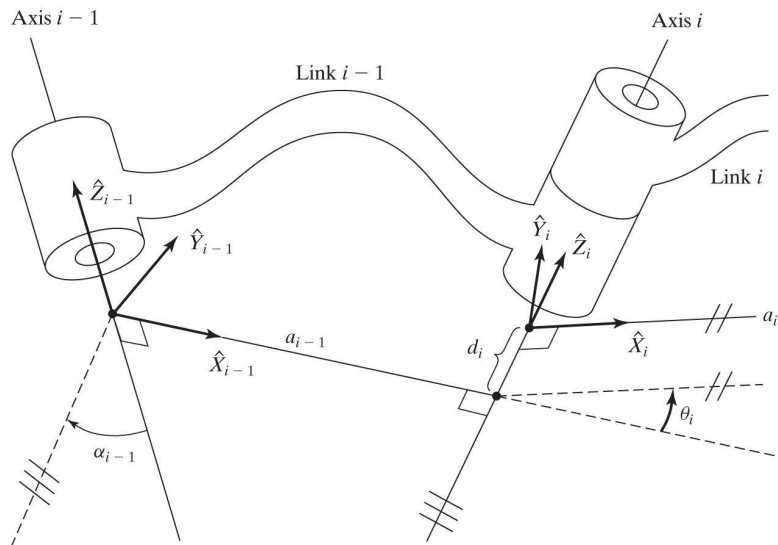
- 로봇의 기저(base), 즉 링크 0에 좌표계 {0}이라고 함. 이 좌표계는 움직이지 않으며 기준이 됨. 다른 모든 링크 좌표계는 이 좌표계를 기준으로 기술함
- 좌표계 {0}를 임의로 선택할 수 있으므로  $Z_0$ 를 축 1을 따라서 정하고 좌표계 {0}을 관절변수 1이 0인 경우 좌표계 {1}과 일치하게 선택하면 문제가 쉬워짐. 이렇게 선택하면  $a_i = 0$ ,  $\alpha_i = 0$ 이 되고, 회전 관절이면  $d_1 = 0$ , 프리즘 관절이면  $\theta_1 = 0$ 이 됨

- 마지막 n 링크

- 회전 관절 n의 경우,  $X_n$ 의 방향은  $\theta_n = 0.0$ 일 때  $X_{n-1}$ 과 정렬되게 선택하고, 좌표계 {N}의 원점을  $d_n = 0.0$ 이 되도록 선정함. 프리즘형 관절 n의 경우,  $X_n$ 의 방향은  $\theta_n = 0.0$ 이 되도록 선택하고 좌표계 {N}의 원점은  $d_n = 0.0$ 일 때  $X_{n-1}$ 과 n관절축과의 교차점이 되도록 선택함

## 3.4 링크계를 부착시키는 규약

- 링크 인자를 링크계의 용어를 써서 요약
  - 지금까지 설명한것을 요약하면 다음과 같음



$$\begin{aligned} a_i &= \hat{X}_i \text{를 따라 측정한 } \hat{Z}_i \text{에서 } \hat{Z}_{i+1} \text{ 까지의 거리} \\ \alpha_i &= \hat{X}_i \text{ 주위로 측정한 } \hat{Z}_i \text{와 } \hat{Z}_{i+1} \text{ 사이의 각도} \\ d_i &= \hat{Z}_i \text{를 따라 측정한 } \hat{X}_{i-1} \text{에서 } \hat{X}_i \text{ 까지의 거리} \\ \theta_i &= \hat{Z}_i \text{ 주위로 측정한 } \hat{X}_{i-1} \text{에서 } \hat{X}_i \text{ 사이의 각도} \end{aligned}$$

## 3.4 링크계를 부착시키는 규약

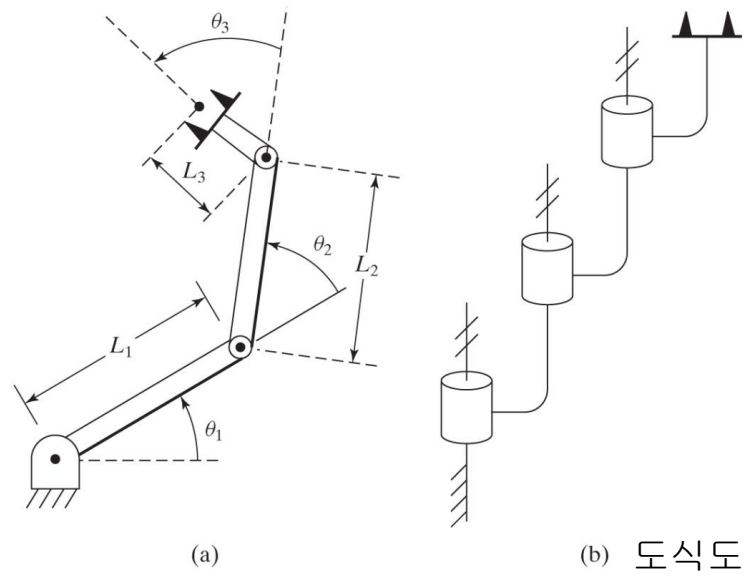
- 링크계를 부착시키는 과정의 요약

다음은 새로운 기구와 만났을 때 링크계를 부착시키기 위한 과정의 요약이다.

1. 관절축들을 정한 후, 축들을 통과하는 무한 직선을 상상하라(혹은 그려라). 2단계부터 5단계의 과정을 위하여 이 직선들 중의 서로 이웃하는 2개(축  $i$ 와  $i+1$ )를 고려하라.
2. 두 직선의 공통 법선, 혹은 교차점을 정하라. 계의 원점을, 공통 법선이  $i$ 축과 만나는 점이나 혹은 교차점에 설정하라.
3.  $\hat{Z}_i$ 축을  $i$ 관절 축을 따라서 설정하라.
4.  $\hat{X}_i$ 축을 공통 법선을 따라서 설정하라. 만약 두 축이 교차하면, 2개의 축을 포함하는 평면에 수직되게  $\hat{X}_i$ 축을 설정하라.
5. 오른손 좌표 시스템을 완성하도록  $\hat{Y}_i$ 축을 설정하라.
6. 첫 번째 관절 변수가 영이면 계  $\{0\}$ 을  $\{1\}$ 이 되도록 설정하라. 계  $\{N\}$ 을 위해서는 계의 원점과  $\hat{X}_N$ 을 자유롭게 설정할 수 있으나, 가능한 많은 링크 인자가 영이 되도록 설정하라.



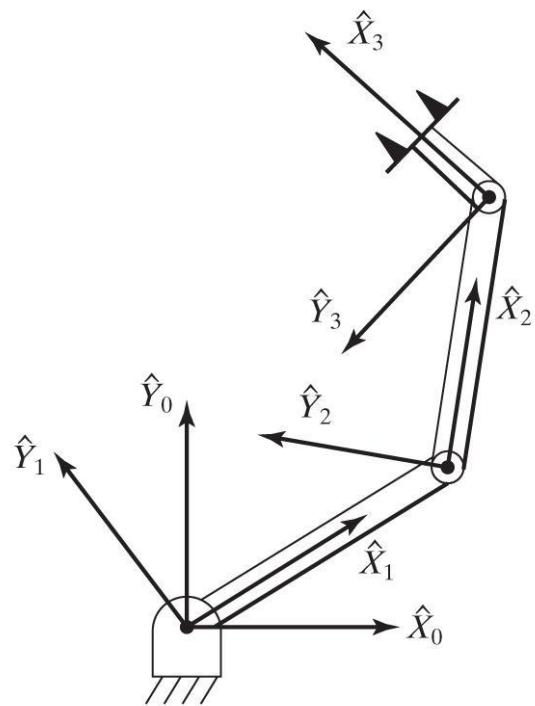
예제 3.3 3-링크로 구성된 평면 팔을 보여준다. 3관절 모두가 회전  
관절이므로, 이 머니플레이터는 때로는 ‘RRR(혹은 3R) 기구’ 라고도 불림.



**Figure 3.6**  
A three-link planar arm. On the right, we show the same manipulator by means of a simple schematic notation. Hash marks on the axes indicate that they are mutually parallel.

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	$L_1$	0	$\theta_2$
3	0	$L_2$	0	$\theta_3$

**Figure 3.7**  
 Link-frame assignments.

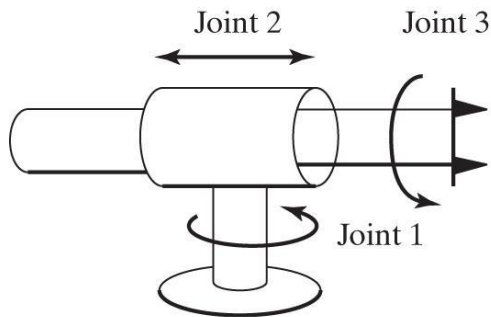


$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	$L_1$	0	$\theta_2$
3	0	$L_2$	0	$\theta_3$

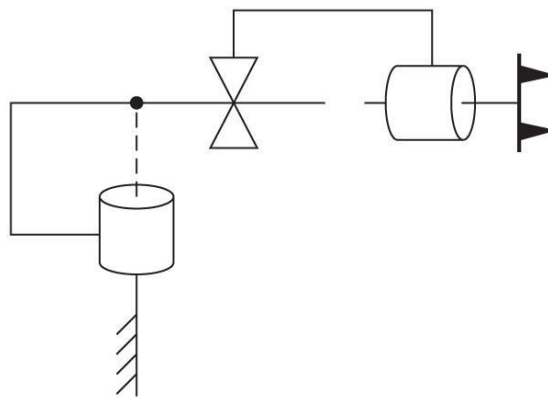
예제 3.4 1개의 프리즘형 관절을 갖는 3자유도의 로봇을 보여주고 있음. ‘RPR 기구’라고 할 수 있으며, 이것은 ‘원통형’ 로봇인데 처음 2개의 관절은 위에서 보았을 때 극좌표와 유사하다.

## Figure 3.9

Manipulator having three degrees of freedom and one prismatic joint.

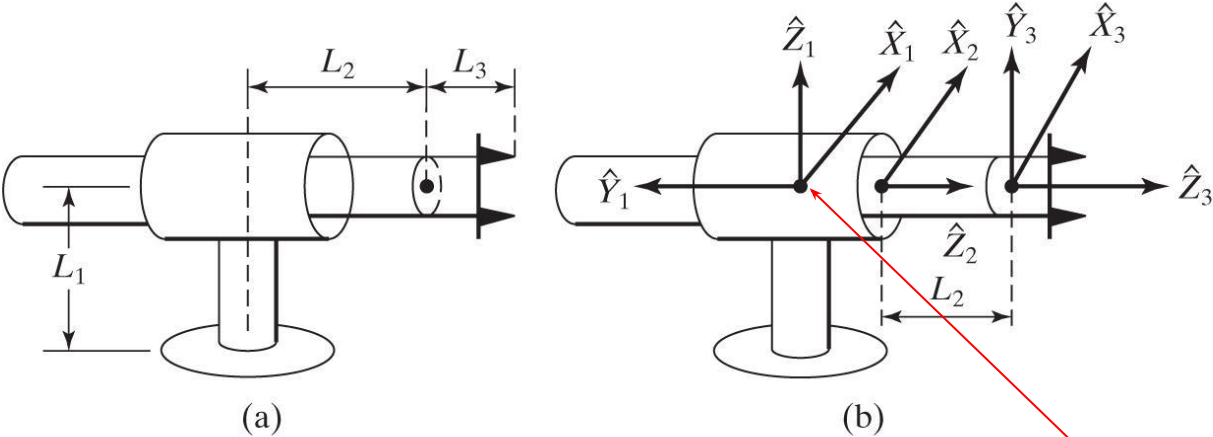


(a)



(b) 도식도

Figure 3.10  
 Link-frame assignments.

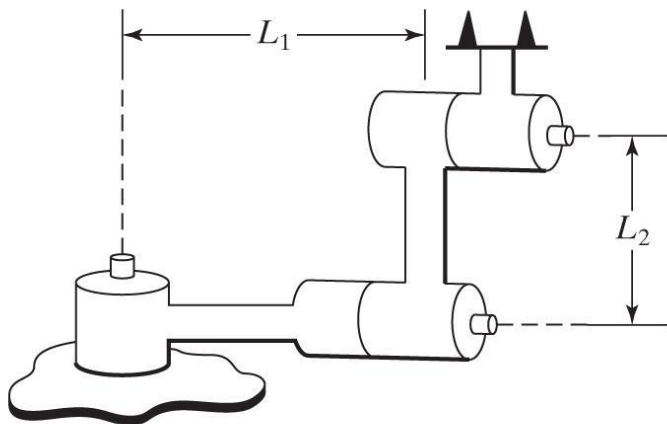


$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$90^\circ$	0	$d_2$	0
3	0	0	$L_2$	$\theta_3$

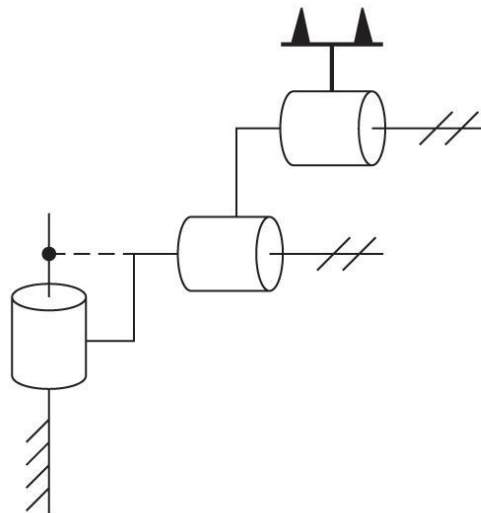
좌표계 {0}은 어디에?

예제 3.5 3-링크로 구성된 3R 머니플레이터를 보여주고 있는데, 관절 축 1과 2는 교차하고 2와 3축은 평행한 경우임

(좌표계 {1}과 {2}를 정확하게 설정할 수 있는 몇 가지 방법을 제시함으로써 좌표계 설정과 데나비트-하덴버그 인자들을 결정하는 것이 유일성이 없음을 확인)



(a)

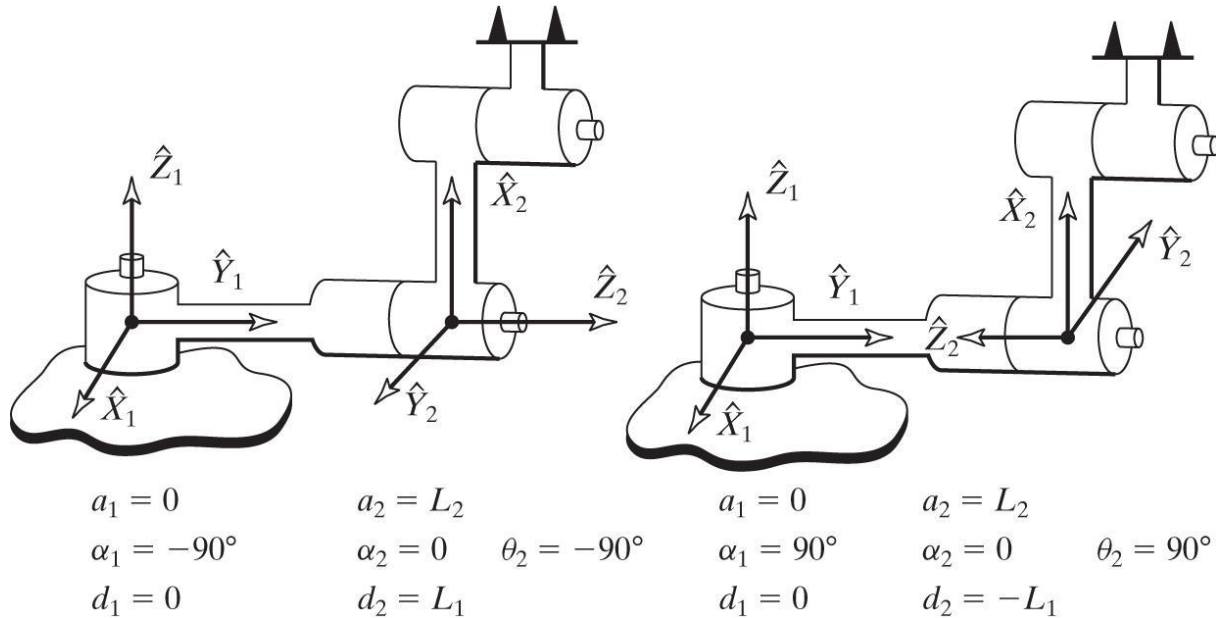


(b) 도식도

**Figure 3.12**  
Three-link, nonplanar  
manipulator.

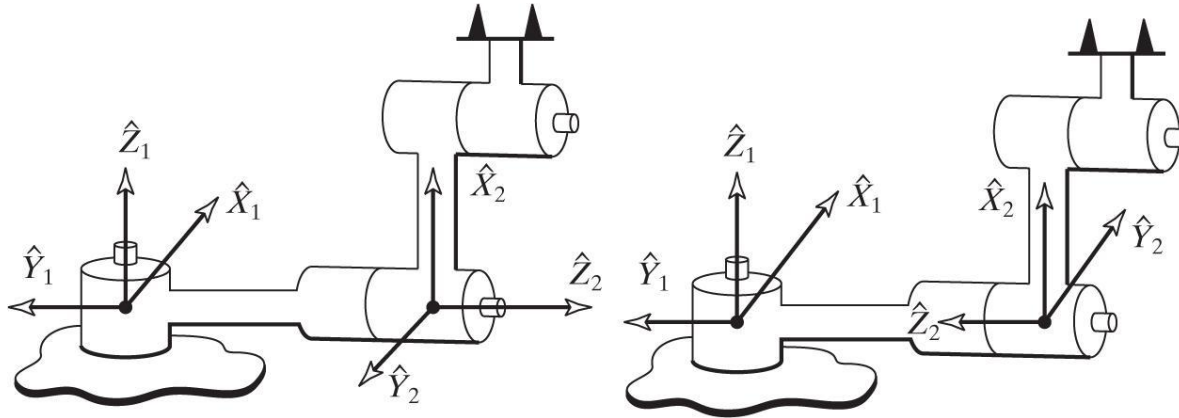
**Figure 3.13**

Two possible frame assignments. ( $Z_2$ 의 방향을 선택하는 두 가지 방법)



# Figure 3.14

Two more possible frame assignments. ( $X_1$ 의 방향을 선택하는 두 가지 방법)



$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & a_2 &= L_2 \\ \alpha_1 &= 90^\circ & \alpha_2 &= 0 & \theta_2 &= 90^\circ \\ d_1 &= 0 & d_2 &= L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & a_2 &= L_2 \\ \alpha_1 &= -90^\circ & \alpha_2 &= 0 & \theta_2 &= -90^\circ \\ d_1 &= 0 & d_2 &= -L_1 \end{aligned}$$

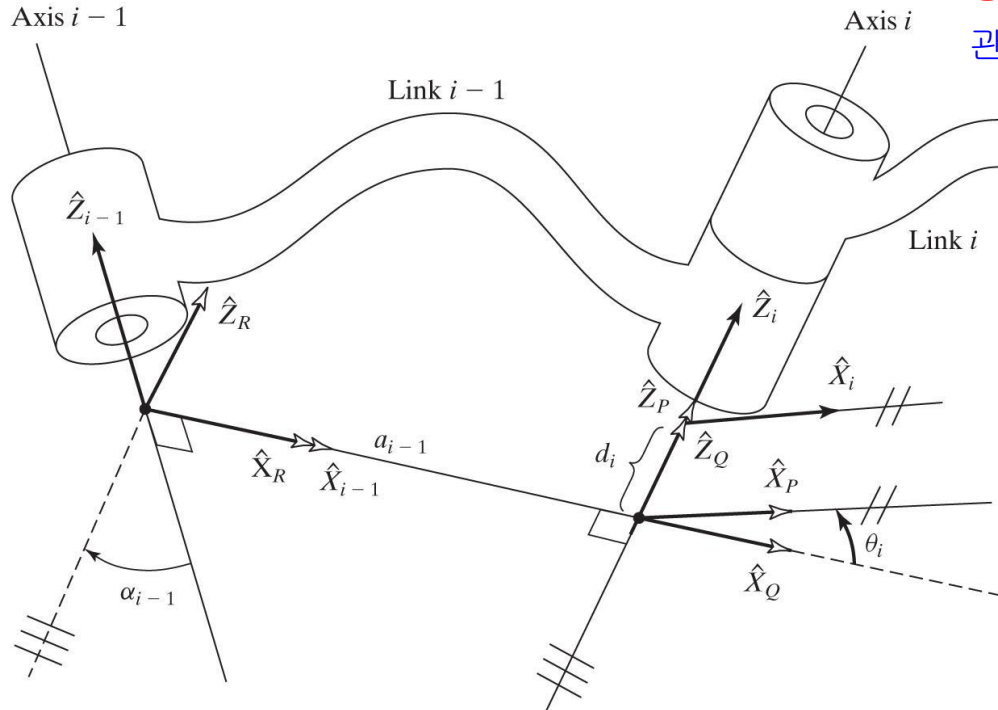
## 3.5 머니폴레이터 기구학

- 각 링크에 좌표계를 부착하고 이들 사이의 관계를 2장에서 배운 내용을 기반으로 균질 변환(homogeneous transform,  ${}^{i-1}_i\mathcal{T}$ )를 계산함
  - 좌표계  $\{i\}$ 를 좌표계  $\{i-1\}$ 에 기준하여 정의하는 변환을 결정하고자 한다. 일반적으로 이 변환은 4개 링크 인자의 함수(링크 길이  $a_{i-1}$ , 링크 뒤틀림  $\alpha_{i-1}$ , 링크 오프셋  $d_i$ , 관절각  $\theta_i$ )
  - 이 변환은 1개의 변수, 3개의 상수를 기반으로 함



# Figure 3.15

Location of intermediate frames  $\{P\}$ ,  $\{Q\}$ , and  $\{R\}$ .



링크 길이  $a_{i-1}$ , 링크 뒤틀림  $\alpha_{i-1}$ , 링크 오프셋  $d_i$ ,  
관절각  $\theta_i$

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}_R T {}^R_Q T {}^Q_P T {}^P_i T {}^i P$$

$${}^{i-1}_i T = {}^{i-1}_R T {}^R_Q T {}^Q_P T {}^P_i T$$

$${}^{i-1}_i T = R_X(\alpha_{i-1}) D_X(a_{i-1}) R_Z(\theta_i) D_Z(d_i)$$

$$R_X(\alpha_{i-1}) D_X(a_{i-1}) R_Z(\theta_i) D_Z(d_i)$$

$${}^{i-1}_R T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^R_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}_i T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 3.6 그림 3.9의 로봇에 대해서 변환을 구함

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$90^\circ$	0	$d_2$	0
3	0	0	$L$	$\theta_3$

${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

${}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

## 3.5 머니폴레이터 기구학

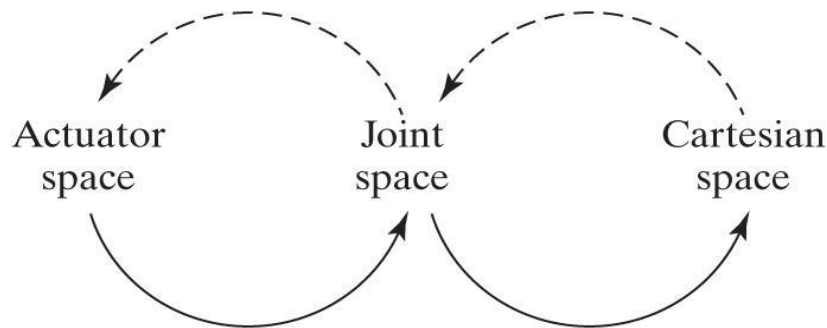
- 링크 변환 연결

- 로봇이 주어졌을 때, 앞서 설명한대로 링크 좌표계를 정의하고, 링크 인자를 구한 후 링크 변환행렬을 계산
- 링크 변환을 서로 곱하여 좌표계  $\{0\}$ 의 좌표계  $\{N\}$ 에 연관시키는 1개의 변환을 구함

$${}^0_N T = {}^0_1 T {}^1_2 T {}^2_3 T \dots {}^{N-1}_N T$$

## 3.6 액추에이터 공간, 관절 공간, 그리고 직교좌표 공간

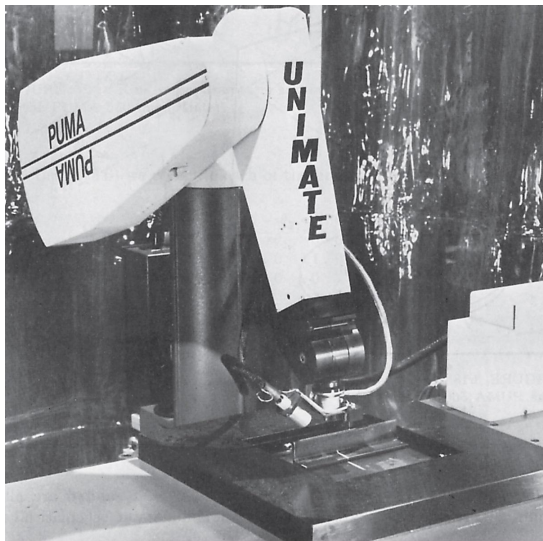
- 관절 벡터: 관절변수 조합
- 관절 공간 (joint space)
- 직교좌표 공간 (cartesian space)
- 작업지향적 공간 혹은 조작 공간
- 액추에이터 벡터
- 액추에이터 공간 (actuator space)



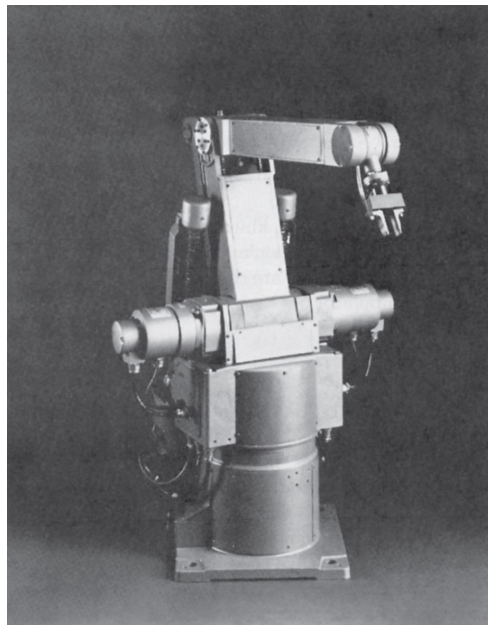
**Figure 3.16**  
Mappings between kinematic descriptions.

## 3.7 예: 두 가지 산업용 로봇의 기구학

- 예제1 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절 머니플레이터)
- 예제2 야스카와 모토맨 L-3 (5자유도 회전 관절 머니플레이터)



Courtesy of Unimation Incorporated, Shelter Rock Lane, Danbury, Conn.

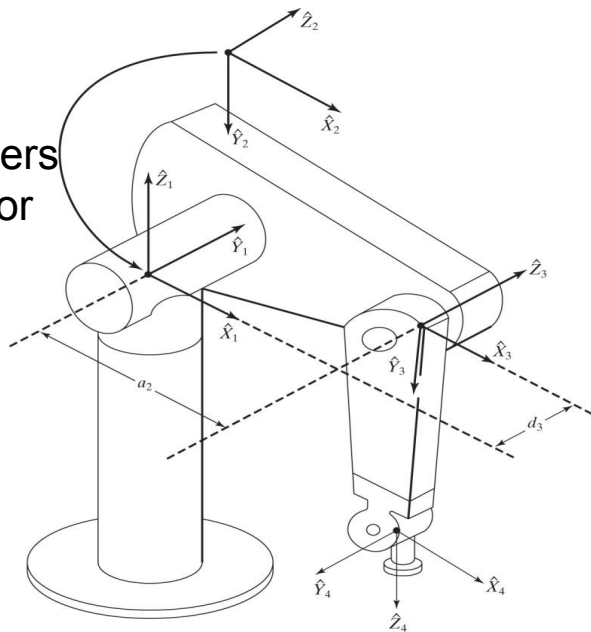


Courtesy of Yaskawa.

## 3.7 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절)

- 예제1 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절 머니플레이터)
  - 4, 5, 6 관절축은 모두 교차하고 원점들도 일치함

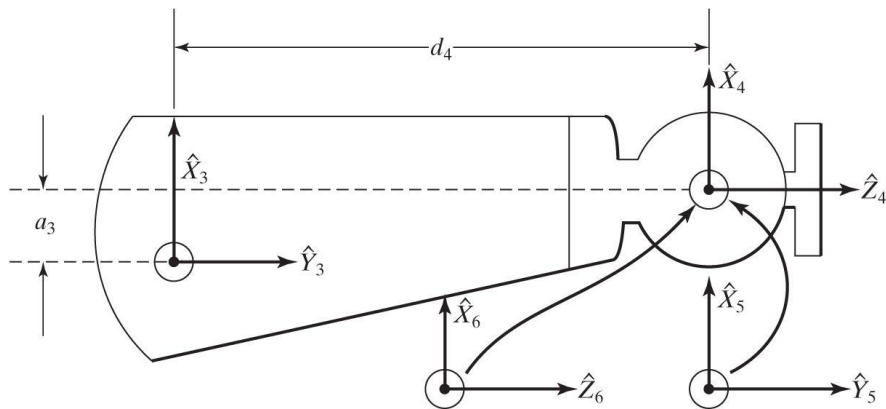
**Figure 3.18**  
Some kinematic parameters  
and frame assignments for  
the PUMA  
560 manipulator.



$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$\theta_2$
3	0	$a_2$	$d_3$	$\theta_3$
4	$-90^\circ$	$a_3$	$d_4$	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0	0	$\theta_5$
6	$-90^\circ$	0	0	$\theta_6$

## 3.7 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절)

- 예제1 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절 머니플레이터)

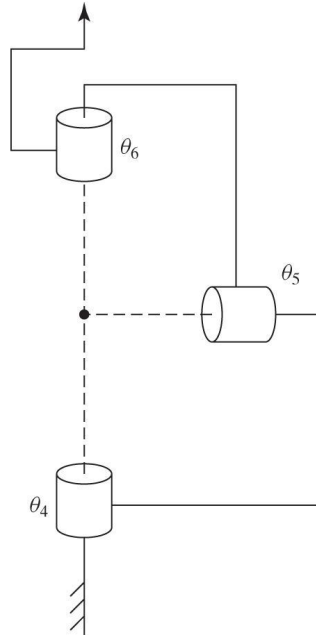


$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$\theta_2$
3	0	$a_2$	$d_3$	$\theta_3$
4	$-90^\circ$	$a_3$	$d_4$	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0	0	$\theta_5$
6	$-90^\circ$	0	0	$\theta_6$



## Figure 3.20

Schematic of a 3R wrist in which all three axes intersect at a point and are mutually orthogonal. This design is used in the PUMA 560 manipulator and many other industrial robots.



## 3.7 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절)

- 예제1 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절 머니플레이터)

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$\theta_2$
3	0	$a_2$	$d_3$	$\theta_3$
4	$-90^\circ$	$a_3$	$d_4$	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0	0	$\theta_5$
6	$-90^\circ$	0	0	$\theta_6$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3.7 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절)

- 예제1 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절 머니플레이터)

$${}^4_6T = {}^4_5T {}^5_6T = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_6T = {}^3_4T {}^4_6T = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_3T = {}^1_2T {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} c_{23} &= c_2c_3 - s_2s_3 \\ s_{23} &= c_2s_3 + s_2c_3 \end{aligned}$$

## 3.7 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절)

- 예제1 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절 머니플레이터)

$${}^1_6T = {}^1_3T {}^3_6T = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^1r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{21} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ {}^1r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6 \\ {}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + s_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{22} &= s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ {}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + c_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 \\ {}^1r_{23} &= s_4s_5 \\ {}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\ {}^1p_x &= \underline{a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}} \\ {}^1p_y &= \underline{d_3} \\ {}^1p_z &= \underline{-a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}} \end{aligned}$$

## 3.7 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절)

- 예제1 유니메이션사의 PUMA 560 (6자유도 회전 관절 머니플레이터)

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_5) - s_{23}s_5c_5] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$

$$r_{21} = s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6 - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)]$$

$$r_{31} = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6$$

$$r_{12} = c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6)$$

$$r_{22} = s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6)$$

$$r_{32} = -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6$$

$$r_{13} = -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5$$

$$r_{23} = -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5$$

$$r_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$

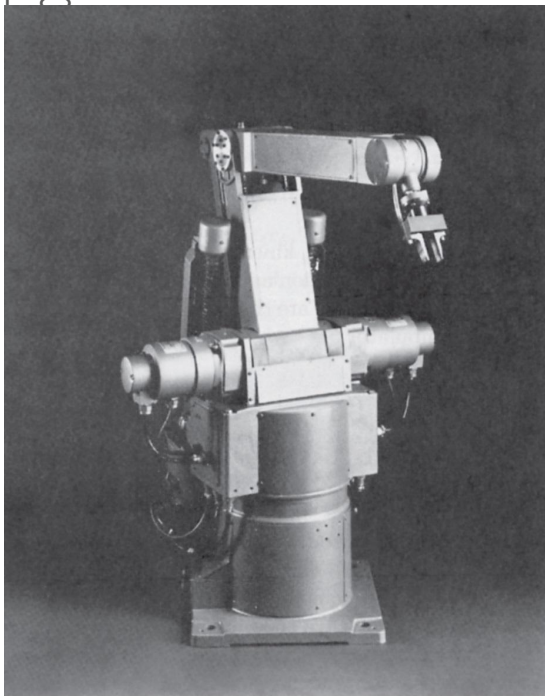
$$p_x = c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1$$

$$p_y = s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_3c_1$$

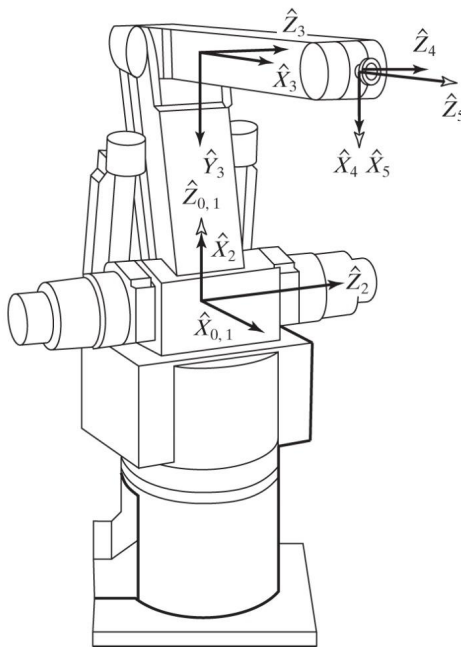
$$p_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}$$

### 3.7 야스카와사의 모토맨 L-3 (5자유도 회전 관절)

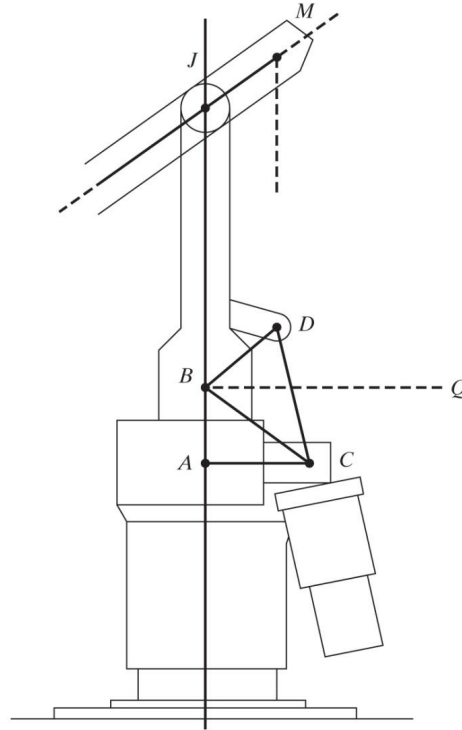
- 링크 2와 링크 3에 접속된 2개의 선형 액추에이터와 사절 링크의 혼합체로 구성



Courtesy of Yaskawa.

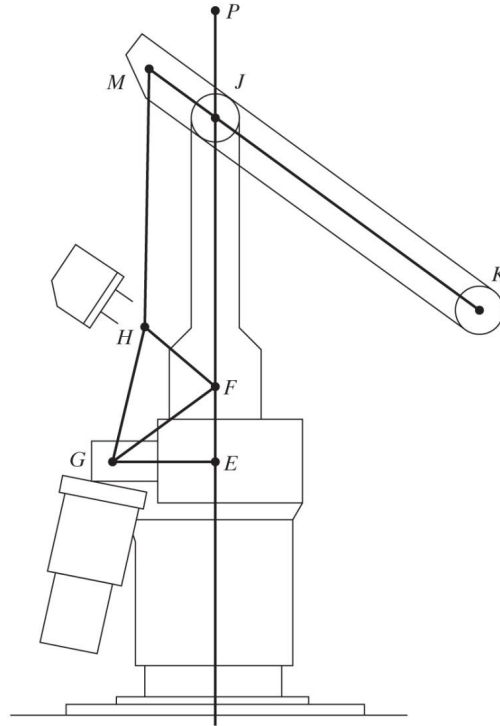


**Figure 3.23**  
Kinematic details of the Yasukawa actuator-2 linkage.



## Figure 3.24

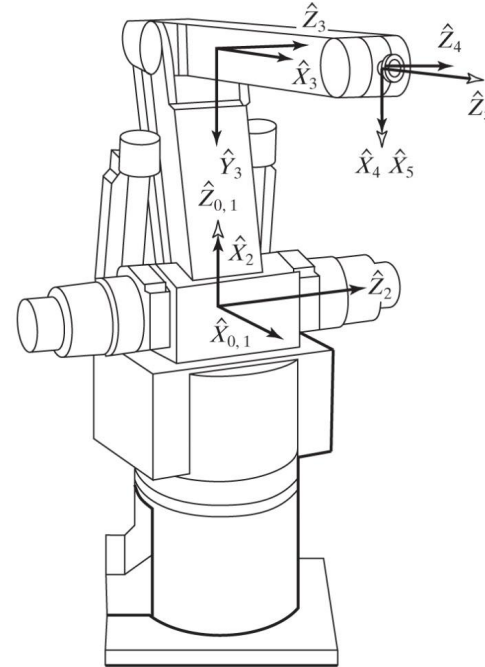
### Kinematic details of the Yasukawa actuator-3 linkage.





**Figure 3.26**  
Link parameters of the Yasukawa L-3 manipulator.

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$\theta_2$
3	0	$L_2$	0	$\theta_3$
4	0	$L_3$	0	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0	0	$\theta_5$



### 3.7 야스카와사의 모토맨 L-3 (5자유도 회전 관절)

$$\theta_1 = k_1 A_1 + \lambda_1$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left( \frac{(k_2 A_2 + \lambda_2)^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}{-2\alpha_2 \beta_2} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{\phi_2}{\gamma_2} \right) + \Omega_2 - 270^\circ$$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \left( \frac{(k_3 A_3 + \lambda_3)^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}{-2\alpha_3 \beta_3} \right) - \theta_2 + \tan^{-1} \left( \frac{\phi_3}{\gamma_3} \right) - 90^\circ$$

$$\theta_4 = -k_4 A_4 - \theta_2 - \theta_3 + \lambda_4 + 180^\circ$$

$$\theta_5 = -k_5 A_5 + \lambda_5$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & l_3 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.7 야스카와사의 모토맨 L-3 (5자유도 회전 관절)

$${}^0_5T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = c_1 c_{234} c_5 - s_1 s_5$$

$$r_{21} = s_1 c_{234} c_5 + c_1 s_5$$

$$r_{31} = -s_{234} c_5$$

$$r_{12} = -c_1 c_{234} s_5 - s_1 c_5$$

$$r_{22} = -s_1 c_{234} s_5 + c_1 c_5$$

$$r_{32} = s_{234} s_5$$

$$r_{13} = c_1 s_{234}$$

$$r_{23} = s_1 s_{234}$$

$$r_{33} = c_{234}$$

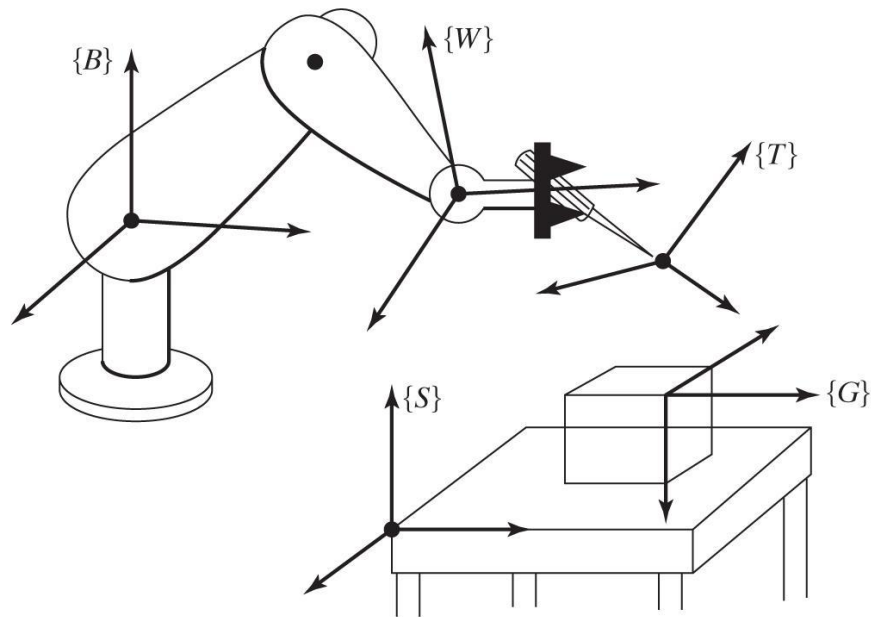
$$p_x = c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})$$

$$p_y = s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})$$

$$p_z = -l_2 s_2 - l_3 s_{23}$$

## 3.8 표준화된 이름을 갖고 있는 좌표계

- 기저계  $\{B\}$ , 정지(우주, 세계)계  $\{S\}$ , 손목계  $\{W\}$ , 공구계  $\{T\}$ , 목표계  $\{G\}$

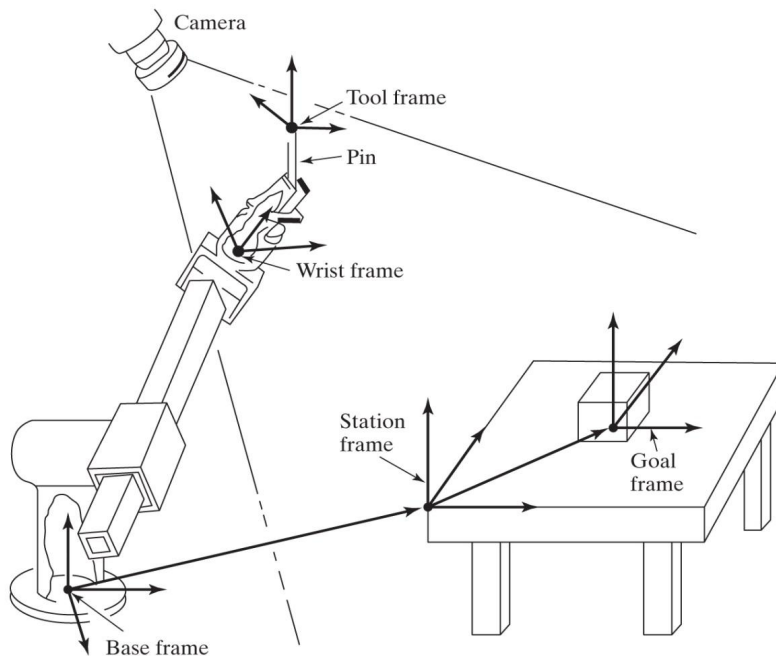


**Figure 3.27**  
The standard frames.

## 3.9 공구는 ‘어디에?’

**Figure 3.28**

Example of the assignment of standard frames.



$${}^S_T T = {}^B_S T^{-1} {}^B_W T {}^W_T T$$

**Figure 3.28**  
Example of the assignment of standard frames.

