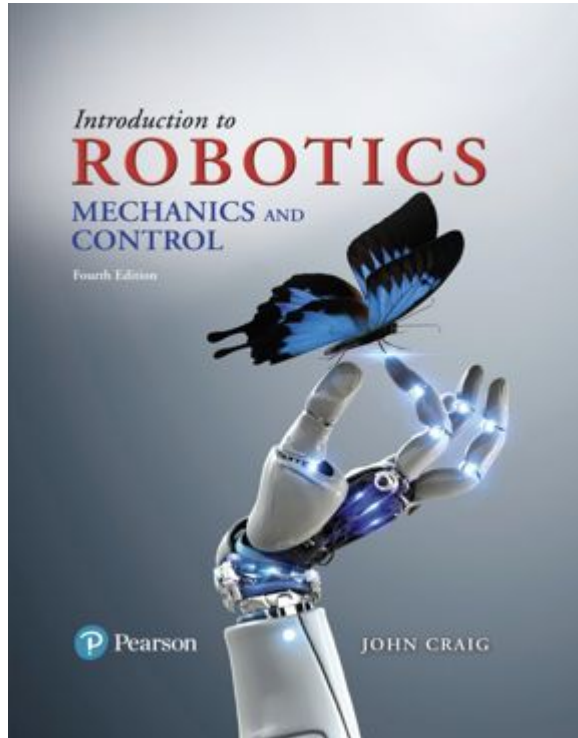


# Introduction to Robotics

Mechanics and Control

4<sup>th</sup> Edition



## Chapter 5

자코비안: 속도와 static forces

## 5.1 개요

- 강체(**rigid body**)의 선속도 및 각속도라는 개념을 소개하고, 머니플레이터의 운동을 해석하는데 사용함
- 속도와 정력(**static forces**)을 이해하려면 머니플레이터의 자코비안 (**jacobian**)이라고 하는 행렬을 배워야 함

## 5.2 시간적으로 변화하는 위치와 방위의 표시 방법

- 위치 벡터의 미분

$${}^B V_Q = \frac{d}{dt} {}^B Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B Q(t + \Delta t) - {}^B Q(t)}{\Delta t}$$

- 위치 벡터의 속도는 공간상에 위치 벡터로 표시된 점의 선형 속도로 생각될 수 있다. 식 (5.1)에서  $Q$ 의 계  $\{B\}$ 에 기준한 미분치를 계산
- 예를 들어  $Q$ 가 계  $\{B\}$ 에 준하여 시간상 변화하지 않는다면 계산될 속도는 영(다른 어떤 계에 대해서는  $Q$ 가 변화한다 하여도). 따라서 벡터가 미분되는 계를 지적하는 것이 중요함
- 속도 벡터는 임의 계의 용어로 표시할 수 있으며, 이 계는 좌측 상단 첨자로 나타냄. 이리하여 식 (5.1)로 계산된 속도 벡터를 계  $\{A\}$ 에서 표시하면

$${}^A ({}^B V_Q) = \frac{{}^A d}{dt} {}^B Q$$

- 속도 벡터는 공간상의 점과 관련되지만, 그 점의 속도를 나타내는 수치는 두 가지 계에 따라 좌우됨. 즉 미분할 때 기준된 계와 결과로 나타난 속도를 표시하는 계

## 5.2 시간적으로 변화하는 위치와 방위의 표시 방법

- 위치 벡터의 미분

- 기준계의 변화를 이루게 하는 회전행렬을 명확하게 포함시킴으로써 바깥쪽 좌측 상단 첨자를 언제든지 제거할 수 있음

$${}^A({}^B V_Q) = {}^A_B R {}^B V_Q$$

$$v_C = {}^U V_{CORG}$$

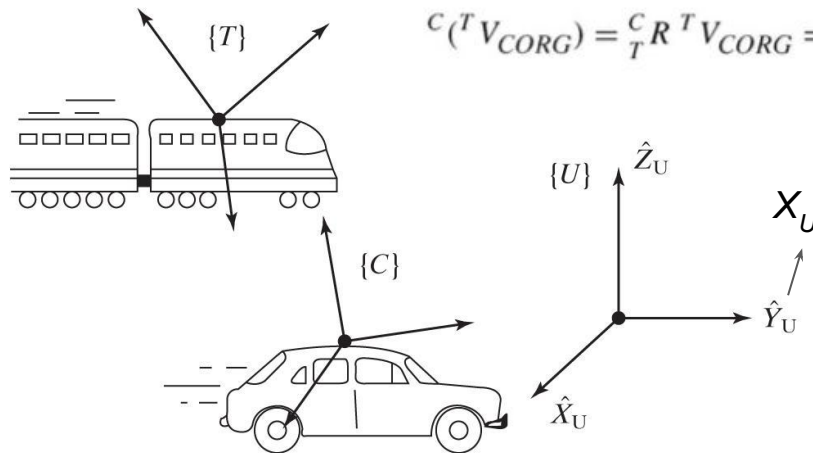
- 문제의 점은 계  $\{C\}$ 의 원점이고 기준계는  $\{U\}$ 이다. 예를 들어, 계  $\{C\}$ 의 원점 속도를 말할 때  $V_c$ 라는 표현을 사용하고,  ${}^A V_c$ 는 계  $\{C\}$ 의 원점의 속도를 계  $\{A\}$ 의 용어로 표시한 것임(이때 미분의  $\{U\}$ 에 기준하여 이루어졌다).

예제 5.1 고정된 우주 계{U}와 100 mph로 달리고 있는 기차에 고정된 계 {T}와 30mph로 달리고 있는 승용차에 고정된 계{C}를 보여준다. 2개의 차량은 {U}의 X방향을 향하고 있다. 회전행렬  ${}^U_T R$ 와  ${}^U_C R$ 는 알려져 있고 상수이다.

$$\frac{{}^U d}{{}^U dt} {}^U P_{CORG} = {}^U V_{CORG} = v_C = 30 \hat{X}$$

$${}^C ({}^U V_{TORG}) = {}^C v_T = {}^C_U R v_T = {}^C_U R (100 \hat{X}) = {}^U_C R^{-1} 100 \hat{X}$$

$${}^C ({}^T V_{CORG}) = {}^C_T R {}^T V_{CORG} = -{}^U_C R^{-1} {}^U_T R 70 \hat{X}$$

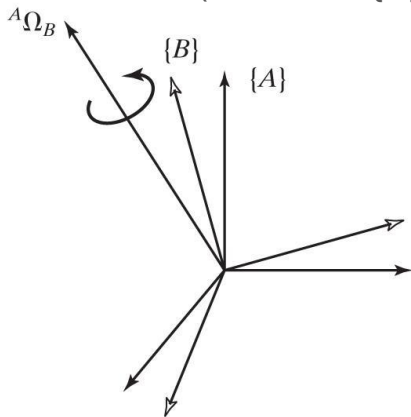


**Figure 5.1**  
Example of some frames  
in linear motion.

## 5.2 시간적으로 변화하는 위치와 방위의 표시 방법

- 각속도 벡터( $\Omega$ )

- 위치 벡터의 속도는 공간상에 위치 벡터로 표시된 점의 선형 속도로 생각될 수 있다. 식 (5.1)에서  $Q$ 의 계  $\{B\}$ 에 기준한 미분치를 계산
- ${}^A\Omega_B$ 는  $\{A\}$ 에 기준한 계  $\{B\}$ 의 회전을 나타냄
- $\omega_C = {}^U\Omega_C$
- $\omega_C$ 는 계  $\{C\}$ 의 기준계  $\{U\}$ 에 대한 각속도. 예를 들어  ${}^A\omega_C$ 는 계  $\{C\}$ 의 각속도를  $\{A\}$ 의 용어로 표현한 것임(각속도는  $\{U\}$ 에 대한 것)

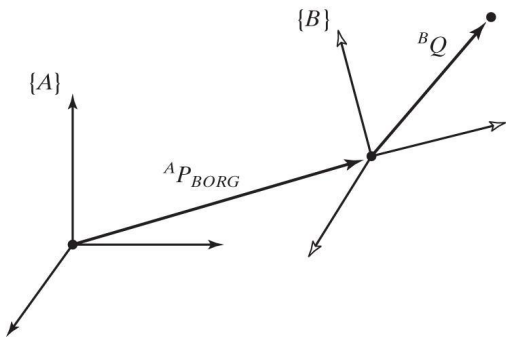


**Figure 5.2**  
Frame  $\{B\}$  is rotating  
with angular velocity  
 ${}^A\Omega_B$  relative to frame  
 $\{A\}$ .

## 5.3 강체의 선속도와 회전속도

- 2장에서 다뤘던 전위와 회전이 시간에 따라 변화하는 상황을 고려하여 확장할 것임
- 6장에서는 가속도까지 확장하여 설명할 것임(동역학, dynamics)
- 선속도
  - 강체에 부착된 계  $\{B\}$ 를 고려하자. 그림 5.3과 같이  ${}^BQ$ 의 운동을 계  $\{A\}$ 에 대해서 상대적으로 기술하고자 한다.  $\{A\}$ 는 고정되었다고 하면, 계  $\{B\}$ 는 계  $\{A\}$ 에 기준하여 위치 벡터  ${}^A\mathbf{P}_{BORG}$ 와 회전행렬  ${}^A_B\mathbf{R}$ 로 기술할 수 있음

· 구하는 것은 방법은,  $\{A\}$ 에 기준한 속도의 두가지 부분을



**Figure 5.3**  
Frame  $\{B\}$  is translating  
with velocity  ${}^A\mathbf{V}_{BORG}$   
relative to frame  $\{A\}$ .

$${}^A\mathbf{V}_Q = {}^A\mathbf{V}_{BORG} + {}^A_B\mathbf{R} {}^B\mathbf{V}_Q$$

## 5.3 강체의 선속도와 회전속도

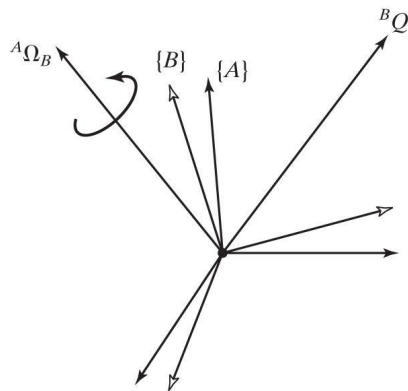
### ● 선속도

$${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A R {}^B V_Q$$

- 위의 식은  $\{B\}$ 와  $\{A\}$ 의 상대적 방위가 변하지 않고 일정하게 남아 있는 특별한 경우일 때만 적용됨 ( ${}^A R$ 는 시간적으로 변화하지 않는다고 가정)

### ● 회전속도

- 원점을 공유하고 선속도가 영인 2개의 계를 생각함
- $\{B\}$ 의  $\{A\}$ 에 대한 회전속도는  ${}^A \Omega_B$ 라는 벡터로 표시
- $\{B\}$ 에 고정된 점을 나타내는 벡터  ${}^B V_Q = 0$  )
- 계  $\{B\}$ 에 대하여 상수일지라도 회전속도  ${}^A \Omega_B$  때문
- 계  $\{A\}$ 에서 보았을 때, 점  $Q$ 는 속도를 가짐



**Figure 5.4**  
Vector  ${}^B Q$ , fixed in frame  $\{B\}$ , is rotating with respect to frame  $\{A\}$  with angular velocity  ${}^A \Omega_B$ .



## 5.3 강체의 선속도와 회전속도

### 회전속도

- 그림 5.5를 관찰하면 계  $\{A\}$ 에서 본 벡터의 방향과 크기의 변화량을 모두 결정할 수 있음
- 첫째  ${}^A Q$ 의 미분 변화량은  ${}^A \Omega_B$ 와  ${}^A Q$  모두와 상호수직이어야 함
- 둘째 그림 5.5에서 미분 변화량의 크기는

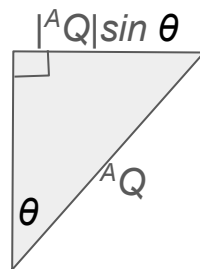
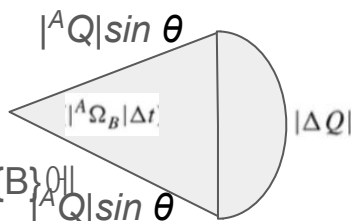
$$|\Delta Q| = (|{}^A Q| \sin \theta)(|{}^A \Omega_B| \Delta t)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$${}^A V_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q$$

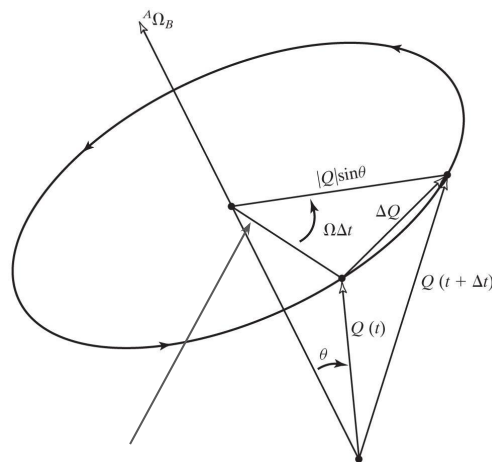
- 일반적인 경우에 벡터  $Q$ 는  $\{B\}$ 에 대하여 변화하고 있을 수도 있으므로 이 요소를 첨가하면,

$${}^A V_Q = {}^A ({}^B V_Q) + {}^A \Omega_B \times {}^A Q$$



**Figure 5.5**

The velocity of a point due to an angular velocity.



직각

## 5.3 강체의 선속도와 회전속도

- 회전속도

- $AQ$ 의 어느 한 시점에서의 표시는  ${}^A_B R^B Q$ 이므로 회전행렬을 사용하여 좌측 상단 첨자를 소거하면

$${}^A V_Q = {}^A_B R^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A_B R^B Q$$

**Figure 5.5**

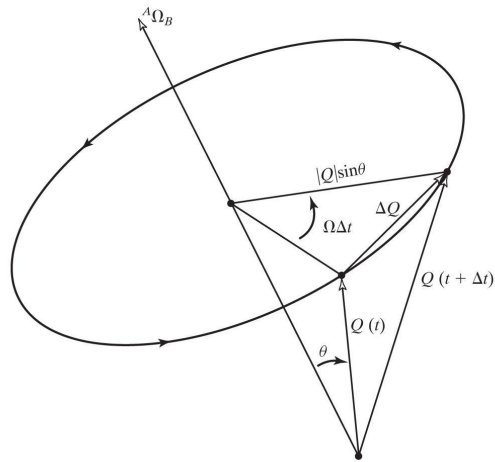
The velocity of a point due to an angular velocity.

- 직선과 회전 운동이 함께 있을 때의 속도

- 원점이 일치하지 않는 경우에는 원점의 선속도를 더하여  $\{A\}$ 에서 계  $\{B\}$ 에 고정된 벡터의 속도에 관한 일반식을 도출할 수 있음

$${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A_B R^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A_B R^B Q$$

- 고정된 계에서 본 움직이는 계 안에 있는 벡터의 속도를 나타냄



## 5.4 각속도에 대한 추가적 고찰(optional)

- 앞절에서 식 5.10 ( ${}^A v_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q$ )를 증명하기 위해 그림 5.5를 이용했음. 여기서는 수학적으로 접근하겠음

- 정규직교행렬의 미분 특성

- 임의의  $n \times n$  정규직교행렬  $R$ (여기서는 회전행렬이라고 가정)에 대해  $RR^T = I_n$
- 양변을 미분하면,  $\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0_n$

$$\dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0_n$$

- $S$ 를 다음과 같이 정의하면  $S = \dot{R}R^T$

$$S + S^T = 0_n$$

- 그러므로  $S$ 가 비대칭행렬 (skew-symmetric matrix)임. 따라서 정규직교행렬의 미분과 비대칭행렬의 관계  $S = \dot{R}R^{-1}$  하고

## 5.4 각속도에 대한 추가적 고찰(optional)

- 회전하는 계에 의한 점의 속도

- 계  $\{B\}$ 에 관하여 변화하지 않는 고정된 벡터  ${}^B P$ 를 고려한다. 다른 계  $\{A\}$ 에서의 표현은 다음과 같음

$${}^A P = {}^A R {}^B P$$

- 만약 계  $\{B\}$ 가 회전하면,  ${}^A P$ 는  ${}^B F$ 로도 변화함

$$\dot{{}^A P} = \dot{{}^A R} {}^B P$$

$${}^A V_P = \dot{{}^A R} {}^B P$$

$${}^A V_P = \dot{{}^A R} {}^A R^{-1} {}^A P$$

$$\boxed{{}^A V_P = {}^A S {}^A P}$$

대입

$$\boxed{S = \dot{R} R^{-1}}$$

$S$ 를  
각속도행렬이라고  
할 수 있음

## 5.4 각속도에 대한 추가적 고찰(optional)

- 비대칭행렬과 벡터적

- 비대칭행렬  $S$ 의 요소를 다음과 같이 할당하면,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_x & 0 & -\Omega_z \\ -\Omega_y & \Omega_z & 0 \end{bmatrix}$$

- 그리고 3 x 1 열(column)벡터를 다음과 같이 정의하면,

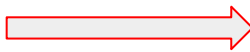
$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

$\Omega$ 를 각속도  
벡터라고 부름

- 다음의 관계가 쉽게 증명됨

$$SP = \Omega \times P$$

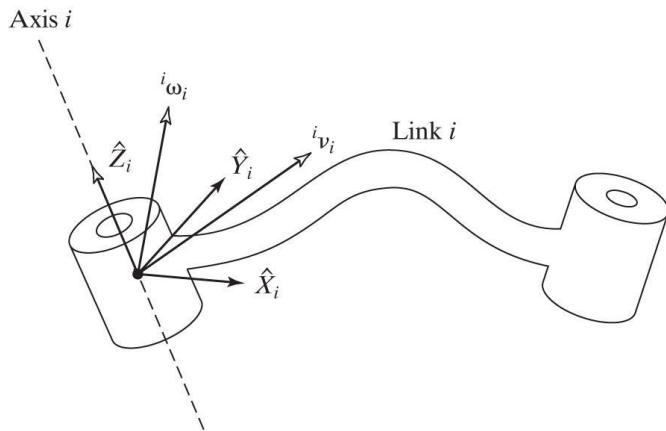
$${}^A V_P = {}^A S {}^A P$$



$${}^A V_P = {}^A \Omega_B \times {}^A P$$

## 5.5 로봇 링크의 운동

- 로봇 링크의 운동을 고려할 때에는 언제나 링크계  $\{0\}$ 을 기준계로 생각하면,  $v_i$ 는 링크계  $\{i\}$ 의 원점의 선속도이고,  $\omega_i$ 은 링크계  $\{i\}$ 의 각속도임 (이 경우 벡터들이 계  $\{i\}$  안에서 표시됨)



**Figure 5.6**

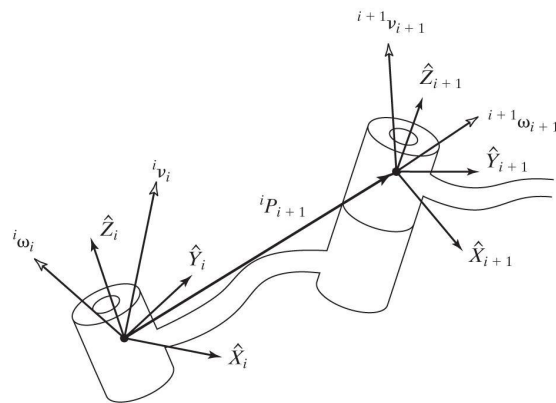
The velocity of link  $i$  is given by vectors  $v_i$  and  $\omega_i$ , which may be written in any frame, even frame  $\{i\}$ .

## 5.6 링크에서 링크로의 속도 전파

- 머니플레이터는 물체의 연쇄로서 각각의 물체는 이웃하는 다른 물체에 대하여 상대운동을 할 수 있음. 이러한 구조 때문에 기저로부터 시작하여 순서적으로 각 링크의 속도를 계산할 수 있음. 링크  $i+1$ 의 속도는 링크  $i$ 의 속도에 관절  $i+1$ 에 의하여 추가된 회전속도를 더한 것임
- ‘링크의 속도’는 링크계의 원점의 선속도와 링크의 회전속도를 의미함
- 아래 그림 5.7은 링크  $i$  및  $i+1$ 과 함께 링크계에서 정의한 그들의 속도 벡터를 함께 보여줌
- $\omega$  벡터 2개가 같은 계에 기준하여 기술되었을 때에는 회전속도도 더할 수 있다. 그러므로  $i+1$ 의 각속도는 링크  $i$ 의 각속도에  $i+1$ 관절에서의 회전속도에 의해 발생하는 새로운 성분을 더한 것과 같이 된다. 계  $\{i\}$ 에 대하여 적어보면,

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}^iR \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = {}^{i+1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix}$$



**Figure 5.7**  
Velocity vectors of  
neighboring links

## 5.6 링크에서 링크로의 속도 전파

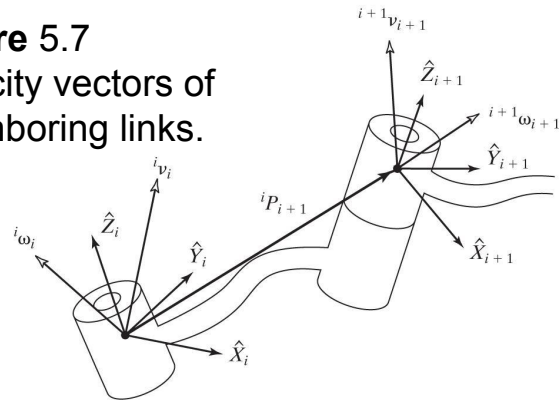
$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}_{i+1}^iR \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = {}^{i+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix}$$

- 계  $\{i+1\}$  안에 있는 관절에서의 운동 때문에 발생한 추가의 회전 요소를 계  $\{i\}$ 에서 표시하기 위하여 계  $\{i\}$ 와  $\{i+1\}$ 을 연결하는 회전행렬을 이용했음. 이 회전행렬이 관절  $i+1$ 의 회전축을 회전하여 계  $\{i\}$ 의 향으로 표시함으로써 두 각속도 성분을 더할 수 있음
- 위의 식 양변에  ${}^{i+1}_iR$ 을 곱하면 링크  $i+1$ 의 각속도를 계  $\{i+1\}$ 의 좌표로 표시할 수 있음

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_iR {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

**Figure 5.7**  
Velocity vectors of neighboring links.





## 5.6 링크에서 링크로의 속도 전파



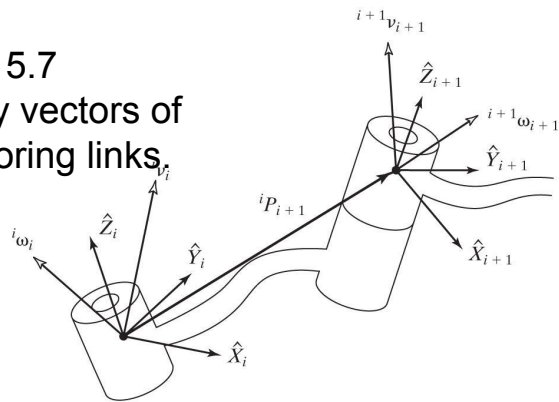
$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

- 계  $\{i+1\}$ 의 원점의 선속도는 계  $\{i\}$ 의 원점의 속도에 기구  $i$ 의 회전속도 때문에 생긴 새로운 요소를 더한 것임. 이것은 식 5.13으로 보여준 상황과 정확히 일치하는데,  ${}^iP_{i+1}$ 이 계  $\{i\}$ 에서 불변이므로 1개의 항이 생김.
- $${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1}$$
- 위의 식 양변에  ${}^{i+1}_i R$ 을 곱하면



$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ({}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})$$

**Figure 5.7**  
Velocity vectors of neighboring links.



## 5.6 링크에서 링크로의 속도 전파

- 관절  $i+1$ 이 프리즘형일때 해당하는 관계식은

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R {}^i\omega_i$$

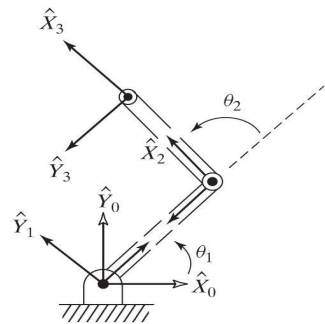
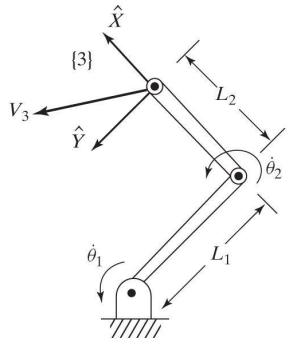
$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ({}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

- 링크에서 링크로 차례로 적용하면  ${}^N\omega_N$ 과  ${}^Nv_N$ , 즉 마지막 링크의 회전 및 선속도를 계산할 수 있고, 그 결과로 얻어진 속도가 계  $\{N\}$ 에서 표현 되었음을 주목해야 함
- 기저 좌표계의 값으로 속도가 필요하다면  ${}^0_N R$ 를 곱함으로써 기저 좌표계로 회전시킬 수 있음

예제 5.3 회전 관절을 갖는 2-링크 머니플레이터가 그림 5.8에 보여진다. 팔 끝의 속도를 관절 회 전율의 함수로 계산하라. 해답을 계 {3}과 계 {0}의 용어, 두 가지 형태로 나타내라.

○ 먼저 각 계의 원점의 속도를 기초계 {0}부터 시작하여 계산

■ 기초계  ${}^0\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$ ,  ${}^0v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  되어 있음



$$\begin{aligned}
 {}^1\omega_2 &= {}^1R^0 {}^0\omega_1 + \dot{\theta}_2 \hat{Z}_2 \\
 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
 {}^1v_2 &= {}^1R({}^0v_1 + {}^0\omega_1 \times {}^0P_2) \\
 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \dot{\theta}_1 s_2 \\ L_1 \dot{\theta}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2\omega_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = {}^2\omega_2 \\
 {}^2v_3 &= {}^2R({}^1v_2 + {}^1\omega_2 \times {}^1P_3) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} L_1 \dot{\theta}_1 s_2 \\ L_1 \dot{\theta}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} L_1 \dot{\theta}_1 s_2 \\ L_1 \dot{\theta}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} L_1 \dot{\theta}_1 s_2 \\ L_1 \dot{\theta}_1 c_2 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ({}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})$$

$${}^0_1 T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2 T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3 T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 5.3 회전 관절을 갖는 2-링크 머니플레이터가 그림 5.8에 보여진다. 팔 끝의 속도를 관절 회 전율의 함수로 계산하라. 해답을 계 {3}과 계 {0}의 용어, 두 가지 형태로 나타내라.

○ 먼저 각 계의 원점의 속도를 기초계 {0}부터 시작하여 계산

■ 기초계 {0}의 원점의 속도는 0임(바닥에 고정되어 있음)

라이드에서 구한 각 계의 원점의 속도를 이용해서 기초계 {0}의 원점의 속도를 구하러면 회전행렬  ${}^0R$ 을

이용  ${}^0R = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3$

$${}^0R = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_2 - S_1 S_2 & S_1 C_2 + C_1 S_2 & 0 \\ S_1 C_2 + C_1 S_2 & S_1 S_2 + C_1 C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0V = {}^0R_1 {}^1V_1 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \dot{\theta}_1 \\ l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 C_{12} \dot{\theta}_1 - l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S_{12} \\ l_1 S_{12} \dot{\theta}_1 + l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 S_{12} - l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 C_{12} \dot{\theta}_1 + l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

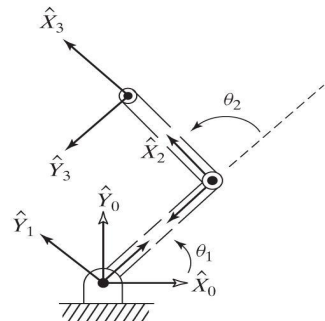
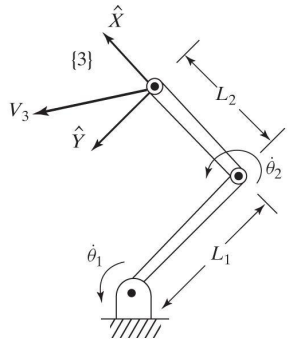
$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ({}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})$$

$${}^0_1 T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2 T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3 T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 5.7 자코비안

- 예를 들어 6개의 함수가 있고, 이들 각각이 6개의 독립변수의 함수라고 가정하면,

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$\vdots$$

$$y_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

- 벡터 표시를 활용하여 이  $Y = F(X)$  다음과 같이 쓸 수도 있음

•

- 이제  $y_i$ 의 미분을  $x_j$ 로 미분하고 싶다면

$$\delta y_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \delta x_6$$

$$\delta y_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \delta x_6$$

$$\vdots$$

$$\delta y_6 = \frac{\partial f_6}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \delta x_6$$

## 5.7 자코비안

- 벡터 표시를 활용하여 이들 식을 다음과 같이 쓸 수도 있음

$$\delta Y = \frac{\partial F}{\partial X} \delta X$$

- 편미분들의  $6 \times 6$  행렬을 자코비안  $J$ 라고 명명함.  $f_1(X)$ 에서  $f_6(X)$ 의 함수가 비선형일 때 편미분들은  $x_i$ 의 함수임. 따라서 다음과 같은 표시법을 사용함

- $$\delta Y = J(X) \delta X$$

- 양변을 시간의 미소량으로 나누면 자코비안은  $X$ 상에서의 속도를  $Y$ 상의 것으로  $f_1(X)$ 에서  $f_6(X)$ 의 함수가 매핑하는 것으로 생각할 수 있음

- $$\dot{Y} = J(X) \dot{X}$$

- 어느 순간에  $X$ 가 어떤 값을 갖게 되고,  $J(X)$ 는 선형 변환임. 새로운 순간마다  $X$ 가 변화하고 그에 따라서 선형 변환이 됨. 자코비안은 시간에 따라 변화하는 선형 변환이라고 할 수 있음

## 5.7 자코비안

- 로봇공학 분야에서는 일반적으로 관절 속도를 팔 끝의 직교좌표계 속도로 표현시키는 자코비안을 말함  ${}^0v = {}^0J(\Theta)\dot{\Theta}$
- 
- 여기서  $\Theta$ 는 머니플레이터 관절각의 벡터이고,  $v$ 는 직교좌표계 속도 벡터임
- 일반적인 6관절 로봇의 경우에 자코비안은  $6 \times 6$ ,  $\Theta$ 는  $6 \times 1$ ,  ${}^0v$ 는  $6 \times 1$ 임. 이  $6 \times 1$ 의 직교좌표계 속도벡터는  $3 \times 1$ 의 선형속도 벡터와  $3 \times 1$ 의 회전속도 벡터를 합친 것임

$${}^0v = \begin{bmatrix} {}^0v \\ {}^0\omega \end{bmatrix}$$

- 자코비안의 차원은 임의로 정의할 수 있음(정사각형이 아니라도 무관). 열수는 고려 중인 직교좌표 공간에서의 자유도 수와 동일함. 자코비안의 행수는 머니플레이터 관절의 수와 동일함. 예를 들어, 평면 팔을 고려할 때 자코비안은 3 이상 행을 가질 필요가 없다. 과다(redundant) 평면 머니플레이터에 대하여는 임의 개수의 열(각 관절에 1개 씩)이 있을 수 있다.

## 5.7 자코비안

$${}^0v = {}^0J(\Theta)\dot{\Theta}$$

- 예제 5.3의 2-링크 머니플레이터의 경우, **2x2** 자코비안을 만들어  $\dot{\Theta}$ 를 과 말단 효과 장치 속도,  $v$ 를 연결할 수 있음

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0v_3 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0J(\Theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3v_3 = {}^3J(\Theta)\dot{\Theta}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

- 위의 자코비안은 각속도를 제외하고 **x, y** 방향으로의 선속도만 고려해서 만들었기 때문에 **2 x 2**이지만, 각속도를 포함하여 **3 x 2** 자코비안을 만들 수 있음

$${}^3v_3 = {}^3J(\Theta)\dot{\Theta}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^0v = \begin{bmatrix} {}^0v \\ {}^0\omega \end{bmatrix}$$



## 5.7 자코비안

- 머니플레이터의 자코비안을 구하는 방법은 여러가지임. 기구학 방정식을 미분해서 구할 수도 있음(다른 책 인용)
- 기준 자코비안계의 변화: 계 **{B}**에 관한 자코비안을 다른 계 **{A}**에서의 자코비안 표현으로 바꿀 수 있음

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} {}^B v \\ {}^B \omega \end{bmatrix} = {}^B v = {}^B J(\Theta) \dot{\Theta} &\Rightarrow \begin{bmatrix} {}^A v \\ {}^A \omega \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A_B R & 0 \\ \hline 0 & {}^A_B R \end{array} \right] \begin{bmatrix} {}^B v \\ {}^B \omega \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} {}^A v \\ {}^A \omega \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A_B R & 0 \\ \hline 0 & {}^A_B R \end{array} \right] {}^B J(\Theta) \dot{\Theta} & \Rightarrow {}^A J(\Theta) = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A_B R & 0 \\ \hline 0 & {}^A_B R \end{array} \right] {}^B J(\Theta)
 \end{aligned}$$

## 5.8 특이성(singularity)

- 관절 속도를 직교좌표계 속도로 연결시키는 선형 변환이 주어졌을 경우, “이 행렬의 역을 구할 수 있는가”라는 질문은 의미있음. 즉 행렬이 비특이적 (non-singularity)인가 하는 것임. 행렬이 비특이적이면 그 행렬의 역을 구하여 직교좌표계 속도에서 관절의 변화율을 계산할 수 있음

$$\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta)v$$

- 로봇의 손을 직교좌표계 공간 안에서 주어진 속도 벡터를 갖고 운동하게 하고 싶다고 하면, 위의 식을 사용해서 경로에 따라 각 순간마다 관절의 변화율을 계산해서 제어할 수 있음
- 그럼 “모든  $\Theta$ 의 값에 대하여 자코비안의 역이 존재하는가?” 존재하지 않는다면 역을 구할 수 없는 영역은 어느 곳인가?

## 5.8 특이성(singularity)

- 대부분의 머니플레이터는 자코비안이 특이성이 되는 값(역이 존재하지 않는 값)들을 갖고 있다. 그런 위치를 기구의 특이성(singularities of the mechanism) 또는 간단히 특이성(singularities)이라고 한다.
- 모든 머니플레이터는 그 작업 공간의 경계상에서 특이성을 갖는다. 그리고 대부분은 작업 영역 내부에서도 특이성의 궤적(loci)을 갖는다.
  - 작업 공간 경계에서의 특이성 (workspace boundary singularities)
  - 작업 공간 내부의 특이성 (workspace interior singularities)
- 특이성 확인은 자코비안의 역이 존재하는지를 검사하면 됨. 즉  $\det[J] = 0$  인 점, 선, 공간 등을 찾으려면 됨  $\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta)v$

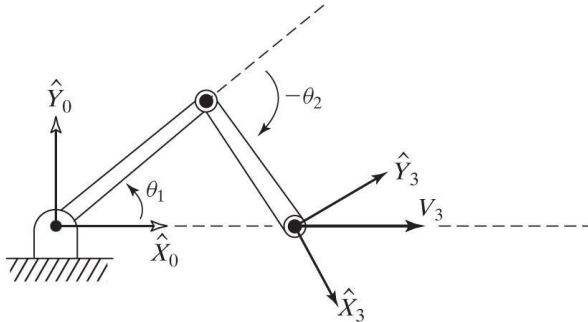
예제 5.5 회전 관절을 갖는 2-링크 머니플레이터의 말단 효과 장치가 **X**축을 따라서 **1.0 m/s**로 움직이고 있다고 생각하라. 특이성에서 떨어져 있을 때는 관절의 변화율이 적당하지만 특이성에 접근하면서  $\Theta_2 = 0$ 에 가까워지면 관절률이 무한대로 접근함을 보여라.

○ 먼저 기초계  $\{ {}^0J^{-1}(\Theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix}$

$$\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta)v$$

- **X**축으로 속도 1m/s이면

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{l_2 c_{12}}{l_1 l_2 s_2} \\ \frac{-l_1 c_1 - l_2 c_{12}}{l_1 l_2 s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_{12}}{l_1 s_2} \\ -\frac{c_1}{l_2 s_2} - \frac{c_{12}}{l_1 s_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



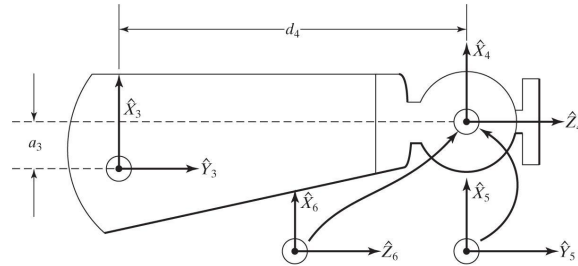
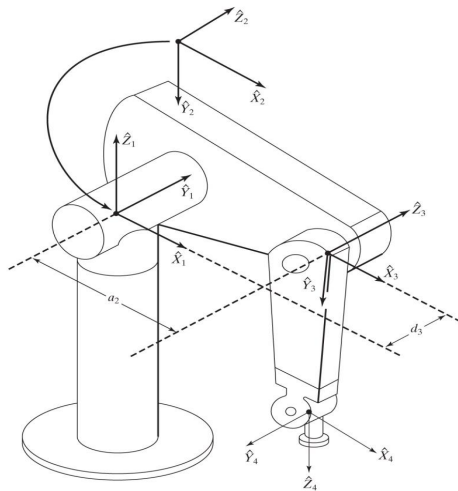
**Figure 5.10**  
A two-link manipulator  
moving its tip at a constant  
linear velocity.

예제 5.6 PUMA 560 머니폴레이터에 대하여 발생할 수 있는 특이성의 두 가지 예를 들어라.

$\Theta_3$ 이  $-90.0$ 에 가까울 때 특이성이 있다.  $\Theta_3$ 의 정확한 값을 계산하는 것은 연습문제 (연습 문제 5.14)로 남겨놓는다. 이 경우에 링크 2와 3은 예제 5.3의 2-링크 머니폴레이터의 특이 위치와 똑같이 ‘활짝 뻗쳐’ 있다. 이것은 작업 공간 경계상의 특이성으로 분류된다.

$\Theta_5 = 0.0$  이면 언제나 머니폴레이터는 특이 형상에 놓이게 된다. 이 형상에서 축 4와 6은 일직선상에 위치하게 되면, 둘 중 어느 것이 움직여도 말단 효과 장치는 동일하게 움직이게 될 수 있으므로

이것과 같다. 이것은 작업 공간 내부에서 일어날



## 5.9 머니플레이터 내부에서의 static forces

- 로봇은 연쇄의 자유단(말단 효과 장치)을 갖고 주어진 환경에서 어떤 물체를 밀고 있거나, 또는 손에 어떤 부하를 지지하고 있는 것이 전형적인 상황이다. 시스템을 정적 평형에 유지시키기 위하여 작용해야 할 관절 토크에 대하여 풀기를 원한다.
- 머니플레이터에서의 **static forces**을 고려할 때, 첫째로는 머니플레이터의 모든 관절을 고정시켜 총체적으로 1개의 구조물이 되도록 한다. 그 후에 각 링크를 고려하여 링크계를 써서 밸런스 관계를 기술한다. 마지막으로, 머니플레이터가 정적 평형에 있기 위하여 관절축 주위에 작용해야 할 정토크를 계산한다. 이 방법으로 말단 효과 장치에 작용하는 정하중을 지지하기 위하여 필요한 관절 토크의 조합을 풀게 된다.

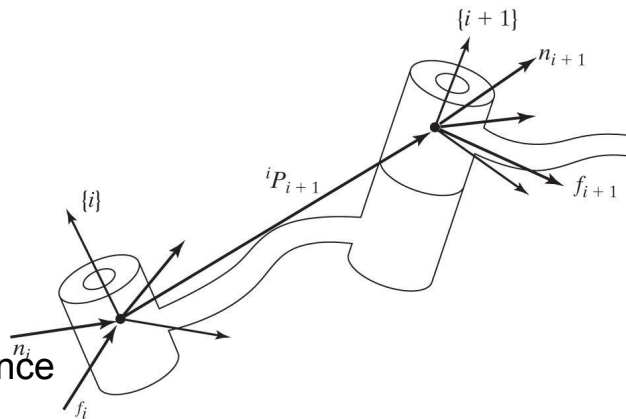
## 5.9 머니플레이터 내부에서의 static forces

- 이웃하는 링크에 의하여 가해지는 힘과 토크를 위하여 기호를 정의하면,

$f_i$  = 링크  $i-1$ 에 의하여 링크  $i$ 상에 가해지는 힘

$n_i$  = 링크  $i-1$ 에 의하여 링크  $i$ 상에 가해지는 토크

- 링크  $i$ 에 작용하는 정적 힘의 합을  $0$ 이라고 하면  ${}^i f_i - {}^i f_{i+1} = 0$
- 좌표계  $i$ 의 원점 주위로 토크의 합을  $0$ 이라고 하면  ${}^i n_i - {}^i n_{i+1} - {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} = 0$



**Figure 5.11**  
Static force-moment balance  
for a single link.

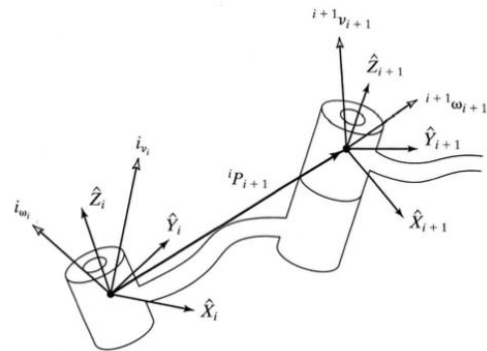


그림 5.7과  
비교

## 5.9 머니플레이터 내부에서의 static forces

- 머니플레이터 끝의 말단효과장치(손)에 가해진 힘과 모멘트를 기술하는 것부터 시작해서 마지막 링크로부터 기저, 즉 링크 0까지의 각 링크에 의하여 가해지는 힘과 모멘트  ${}^i f_i = {}^i f_{i+1}$  !하면,

- ${}^i n_i = {}^i n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1}$
- 마지막으로 이들 식을 링크계 안에서 정의된 힘과 모멘트만으로 표시하기 위하여 계  $\{i\}$ 에 기준하여 계  $\{i+1\}$ 을 기술하는 회전행렬을 갖고 변환하면,

$$\begin{aligned} {}^i f_i &= {}_{i+1}^i R {}^{i+1} f_{i+1} \\ {}^i n_i &= {}_{i+1}^i R {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i \end{aligned}$$

**Figure 5.11**  
Static force-moment balance  
for a single link.

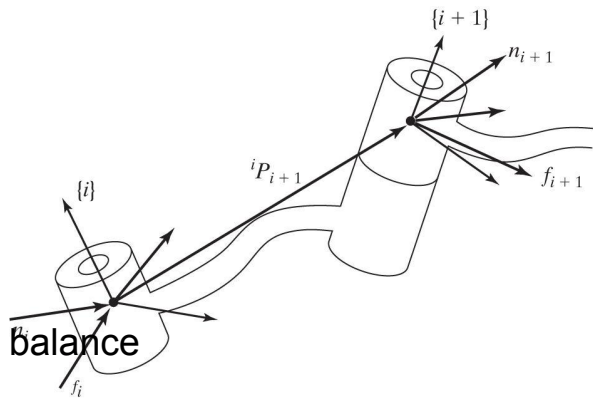
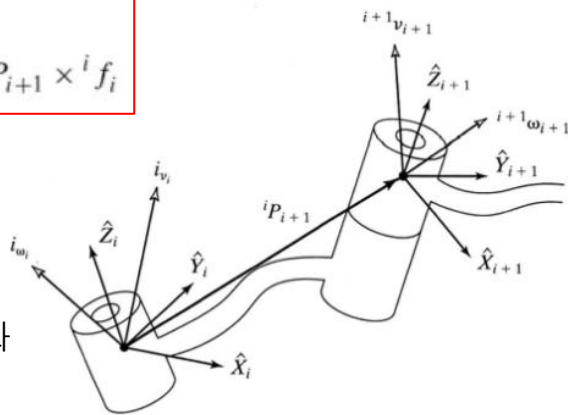


그림 5.7과  
비교





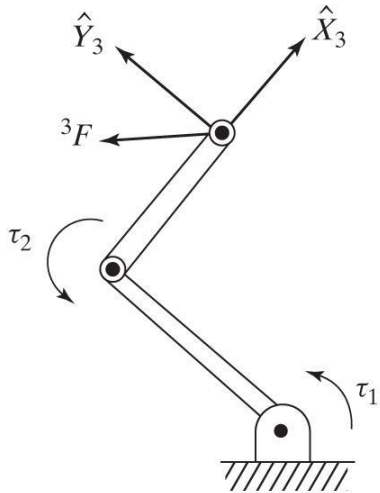
## 5.9 머니플레이터 내부에서의 static forces

- 링크에 작용하는 반력과 모멘트를 상쇄하기 위하여 관절에서 필요한 토크는 무엇인가? 힘과 모멘트의 모든 벡터 요소들이 관절축 주위의 토크를 제외하고는 기구 자체의 구조에 의하여 지지되고 있다 따라서 정적 평형을 유지하는 데 필요한 관절 토크를 구하기 위하여 관절축 벡터와 링크에 작용하는 모멘트 벡터의 내적을 계산하면 됨
  - 관절 i가 회전형일 때, 관절 액추에이터 토크  $\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i$  는 다음과 같음
  - 관절 i가 미끄럼형일 때, 관절 액추에이터 힘  $f_i = {}^i f_i^T {}^i \hat{Z}_i$  은 다음과 같음

예제 5.7 2-링크 머니폴레이터가 말단효과장치로 힘 벡터  ${}^3F$ 를 가하고 있다 이 힘이 {3}의 원점에 작용하고 있다고 생각한다. 필요한 관절 토크를 형상(configuration)과 부가된 힘의 함수로 구하라.

- 식 5.80 ~ 5.82를 통하여 마지막 링크로부터 시작하여 로봇의 기저로 향하면서 적용한다.

**Figure 5.12**  
A two-link manipulator applying a force at its tip.



$${}^2f_2 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2n_2 = l_2 \hat{X}_2 \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix}$$

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + l_1 \hat{X}_1 \times {}^1f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = l_1 s_2 f_x + (l_2 + l_1 c_2) f_y$$

$$\tau_2 = l_2 f_y$$

$$\tau = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_2 + l_1 c_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$${}^i f_i = {}^{i+1}R^{i+1} f_{i+1}$$

$${}^i n_i = {}^{i+1}R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i$$

$$\tau_i = {}^i n_i^T \hat{Z}_i$$

$${}^0T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

식 5.49

$$\begin{aligned}
 {}^2f_2 &= {}^2R^3 f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2n_2 &= {}^2R^3 n_3 + {}^2P_3 \times {}^2f_2 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} \\
 {}^1f_1 &= {}^1R^2 f_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^1n_1 &= {}^1R^2 n_2 + {}^1P_2 \times {}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 (s_2 f_x + c_2 f_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y + l_1 (s_2 f_x + c_2 f_y) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\tau_1 = l_1 s_2 f_x + (l_2 + l_1 c_2) f_y$$

$$\tau_2 = l_2 f_y$$

$$\tau = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_2 + l_1 c_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

자코비안의 전치  ${}^3J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix}$

## 5.10 힘 영역 안에서의 자코비안

- 힘이 로봇에 작용할 때 변위를 갖고 움직였다면, 일(기술적 의미로서)이 행해졌다고 함. 일이란 힘이 가해졌을 때 일정한 거리를 움직인 것으로서 정의되며, 에너지의 단위를 갖는 스칼라량임
- 가상 일(virtual work)의 원리에 따라서 이 변위를 미분치 만큼으로 하면 정적인 경우에 대해서도 언급할 수 있음. 일이 에너지의 단위를 갖고 있으므로 일반화된 어떤 좌표계 안에서 측정해도 동일해야만 함.
- 단적으로 직교좌표계 안에서 행해진 일을 관절 공간에서의 일과 일치시킬 수 있음. 다차원의 경우에 일은 힘 벡터 또는  $\mathcal{F} \cdot \delta \chi = \tau \cdot \delta \Theta$  위 벡터의 내적이다.

위의 식의 모든 벡터가  $6 \times 1$  형태이므로  $\mathcal{F}^T \delta \chi = \tau^T \delta \Theta$  하려면 **transpose** 해야 함

$$\delta Y = J(X) \delta X \quad \text{식 5.62}$$

## 5.10 힘 영역 안에서의 자코비안

$$\mathcal{F}^T J \delta \theta = \tau^T \delta \Theta$$

$$\mathcal{F}^T J = \tau^T$$

- 양변을 전치(transpose)하면,

$$\tau = J^T \mathcal{F}$$

$${}^0_v = {}^0J(\Theta)\dot{\Theta}$$

식 5.64

- 전치 자코비안은 손에 작용하는 직교좌표계의 힘을 동등한 관절 토크로 매핑
- 자코비안이 특이성이 있으면,  $F$ 는 어떤 방향으로 계산될  $\tau$ 의 값에 영향을 미치지 않고 증가 또는 감소될 수 있음
  - 2-링크 평면 머니폴레이터가 거의 직선으로 펼쳐진 상태로, 말단 효과 장치가 반응면과 접촉할 경우를 생각하자. 이 형상에서는 임의의 커다란 힘이 ‘작은’ 관절 토크로 나타날 수가 있다
- 직교좌표계 값을 관절 공간으로 변환하는 데 역기구 함수를 하나도 계산하지 않아도 됨 →

## 5.11 속도와 static forces의

- 물체의 일반화된 속도를  $6 \times 1$ 로 표현하고 싶을 때

$$v = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

- 마찬가지로 일반화된 힘 벡터를  $6 \times 1$  표시로 나타내고 싶을 때

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}$$

- 이들 값을 한 계에서 다른 계로 매핑하는  $6 \times 6$  변환을 생각할

$$\begin{bmatrix} {}^B v_B \\ {}^B \omega_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B_A R & -{}^B_A R {}^A P_{BORG} \times \\ 0 & {}^B_A R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A v_A \\ {}^A \omega_A \end{bmatrix}$$



$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ({}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})$$

$\dot{\theta}_{i+1}$  은 0으로 가정

## 5.11 속도와 static forces의

- 물체의 일반화된 속도를  $6 \times 1$ 로 표현하고 싶을 때

$$\begin{bmatrix} {}^B v_B \\ {}^B \omega_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B_A R & -{}^B_A R {}^A P_{BORG} \times \\ 0 & {}^B_A R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A v_A \\ {}^A \omega_A \end{bmatrix}$$

$$P \times = \begin{bmatrix} 0 & -p_x & p_y \\ p_x & 0 & -p_z \\ -p_y & p_z & 0 \end{bmatrix}$$

- 식 (5.100)은 한 계에서의 속도를 다른 계에서의 속도와 연결지어주고,  $T_v$ 라는 기호를 사용하는  $6 \times 6$  연산자인 속도 변환(velocity transformation)을 정의하면,

- $${}^B v_B = {}^B_A T_v {}^A v_A$$

- 위 식의 역을 취하면  $\{B\}$ 에서의 값이 주어졌을 경우  $\{A\}$ 에서의 속 표시를 계산할 수 있음

$$\begin{bmatrix} {}^A v_A \\ {}^A \omega_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_{BORG} \times {}^A_B R \\ 0 & {}^A_B R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B v_B \\ {}^B \omega_B \end{bmatrix}$$

$${}^A v_A = {}^A_B T_v {}^B v_B$$

## 5.11 속도와 static forces의

$$\begin{aligned} {}^i f_i &= {}^i R^{i+1} f_{i+1} \\ {}^i n_i &= {}^i R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i \end{aligned}$$

- 위의 식으로부터 {B}에 기준한 일반적인 힘 벡터를 계 {A}에서의 표시 방법으로 변환시키는 6 x 6 행렬을 쓰스인

$$\begin{bmatrix} {}^A F_A \\ {}^A N_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & 0 \\ {}^A P_{BORG} \times {}^A R_B & {}^A R_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B F_B \\ {}^B N_B \end{bmatrix}$$

$${}^A \mathcal{F}_A = {}^A T_f^B \mathcal{F}_B$$

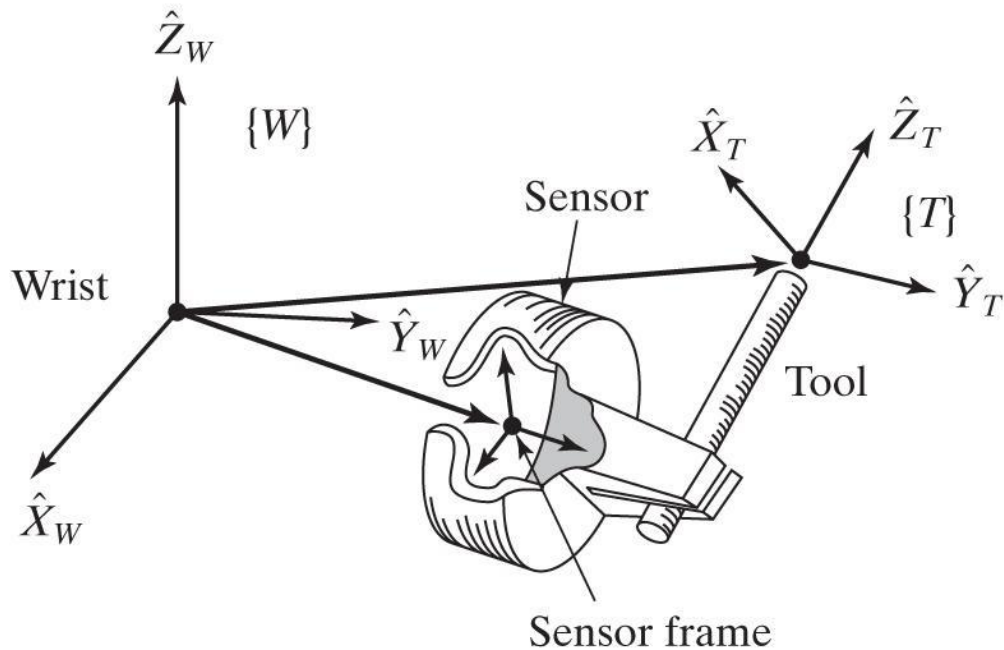
- $T_f$ 는 힘-모멘트 변환(force-moment transformation)로 정의

$${}^A T_f = {}^A T_v^T$$



예제 5.8 말단 효과 장치가 머니 플레이터에 부착되어 있는 점의 위치에 힘 센싱 손목이 있고, 공구 끝에 작용하는 힘과 토크를 측정하고 싶다면?

**Figure 5.13**  
Frames of interest with a force sensor.



$${}^T\mathcal{F}_T = {}^T T_f {}^S \mathcal{F}_S$$

$${}^T T_f = \begin{bmatrix} {}^T_S R & 0 \\ {}^T P_{SORG} \times {}^T_S R & {}^T_S R \end{bmatrix}$$