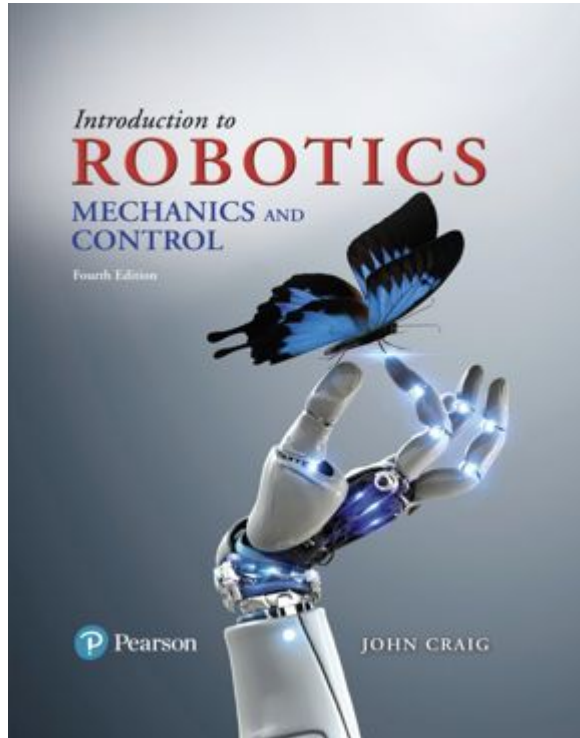


Introduction to Robotics

Mechanics and Control

4th Edition



Chapter 4

매니퓰레이터 역기구학

4.1 개요

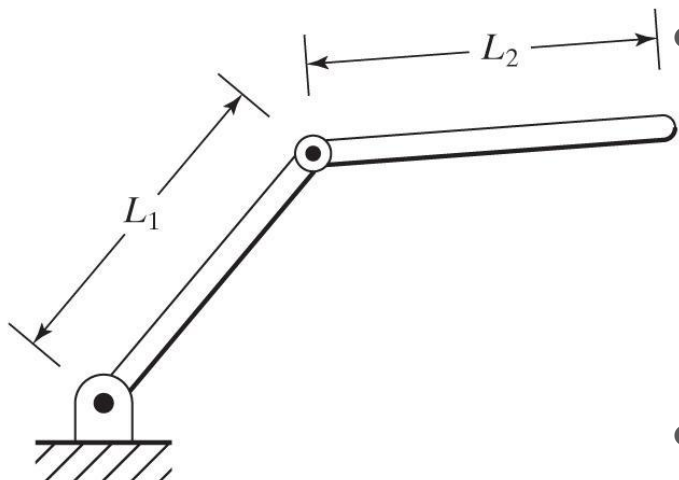
- 역기구학(**inverse kinematics**): 작업장을 기준으로 공구의 위치와 방향이 주어진 경우, 목표한 결과를 이루기 위한 관절각 조합을 계산함
- 문제(공구계 $\{T\}$ 를 정지계 $\{S\}$ 에 기준하여 관절각을 구하는 문제)를 2단계로 나눔
 - 기저계 $\{B\}$ 를 손목계 $\{W\}$ 를 찾는 문제 \rightarrow 좌표계 변환
 - 역기구 계산으로 관절각을 구함

4.2 계산 가능성

- 기구방정식(역기구학)을 푸는 것은 비선형 문제임
- 3장의 PUMA 560 로봇을 보면, ${}^0_N\mathbf{T}$ (식 3.14)이 주어진 경우, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 의 값을 찾기 위해 12개의 방정식과 6개의 미지수를 계산함 \rightarrow 비선형이고 초월함수 방정식이라서 해를 구하기 어려움
- PUMA 560은 구조가 간단하여 쉬운 로봇임에도 불구하고 복잡함. 일반적인 로봇은 훨씬 더 복잡함
- 해의 존재
 - 목표점이 장업 공간 내에 있는가?
 - 자유자재(dextrous) 작업 영역: 말단 효과 장치가 어떤 방위에서도 도달할 수 있는 공간
 - 도달가능(reachable) 작업 영역: 최소한 1개의 방위로 도달할 수 있는 공간

Figure 4.1

Two-link manipulator with link lengths l_1 and l_2 .



- $L_1 = L_2$ 이면,
 - 도달 가능 작업 영역은 반경 $2L_1$ 의 반원
 - 자유자재 작업 영역은 단 1개의 점, 즉 원점
- $L_1 \neq L_2$ 이면,
 - 자유자재 작업 영역은 없음
 - 도달 가능 작업 영역은 외경 $L_1 + L_2$, 내경 $|L_1 - L_2|$ 인 반지형
 - 도달 가능 작업 영역 내부에서는 말단 효과 장치의 방향에 2가지 가능성이 있음
- 각 관절의 회전이 360도 일 가능성은 극히 드물다

4.2 계산 가능성

- 머니플레이터가 6자유도 미만이면 3차원 공간에서 일반적인 목표의 위치와 방위를 가질 수 없음
- 말단 효과 장치에 대한 공구계 $\{T\}$ 가 정의되고, 목적계가 주어지면 상응하는 $\{W\}$ 계가 계산되며, 그 후에 목표로 하는 $\{W\}$ 의 위치와 방위가 작업 공간 내에 존재하는지 조사
- 다수 해
 - 기구학 방정식을 푸는 과정에서 만나는 또다른 문제는 다수 해 (그림 4.2 참조)
 - 다수 해 중 선택해야 하는 것이 문제임 (그림 4.3 참조)
 - 선택의 기준
 - 최소 이동량
 - 충돌 회피
 - 최소 소비 에너지(이왕이면 짧은 관절이나 끝 쪽 관절)

Figure 4.2

Three-link manipulator. Dashed lines indicate a second solution.

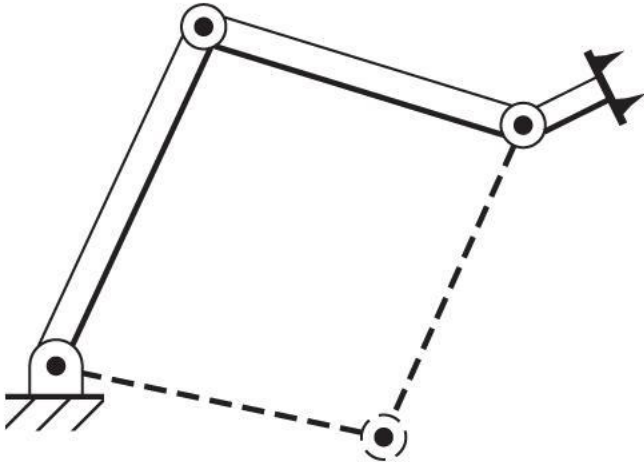
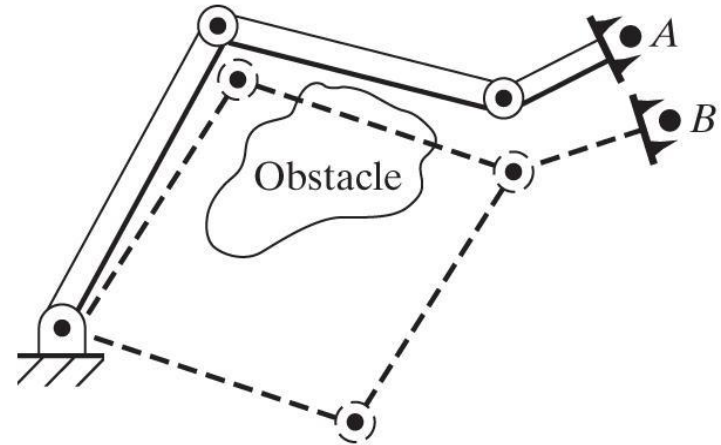


Figure 4.3

One of the two possible solutions to reach point *B* causes a collision.

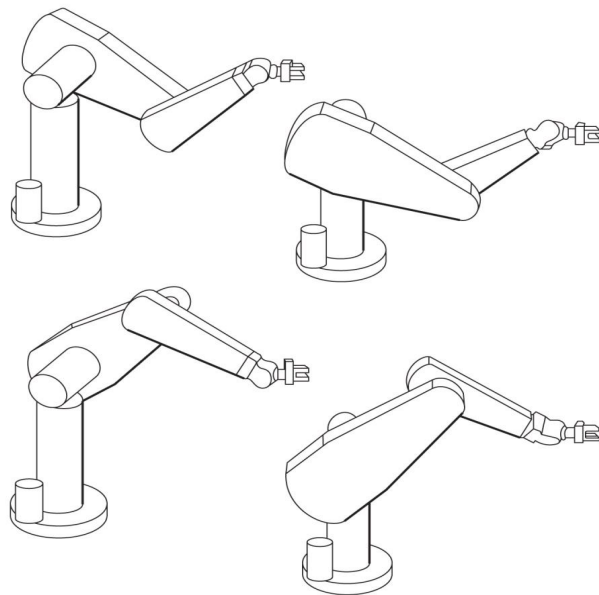


4.2 계산 가능성

- PUMA 560은 어떤 목표를 도달하는데 8개의 다른 해가 있음
 - 아래의 4개의 경우에 마지막 3 관절이 뒤집힐 경우 고려

Figure 4.4

Four solutions of the PUMA 560.



- 6-자유도로 완전히 일반적인 회전 관절을 갖고 있는 머니플레이터에서는 최고 16개의 해가 존재

Figure 4.5

Number of solutions vs. nonzero a_i .

a_i	Number of solutions
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	≤ 4
$a_3 = a_5 = 0$	≤ 8
$a_3 = 0$	≤ 16
All $a_i \neq 0$	≤ 16

4.2 계산 가능성

- 역기구학 방정식을 푸는 방법
 - 비선형 방정식을 푸는 일반적인 방법(알고리즘)은 없음
 - 폐형식 해(closed form solution): 방정식을 직접 푸는 방법
 - 수치해(numerical solution): 반복 계산을 통해 근사치를 구하는 방법
- 수치해는 반복 계산의 특성을 가지므로 계산 과정이 느림 → 최근에는 컴퓨터가 빨라져서 극복 가능함
 - 비선형 방정식의 수치해는 또다른 학문 영역임
- 본 교재에서는 폐형식 해(closed form solution) 즉, 방정식을 어떻게서든 풀 것임
 - 두 가지 방법이 있는데, 대수적인(algebraic) 것과 기하학적인(geometric) 것
- 회전 관절 또는 프리즘 관절을 합쳐서 6자유도이고 1개의 연쇄로 연결되어 있는 모든 기구 시스템은 수치해로 풀 수 있다고 증명됨
- 머니풀레이터를 설계할 때 폐형식 해가 존재하도록 간단하게 설계하고 있음
- 회전 관절 6개인 경우, 폐형식 해가 존재할 충분조건은 이웃하는 3개의 관절축이 한 점에서 교차해야 함 (PUMA 560의 4, 5, 6축)

4.3 $n < 6$ 일 때의 머니플레이터 부분 공간 개념

- $n < 6$ 일 때의 n 자유도 머니플레이터의 경우 도달 가능 작업 공간은 n 자유도 부분 공간의 일부임
- n 자유도 머니플레이터의 부분 공간을 구체화하는 방법: 손목계나 공구계를 n 개 변수의 함수로 표현한 후, 그 변수에 가능한 모든 값을 대입하여 부분 공간을 구함
- n 자유도 머니플레이터의 목표를 정의하는데 일반적으로 n 개의 인자를 사용함. 만약 목표의 6-자유도 모두를 명시하면, $n < 6$ 인 머니플레이터로 목표에 일반적으로 도달할 수 없음. 이 경우에는 부분 공간 안에 목표에 가능한 근접한 곳을 목표로 정함

예제 4.2 2자유도 극형 머니플레이터에 대해 0_2T 의 부분 공간을 기술하라.

$${}^0P_{2ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

${}^0\hat{Y}_2$ 축은, 항상 아래쪽

$${}^0\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

${}^0\hat{X}_2 \equiv {}^0\hat{Y}_2 \times {}^0\hat{Z}_2$ 의 벡터 곱

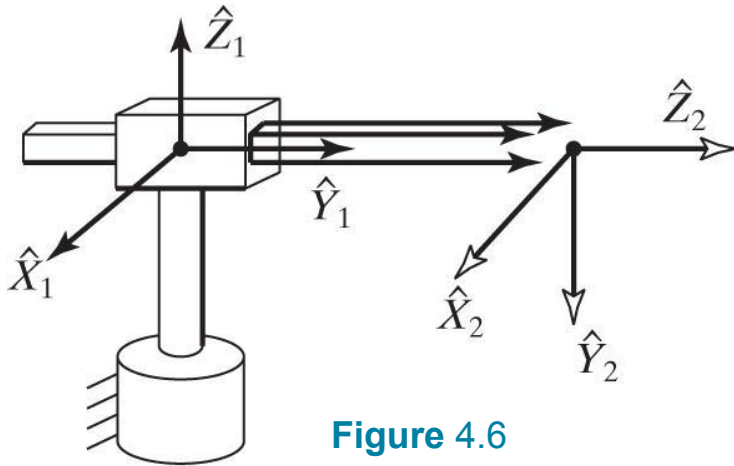
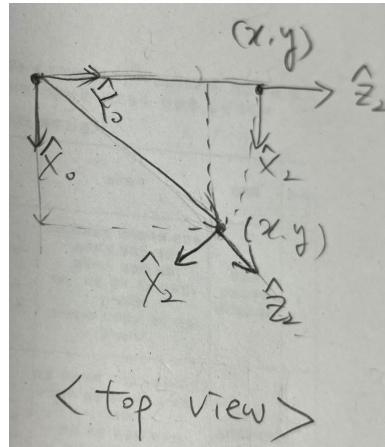


Figure 4.6
A polar two-link
manipulator.



$${}^0_2T = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4 대수적 대 기하학적

$$c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

- 단순 평면 3-링크 머니플레이터의 해를 먼저 **대수적(수식)**으로 구해보자

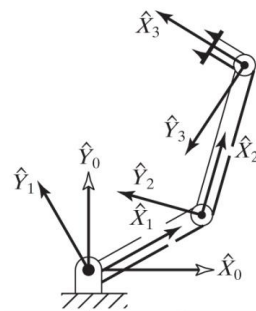
- 대수적 해

$${}^B_w T = {}^0_3 T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 평면 머니플레이터이므로 목표점은 3개의 숫자 x, y, ϕ
- 좀 더 편하게 하기 위해 균질 변환 형태로 가정

$${}^B_w T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 위의 두 식을 항별로 비교



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

4.4 대수적 대기하학적

- $$\begin{aligned} c_\phi &= c_{123} & x &= l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_\phi &= s_{123} & y &= l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{aligned}$$

두 식을 제공하고 합하면, $x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l_1^2 c_1^2 + l_2^2 c_{12}^2 + 2l_1 l_2 c_1 c_{12} + l_1^2 s_1^2 + l_2^2 s_{12}^2 + 2l_1 l_2 s_1 s_{12} \\ &= l_1^2 (c_1^2 + s_1^2) + l_2^2 (c_{12}^2 + s_{12}^2) + 2l_1 l_2 (c_1 c_{12} + s_1 s_{12}) \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 (c_1 c_{12} + s_1 s_{12}) \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 (c_1^2 c_2 - c_1 s_1 s_2 + c_1 s_1 s_2 + s_1^2 c_2) \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 (c_1^2 + s_1^2) \end{aligned}$$

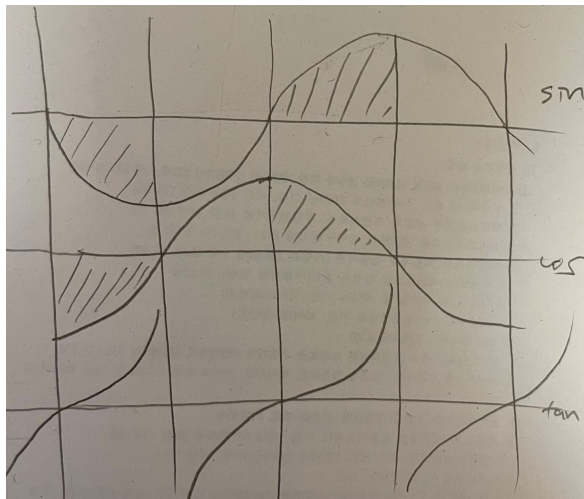
- $$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$
, 해가 존재하려면 우변이 -1과 1사이의 값을 가져야 함.
 알고리즘에서 이를 체크해야 함. 이 조건을 만족못한다는 뜻은 목표점이 너무
 멀어서 도달할 수 없다는 것임 (부호를 결정하는 것은 다수 해의 경우에 '팔꿈치 상향' 또는 '팔꿈치 하향' 해를 선택하는 것)

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

$$\theta_2 = \text{AtanZ}(s_2, c_2)$$

4.4 대수적 대 기하학적

- $\theta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2) = \tan^{-1}(s_2/c_2) = \tan^{-1}(-s_2/-c_2)$
- 반복 해법(recurring method): 관절각의 사인과 코사인을 결정하고 두 변수 Atan2 를 적용하면 해를 전부 찾을 수 있고, 찾은 각도가 4분면에 위치한다는 것을 보장함



4.4 대수적 대 기하학적

- θ_2 를 구한 후 식 4.10과 식 4.11을 θ_1 에 대해 풀 수 있음

$$\begin{aligned} x &= k_1 c_1 - k_2 s_1 & k_1 &= l_1 + l_2 c_2 \\ y &= k_1 s_1 + k_2 c_1 & k_2 &= l_2 s_2 \end{aligned}$$

- 변수 치환 방법을 이용하면, $r = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ $\gamma = \text{Atan2}(k_2, k_1)$ $k_1 = r \cos \gamma$
- 식 4.17 식 4.18은 다음과 같음 $k_2 = r \sin \gamma$

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos \gamma \cos \theta_1 - \sin \gamma \sin \theta_1 \\ \frac{y}{r} &= \cos \gamma \sin \theta_1 + \sin \gamma \cos \theta_1 \end{aligned} \quad \text{또는} \quad \begin{aligned} \cos(\gamma + \theta_1) &= \frac{x}{r} \\ \sin(\gamma + \theta_1) &= \frac{y}{r} \end{aligned}$$

- 따라서 $\gamma + \theta_1 = \text{Atan2}\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \text{Atan2}(y, x)$ $\theta_1 = \text{Atan2}(y, x) - \text{Atan2}(k_2, k_1)$

4.4 대수적 대 기하학적

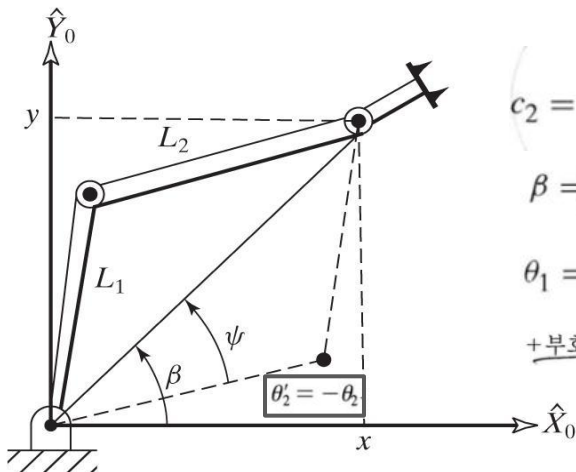
- 마지막으로 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{Atan2}(s_\phi, c_\phi) = \phi$ 의 식에서 θ_3 를 구할 수 있음

4.4 대수적 대 기하학적

- 단순 평면 3-링크 머니플레이터의 해를 다음으로 **기하학적(그림)**으로 구해보자
 - L_1 과 L_2 , 그리고 계 $\{0\}$ 의 원점과 계 $\{3\}$ 의 원점을 연결하는 직선에 의하여 구성된 삼각형을 보여준다. 점선을 계 $\{3\}$ 의 위치를 동일하게 맞출 수 있는 삼각형의 다른 모양을 나타낸다. 실선 삼각형의 경우 ‘코사인 법칙’을 적 $\cos(180 + \theta_2) = -\cos(\theta_2)$ 할 수 있다.

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(180 + \theta_2)$$

목적점까지의 거리 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 는 \leq 링크 길이의 합 $l_1 + l_2$



$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \longrightarrow \theta_2$$

$$\beta = \text{Atan2}(y, x)$$

$$\theta_1 = \beta \pm \psi \longrightarrow \theta_1$$

+부호는 $\theta_2 < 0$ 일 때, -부호는 $\theta_2 > 0$ 일 때 쓰인다.

$$\cos \psi = \frac{x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi \longrightarrow \theta_3$$

4.5 다항식 변환에 의한 대수해

- 하나의 θ 만 존재할 때도 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 등이 나오므로 초월함수의 해를 구하기 어려움. 다음의 치환을 이용해서 u 의 방정식으로 바꾸면 구하기 쉬움

$$\begin{aligned}u &= \tan \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \sin \theta &= \frac{2u}{1+u^2}\end{aligned}$$

예제 4.3 다음의 초월함수 방정식 $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ 을 θ 에 대해서 구하라.

$$a(1-u^2) + 2bu = c(1+u^2)$$

$$(a+c)u^2 - 2bu + (c-a) = 0$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c}$$

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c} \right)$$

4.6 3축이 교차할 경우 피퍼(Pieper)의 해

- 6-자유도의 일반적인 로봇은 폐형식 해(closed form solution)를 갖지 않지만 특별한 경우에는 풀릴 수도 있음
- Pieper는 마지막 3개의 연차적(연속적) 축이 한 점에서 교차하는 6-자유도 머니플레이터의 해를 구함(참고문헌[4]) → 대부분의 산업용 로봇에 적용
- 마지막 세 축이 교차하면, 링크계 {4}, {5}, {6}의 원점은 모두 교차함

$${}^0P_{4ORG} = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3P_{4ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0P_{4ORG} = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4s\alpha_3 \\ d_4c\alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6 3축이 교차할 경우 피퍼(Pieper)의 해

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P_{4ORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 T \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 s \alpha_3 \\ d_4 c \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 T \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = a_3 c_3 + d_4 s \alpha_3 s_3 + a_2$$

$$f_2 = a_3 c \alpha_2 s_3 - d_4 s \alpha_3 c \alpha_2 c_3 - d_4 s \alpha_2 c \alpha_3 - d_3 s \alpha_2$$

$$f_3 = a_3 s \alpha_2 s_3 - d_4 s \alpha_3 s \alpha_2 c_3 + d_4 c \alpha_2 c \alpha_3 + d_3 c \alpha_2$$

$${}^{i-1}_i T = \begin{bmatrix} c \theta_i & -s \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s \theta_i c \alpha_{i-1} & c \theta_i c \alpha_{i-1} & -s \alpha_{i-1} & -s \alpha_{i-1} d_i \\ s \theta_i s \alpha_{i-1} & c \theta_i s \alpha_{i-1} & c \alpha_{i-1} & c \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

가정하면, $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^2_3 T \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 s \alpha_3 \\ d_4 c \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 c \alpha_2 & c_3 c \alpha_2 - s \alpha_2 & -s \alpha_2 d_3 & -d_4 s \alpha_3 \\ s_3 s \alpha_2 & c_3 s \alpha_2 & c \alpha_2 & c \alpha_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 s \alpha_3 \\ d_4 c \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 c_3 + d_4 s \alpha_3 s_3 + a_2 \\ a_3 s_3 c \alpha_2 - d_4 s \alpha_3 c \alpha_2 - d_4 s \alpha_2 c \alpha_3 - d_3 s \alpha_2 \\ a_3 s_3 s \alpha_2 - d_4 s \alpha_3 s \alpha_2 c_3 + d_4 c \alpha_2 c \alpha_3 + d_3 c \alpha_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.6 3축이 교차할 경우 피퍼(Pieper)의 해

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 T \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0P_{4ORG} = \begin{bmatrix} c_1g_1 - s_1g_2 \\ s_1g_1 + c_1g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_1 {}^1T_2 T$$

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = a_3c_3 + d_4s\alpha_3s_3 + a_2$$

$$f_2 = a_3c\alpha_2s_3 - d_4s\alpha_3c\alpha_2c_3 - d_4s\alpha_2c\alpha_3 - d_3s\alpha_2$$

$$f_3 = a_3s\alpha_2s_3 - d_4s\alpha_3s\alpha_2c_3 + d_4c\alpha_2c\alpha_3 + d_3c\alpha_2$$

$$g_1 = c_2f_1 - s_2f_2 + a_1$$

$$g_2 = s_2c\alpha_1f_1 + c_2c\alpha_1f_2 - s\alpha_1f_3 - d_2s\alpha_1$$

$$g_3 = s_2s\alpha_1f_1 + c_2s\alpha_1f_2 + c\alpha_1f_3 + d_2c\alpha_1$$

$${}^0T_1 \cdot {}^1T_2 T = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_1 \\ S_2C\alpha_1 & C_2C\alpha_1 & -S\alpha_1 & -S\alpha_1d_2 \\ S_2S\alpha_1 & C_2S\alpha_1 & C\alpha_1 & C\alpha_1d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1C_2 - S_1S_2C\alpha_1 & -C_1S_2 - S_1C_2C\alpha_1 & S_1S\alpha_1 & a_1C_1 + S_1S\alpha_1d_2 \\ S_1C_2 + C_1S_2C\alpha_1 & -S_1S_2 + C_1C_2C\alpha_1 & -C_1S\alpha_1 & a_1S_1 - C_1S\alpha_1d_2 \\ S_2S\alpha_1 & C_2S\alpha_1 & C\alpha_1 & C\alpha_1d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6 3축이 교차할 경우 피퍼(Pieper)의 해

$${}^0P_{4ORG} = \begin{bmatrix} c_1g_1 - s_1g_2 \\ s_1g_1 + c_1g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

계수 비교

$${}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(c_1c_2 - s_1s_2\alpha_1) + f_2(-c_1s_2 - s_1c_2\alpha_1) + f_3s_1s\alpha_1 + a_1c_1 + s_1s\alpha_1d_1 \\ f_1(s_1c_2 + c_1s_2\alpha_1) + f_2(-s_1s_2 + c_1c_2\alpha_1) + f_3(-c_1s\alpha_1) + a_1s_1 - c_1s\alpha_1d_1 \\ f_1s_2s\alpha_1 + f_2c_2s\alpha_1 + f_3c\alpha_1 + c\alpha_1d_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1g_1 - s_1g_2 \\ s_1g_1 + c_1g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = a_3c_3 + d_4s\alpha_3s_3 + a_2$$

$$f_2 = a_3c\alpha_2s_3 - d_4s\alpha_3c\alpha_2c_3 - d_4s\alpha_2c\alpha_3 - d_3s\alpha_2$$

$$f_3 = a_3s\alpha_2s_3 - d_4s\alpha_3s\alpha_2c_3 + d_4c\alpha_2c\alpha_3 + d_3c\alpha_2$$

$$g_1 = c_2f_1 - s_2f_2 + a_1$$

$$g_2 = s_2c\alpha_1f_1 + c_2c\alpha_1f_2 - s\alpha_1f_3 - d_2s\alpha_1$$

$$g_3 = s_2s\alpha_1f_1 + c_2s\alpha_1f_2 + c\alpha_1f_3 + d_2c\alpha_1$$

4.6 3축이 교차할 경우 피퍼(Pieper)의 해

$${}^0P_{4ORG} = \begin{bmatrix} c_1g_1 - s_1g_2 \\ s_1g_1 + c_1g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^0P_{4ORG}$ 의 제곱값 $r = x^2 + y^2 + z^2$ 로

$$\begin{aligned} r &= (c_1g_1 - s_1g_2)^2 + (s_1g_1 + c_1g_2)^2 + g_3^2 \\ &= c_1^2g_1^2 + s_1^2g_2^2 - 2s_1c_1g_1g_2 + s_1^2g_1^2 + c_1^2g_2^2 + 2s_1c_1g_1g_2 + g_3^2 \\ &= g_1^2(c_1^2 + s_1^2) + g_2^2(s_1^2 + c_1^2) + g_3^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \end{aligned}$$

$$r = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$$

$$r = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2f_3 + 2a_1(c_2f_1 - s_2f_2)$$

$$r = (k_1c_2 + k_2s_2)2a_1 + k_3$$

$$z = (k_1s_2 - k_2c_2)s\alpha_1 + k_4$$

$$f_1 = a_3c_3 + d_4s\alpha_3s_3 + a_2$$

$$f_2 = a_3c\alpha_2s_3 - d_4s\alpha_3c\alpha_2c_3 - d_4s\alpha_2c\alpha_3 - d_3s\alpha_2$$

$$f_3 = a_3s\alpha_2s_3 - d_4s\alpha_3s\alpha_2c_3 + d_4c\alpha_2c\alpha_3 + d_3c\alpha_2$$

$$g_1 = c_2f_1 - s_2f_2 + a_1$$

$$g_2 = s_2c\alpha_1f_1 + c_2c\alpha_1f_2 - s\alpha_1f_3 - d_2s\alpha_1$$

$$g_3 = s_2s\alpha_1f_1 + c_2s\alpha_1f_2 + c\alpha_1f_3 + d_2c\alpha_1$$

$$k_1 = f_1$$

$$k_2 = -f_2$$

$$k_3 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2f_3$$

$$k_4 = f_3c\alpha_1 + d_2c\alpha_1$$

4.6 3축이 교차할 경우 피퍼(Pieper)의 해

$$r = (k_1 c_2 + k_2 s_2) 2a_1 + k_3$$

$$z = (k_1 s_2 - k_2 c_2) s\alpha_1 + k_4$$

식 4.50

- 식 4.50은 θ_1 에의 의존성이 제거되었다. 또한 θ_2 에의 의존성은 단순한 형태를 가짐

- $a_1 = 0$ 이면 $r = k_3$ 이고 r 은 알려진 값이다. 우변 k_3 은 θ_3 만의 함수이다. 식 (4.35)를 치환하면, $\tan \frac{\theta_3}{2}$ 에 대한 2차방정식을 θ_3 에 대하여 풀 수 있다.
- $s\alpha_1 = 0$ 이며 $z = k_4$ 이고 z 는 이미 알고 있다. 다시 한 번 식 (4.35)를 치환하면, θ_3 에 관하여 풀 수 있는 2차방정식이 나타난다.
- 그렇지 않으면, 식 (4.50)에서 s_2 와 c_2 를 제거하여 다음을 얻는다.

$$\frac{(r - k_3)^2}{4a_1^2} + \frac{(z - k_4)^2}{s^2\alpha_1} = k_1^2 + k_2^2 \quad (4.52)$$

θ_3 에 대하여 식 (4.35)를 치환하면 이 방정식은 4차식이 되며 θ_3 에 대하여 풀 수 있다.³

$$f_1 = a_3 c_3 + d_4 s\alpha_3 s_3 + a_2$$

$$f_2 = a_3 c\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 c\alpha_2 c_3 - d_4 s\alpha_2 c\alpha_3 - d_3 s\alpha_2$$

$$f_3 = a_3 s\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 s\alpha_2 c_3 + d_4 c\alpha_2 c\alpha_3 + d_3 c\alpha_2$$

$$g_1 = c_2 f_1 - s_2 f_2 + a_1$$

$$g_2 = s_2 c\alpha_1 f_1 + c_2 c\alpha_1 f_2 - s\alpha_1 f_3 - d_2 s\alpha_1$$

$$g_3 = s_2 s\alpha_1 f_1 + c_2 s\alpha_1 f_2 + c\alpha_1 f_3 + d_2 c\alpha_1$$

$$k_1 = f_1$$

$$k_2 = -f_2$$

$$k_3 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3$$

$$k_4 = f_3 c\alpha_1 + d_2 c\alpha_1$$

$$u = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2}$$

식 4.35

4.6 3축이 교차할 경우 피퍼(Pieper)의 해

$$r = (k_1 c_2 + k_2 s_2) 2a_1 + k_3$$

$$z = (k_1 s_2 - k_2 c_2) s \alpha_1 + k_4$$

식 4.50

- θ_3 을 푼 후 식 4.50를 θ_2 에 대하여 식 4.46을 θ_1 에 대하여 풀 수 있음
- 해를 완료하기 위하여 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ 을 풀어야 함. 이들 축이 교차하므로, 이들 관절각은 마지막 링크의 방위에만 영향을 미침. 목표의 회전 부분 0_6R 에만 근거하여 계산할 수 있음. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 이 얻어졌으므로, $\theta_4 = 0$ 일 때의 기저계에 기준한 링크계 {4}의 방위 ${}^4_6R|_{\theta_4=0}$ 를 계산할 수가 있음. 원하는 {6}의 방위는 마지막 3관절의 작용에 의하여 이 방위의 차이는 마지막 세 관절각의 움직임에 의해 만들어짐

$${}^4_6R|_{\theta_4=0} = {}^0_4R^{-1}|_{\theta_4=0} {}^0_6R$$

- 많은 매니플레이터의 경우에, 2장에서 ${}^4_6R|_{\theta_4=0}$ 에 적용된 Z-Y-Z 오일러 각의 해를 따라감으로써 마지막 세 각들을 구할 수 있음

$$f_1 = a_3 c_3 + d_4 s \alpha_3 s_3 + a_2$$

$$f_2 = a_3 c \alpha_2 s_3 - d_4 s \alpha_3 c \alpha_2 c_3 - d_4 s \alpha_2 c \alpha_3 - d_3 s \alpha_2$$

$$f_3 = a_3 s \alpha_2 s_3 - d_4 s \alpha_3 s \alpha_2 c_3 + d_4 c \alpha_2 c \alpha_3 + d_3 c \alpha_2$$

$$g_1 = c_2 f_1 - s_2 f_2 + a_1$$

$$g_2 = s_2 c \alpha_1 f_1 + c_2 c \alpha_1 f_2 - s \alpha_1 f_3 - d_2 s \alpha_1$$

$$g_3 = s_2 s \alpha_1 f_1 + c_2 s \alpha_1 f_2 + c \alpha_1 f_3 + d_2 c \alpha_1$$

$$k_1 = f_1$$

$$k_2 = -f_2$$

$$k_3 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3$$

$$k_4 = f_3 c \alpha_1 + d_2 c \alpha_1$$

$$u = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2}$$

식 4.35

$${}^0P_{4ORG} = \begin{bmatrix} c_1 g_1 - s_1 g_2 \\ s_1 g_1 + c_1 g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

식 4.36

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

- 3장에서 유도한 기구방식을 이용함

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T(\theta_1){}_1^2T(\theta_2){}_2^3T(\theta_3){}_3^4T(\theta_4){}_4^5T(\theta_5){}_5^6T(\theta_6)$$

$$[{}_1^0T(\theta_1)]^{-1} {}^0_6T = {}^1_2T(\theta_2){}_2^3T(\theta_3){}_3^4T(\theta_4){}_4^5T(\theta_5){}_5^6T(\theta_6)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6T$$

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_3$$

$$p_x = \rho \cos \phi$$

$$p_y = \rho \sin \phi$$



1p_y 비교

치환 $\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$
 $\phi = \text{Atan2}(p_y, p_x)$

$${}^1_6T = {}^1_3T {}^3_6T = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{식 3.13}$$

$$\begin{aligned} {}^1r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{21} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ {}^1r_{31} &= -c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + s_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{22} &= s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ {}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + c_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 \\ {}^1r_{23} &= s_4s_5 \\ {}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\ {}^1p_x &= a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23} \\ {}^1p_y &= d_3 \\ {}^1p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{aligned}$$

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6T$$

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_3$$

$$p_x = \rho \cos \phi$$

$$p_y = \rho \sin \phi$$

$$c_1 s_\phi - s_1 c_\phi = \frac{d_3}{\rho}$$

$$\sin(\phi - \theta_1) = \frac{d_3}{\rho}$$

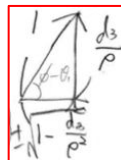
$$\cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}}$$

$$\phi - \theta_1 = \text{Atan2}\left(\frac{d_3}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}}\right)$$

$$\theta_1 = \text{Atan2}(p_y, p_x) - \text{Atan2}\left(d_3, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}\right)$$

1p_y 비교

치환 $\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$
 $\phi = \text{Atan2}(p_y, p_x)$



$${}^1_6T = {}^1_3T {}^3_6T = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{식 3.13}$$

$$\begin{aligned} {}^1r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{21} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ {}^1r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + s_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{22} &= s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ {}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + c_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 \\ {}^1r_{23} &= s_4s_5 \\ {}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\ {}^1p_x &= a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23} \\ {}^1p_y &= d_3 \\ {}^1p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{aligned}$$

- +, - 부호에 따라서 θ_1 은 2개의 가능한 해를 갖는다는 것을 주목

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6T$$

$${}^1_6T = {}^1_3T {}^3_6T = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{식 3.13}$$

- θ_1 을 알았으므로, 위의 식의 좌변을 알게됨. (1, 4)과 (2, 4)

(3, 4) 요소를 비교하면,

$$c_1 p_x + s_1 p_y = a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2 \quad (1)$$

$$-p_z = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2 \quad (2)$$

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_3 \quad (3)$$

- 위의 식 1, 2, 3을 제공해서 더한 후 정리하면,

$$\begin{aligned} {}^1r_{11} &= c_{23}[c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6] - s_{23} s_5 s_6 \\ {}^1r_{21} &= -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\ {}^1r_{31} &= -s_{23}[c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6] - c_{23} s_5 c_6 \\ {}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6] + s_{23} s_5 s_6 \\ {}^1r_{22} &= s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \\ {}^1r_{32} &= s_{23}[c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6] + c_{23} s_5 s_6 \\ {}^1r_{13} &= -c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 \\ {}^1r_{23} &= s_4 s_5 \\ {}^1r_{33} &= s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \\ {}^1p_x &= a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23} \\ {}^1p_y &= d_3 \\ {}^1p_z &= -a_3 s_{23} - a_2 s_2 - d_4 c_{23} \end{aligned}$$

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

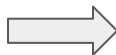
- 위의 식 1, 2, 3을 제공해서 더한 후 정리하면

$$c_1 p_x + s_1 p_y = a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2 \quad (1)$$

$$-p_z = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2 \quad (2)$$

$$\text{식 (1,2)} -s_1 p_x + c_1 p_y = d_3 \quad (3)$$

곱하고 그 후에 더하면.



$$c_1^2 p_x^2 + s_1^2 p_y^2 + 2c_1 s_1 p_x p_y = a_3^2 c_{23}^2 + d_4^2 s_{23}^2 + a_2^2 c_2^2 - 2a_3 d_4 c_{23} s_{23} - 2d_4 a_2 c_2 s_{23} + 2a_2 a_3 c_2 c_{23}$$

$$p_z^2 = a_3^2 s_{23}^2 + d_4^2 c_{23}^2 + a_2^2 s_2^2 + 2a_3 d_4 s_{23} c_{23} + 2a_2 d_4 s_2 c_{23} + 2a_2 a_3 s_2 s_{23}$$

$$+ \frac{s_1^2 p_x^2 + c_1^2 p_y^2 - 2s_1 c_1 p_x p_y = d_3^2}{p_x^2 (s_1^2 + c_1^2) + p_y^2 (s_1^2 + c_1^2) + p_z^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow 2\text{번}}$$

$$= a_3^2 + a_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - 2d_4 a_2 c_2 s_{23} + 2a_2 a_3 c_2 c_{23} + 2a_2 d_4 s_2 c_{23} + 2a_2 a_3 s_2 s_{23} \Rightarrow 7\text{번}$$



$$s_{23} = s_2 c_3 + c_2 s_3$$

$$c_{23} = c_2 c_3 - s_2 s_3$$

$$-2d_4 a_2 c_2 (s_2 c_3 + c_2 s_3) + 2d_4 a_2 s_2 (c_2 c_3 - s_2 s_3)$$

$$= -2d_4 a_2 c_2 s_2 c_3 - 2d_4 a_2 c_2^2 s_3 + 2d_4 a_2 s_2^2 c_3 - 2d_4 a_2 s_2^2 s_3$$

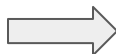
$$= -2d_4 a_2 s_3$$

$$2a_2 a_3 c_{23} c_2 + 2a_2 a_3 s_2 s_{23}$$

$$= 2a_2 a_3 (c_2 c_3 - s_2 s_3) c_2 + 2a_2 a_3 s_2 (s_2 c_3 + c_2 s_3)$$

$$= 2a_2 a_3 c_2^2 c_3 - 2a_2 a_3 c_2 s_2 s_3 + 2a_2 a_3 s_2^2 c_3 + 2a_2 a_3 s_2^2 c_2 s_3$$

$$= 2a_2 a_3 c_3$$



$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = a_3^2 + a_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - 2d_4 a_2 s_3 + 2a_2 a_3 c_3$$

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_3^2 - a_2^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2} = a_3 c_3 - d_4 s_3$$

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

$$\begin{aligned}
 p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 &= a_3^2 + a_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - 2d_4a_2s_3 + 2a_2a_3c_3 \\
 \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_3^2 - a_2^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2} &= a_3c_3 - d_4s_3
 \end{aligned}$$

$$a_3c_3 - d_4s_3 = K \quad K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2}$$

- 위의 식에서 θ_1 을 없앴음. 그리고 θ_1 을 구했던 방법(삼각함수 치환)을 이용하면

$$\theta_3 = \text{Atan2}(a_3, d_4) - \text{Atan2}(K, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2})$$

- +,- 부호에 따라서 θ_3 는 2개의 가능한 해를 갖는다는 것을 주목

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T(\theta_1) {}^1_2T(\theta_2) {}^2_3T(\theta_3) {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) \Rightarrow [{}^0_3T(\theta_2)]^{-1} {}^0_6T = {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6)$$

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3_6T$$

$${}^3_6T = {}^3_4T {}^4_6T = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & a_4 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 위의 두 식 중 (1, 4), (2, 4) 요소를 비교하고 s_{23} , c_{23} 에 대해 연립으로 풀면,

$$c_1c_{23}p_x + s_1c_{23}p_y - s_{23}p_z - a_2c_3 = a_3$$

$$c_1s_{23}p_x - s_1s_{23}p_y - c_{23}p_z + a_2s_3 = d_4$$

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

- 위의 두 식 중 (1, 4), (2, 4) 요소를 비교하고 s_{23} , c_{23} 에 대해 연립으로 풀면,

$$c_1 c_{23} p_x + s_1 c_{23} p_y - s_{23} p_z - a_2 c_3 = a_3$$

$$c_1 s_{23} p_x - s_1 s_{23} p_y - c_{23} p_z + a_2 s_3 = d_4$$

$$s_{23} = \frac{(-a_3 - a_2 c_3) p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2}$$

$$c_{23} = \frac{(a_2 s_3 - d_4) p_z - (a_3 + a_2 c_3)(c_1 p_x + s_1 p_y)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2}$$

$$\theta_{23} = \text{Atan2}[(-a_3 - a_2 c_3) p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(d_4 - a_2 s_3), \\ (a_2 s_3 - d_4) p_z - (a_3 + a_2 c_3)(c_1 p_x + s_1 p_y)]$$

- θ_1 과 θ_3 가 2개 가능 부호의 조합에 따라 θ_{23} 는 네 가지 가능한 값을 갖게 됨

$$\theta_2 = \theta_{23} - \theta_3$$

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & -s_{23} & -a_2 c_3 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3_6T$$

$${}^3_6T = {}^3_4T {}^4_6T = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & a_3 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

- 위의 두 식 중 (1, 3), (3, 3) 요소를 비교하면,

$$\begin{aligned} r_{13} c_1 c_{23} + r_{23} s_1 c_{23} - r_{33} s_{23} &= -c_4 s_5 \\ -r_{13} s_1 + r_{23} c_1 &= s_4 s_5 \end{aligned}$$

$s_5 \neq 0$ 인 경우

$$\theta_4 = \text{Atan2}(-r_{13} s_1 + r_{23} c_1, -r_{13} c_1 c_{23} - r_{23} s_1 c_{23} + r_{33} s_{23})$$

- $\theta_5 = 0$ 일 때 관절축 4와 6이 일직선임. θ_4 를 임의로 선택함(현재값을 일반적으로

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T(\theta_1) {}^1_2T(\theta_2) {}^2_3T(\theta_3) {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) \quad \Rightarrow \quad [{}^0_4T(\theta_4)]^{-1} {}^0_6T = {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6)$$

$$[{}^0_4T(\theta_4)]^{-1} = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + d_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1c_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + d_3c_4 + a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_6T = {}^4_5T {}^5_6T = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

- 위의 두 식 중 (1, 3), (3, 3) 요소를 비교하면,

$$r_{13}(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + r_{23}(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - r_{33}(s_{23}c_4) = -s_5$$

$$r_{13}(-c_1s_{23}) + r_{23}(-s_1s_{23}) + r_{33}(-c_{23}) = c_5$$



$$\theta_5 = \text{Atan2}(s_5, c_5)$$

4.7 머니플레이터 역기구학의 예: PUMA 560

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T(\theta_1) {}^1_2T(\theta_2) {}^2_3T(\theta_3) {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6)$$

- 같은 방법 $({}^0_5T)^{-1}$ 을 계산 $({}^0_5T)^{-1} {}^0_6T = {}^5_6T(\theta_6)$ 의 양변의 (3, 1), (1, 1) 요소를

비교하면

$$s_6 = -r_{11}(c_1c_{23}s_4 - s_1c_4) - r_{21}(s_1c_{23}s_4 + c_1c_4) + r_{31}(s_{23}s_4)$$

$$c_6 = r_{11}[(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4)c_5 - c_1s_{23}s_5] + r_{21}[(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4)c_5 - s_1s_{23}s_5] - r_{31}(s_{23}c_4c_5 + c_{23}s_5)$$



$$\theta_6 = \text{Atan2}(s_6, c_6)$$

- θ_1 과 θ_3 가 +, - 부호를 가지므로 이 방정식은 4개의 해를 갖음. 추가로 팔목 뒤집음으로 인해 4개의 $\theta'_4 = \theta_4 + 180^\circ$ 포함
 $\theta'_5 = -\theta_5$
 $\theta'_6 = \theta_6 + 180^\circ$

4.8 표준계

1. 사용자가 시스템에게 정지계의 위치를 명시한다. 그림 4.12에서와 같이 작업 평면의 모서리가 될 수도 있고 움직이는 컨베이어 벨트에 부착시킬 수도 있다. 정지계 $\{S\}$ 는 기저계 $\{B\}$ 에 기준하여 정의된다.
2. 사용자가 공구계 $\{T\}$ 의 제원을 제시하므로 로봇이 사용할 공구의 표시를 명확히 한다. 로봇이 잡을 각각의 공구는 각기 다른 계 $\{T\}$ 를 가질 수 있다. 같은 공구를 다른 방법으로 쥐게 되면 그에 따라 $\{T\}$ 계의 정의가 달라지게 된다. 공구계 $\{T\}$ 는 손목계 $\{W\}$ 에 기준하여 명시한다 즉, ${}^W_T T$ 이다.
3. 사용자가 로봇 운동의 목표점을 명시하는 것은 목표계 $\{G\}$ 의 제원을 정지계에 기준하여 나타냄으로써 된다. 보통 $\{T\}$ 와 $\{S\}$ 계의 정의는 로봇의 몇 가지 운동에 대해서는 변하지 않고 일정하게 남아 있다. 이 경우에 두 계가 정의되면 사용자는 단순히 목표계 $\{G\}$ 의 제원의 일체를 주면 된다. 많은 경우에, 공구계 ${}^W_T T$ 는 상수로 정의된다(예를 들어, 손가락 끝의 중심에 원점이 오도록 정의한다) 또한 정지계가 고정될 수 있고, 또는 사용자가 로봇에게 쉽게 가르칠 수 있다. 그런 경우, 사용자는 5개 표준계를 모두 알고 있을 필요가 없다. 정지계에 의해 명시된 작업 영역에 기준하여 공구를 옮기는 것으로 간단히 생략할 수 있다.
4. 로봇 시스템은 한 조의 관절각들을 계산하여, 공구계가 초기 위치로부터 $\{T\}=\{G\}$ 이 될 때까지 유연한 운동으로 움직여서 운동을 종료하도록 관절들을 움직이게 한다.

Figure 4.11
Location of the
“standard” frames.

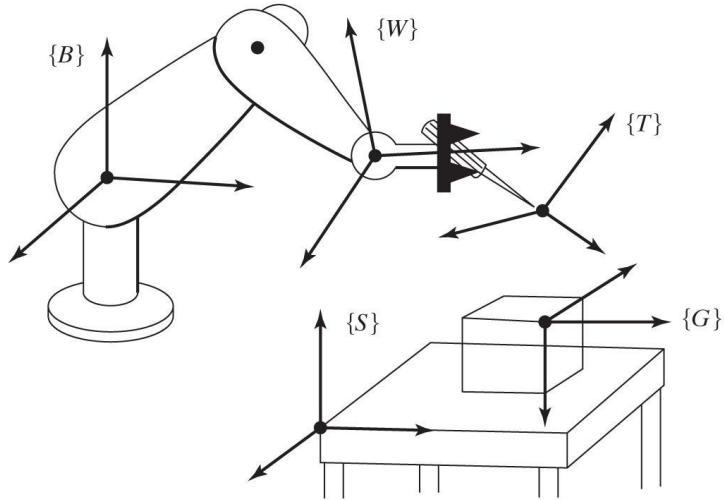
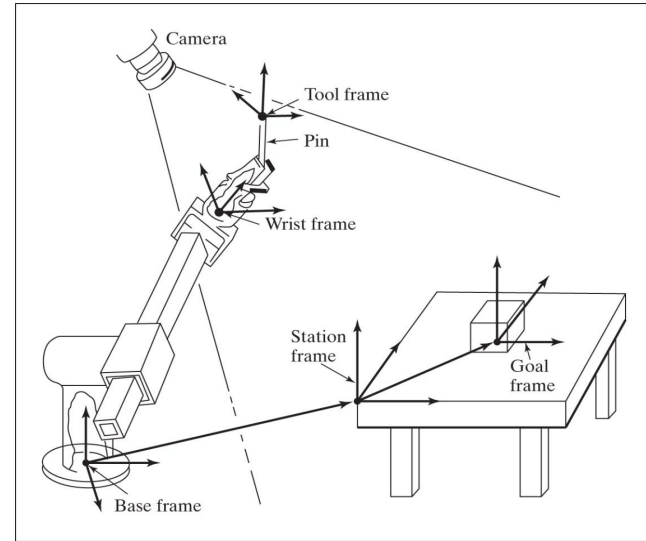


Figure 4.12
Example workstation.



4.10 반복성과 정밀성

- 단순한 교시와 재현(**teach and playback**)과정에서 머니플레이터의 역기구학이라는 문제는 발생하지 않음
- 머니플레이터가 교시된 점으로 얼마나 정밀하게 돌아올 수 있는지가 머니플레이터의 반복성(**repeatability**)임
- 목표 위치와 방위를 직교좌표계의 값으로 명시할 때에는 언제나 그 장치의 역기구학을 계산하여 필요한 관절각을 풀어야만 하고, 이런 계산된 점에 도달할 수 있는 정확도(**accuracy**)를 머니플레이터의 정밀성이라고 함
- 대부분의 산업용 로봇의 반복성이 상당히 양호함에도 불구하고 정밀성은 훨씬 조악하며 머니플레이터에 따라서 약간씩 다르게 나타남
- 보정 기술(**calibration**)을 개발하여 특정한 머니플레이터의 기구 인자를 예측함으로써 그들의 정밀도를 향상시킬 수 있음