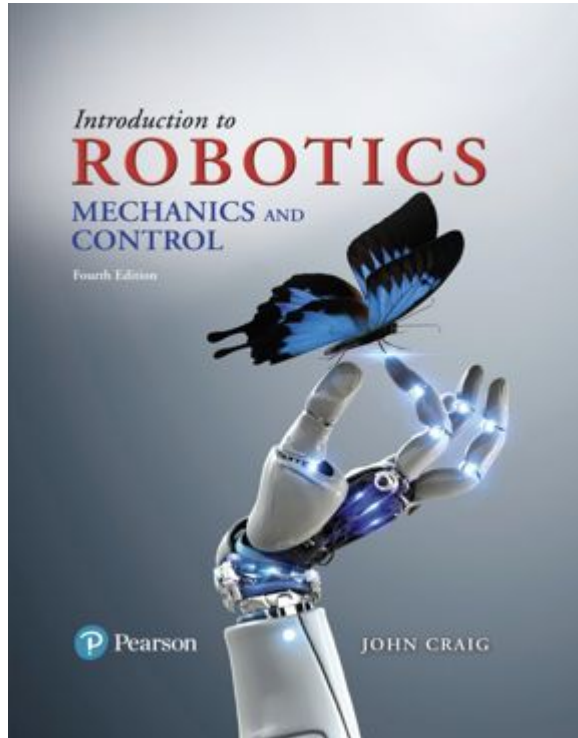


# Introduction to Robotics

Mechanics and Control

4<sup>th</sup> Edition



## Chapter 2

공간 표시와 변환

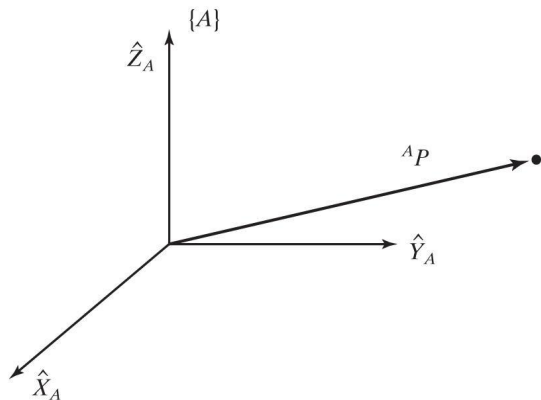
## 2.1 개요

- 로봇 머니폴레이션 → 공구 또는 부품을 옮기는 작업 → 공구, 부품, 로봇의 위치와 방위(각도)를 표시해야 함 → 좌표계를 정의하고 표시하는 방법 필요 → 속도(선속도, 각속도), 힘, 토크 등에 적용
  - 직교좌표계 (Cartesian coordinate system) ← 이 과목에서 주로 사용
  - 극좌표계 (Polar coordinate system) ← 가끔 사용

## 2.2 표시: 위치, 방위, 좌표계

- 위치 표시:  $3 \times 1$  위치 벡터(position vector) 사용
  - ${}^A P: \{A\}$  좌표계의 각 축(x, y, z)을 따라서 측정된 거리를 나타내는 수치값을 벡터로 표현

$${}^A P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$



**Figure 2.1**  
Vector relative to frame (example).

## 2.2 표시: 위치, 방위, 좌표계

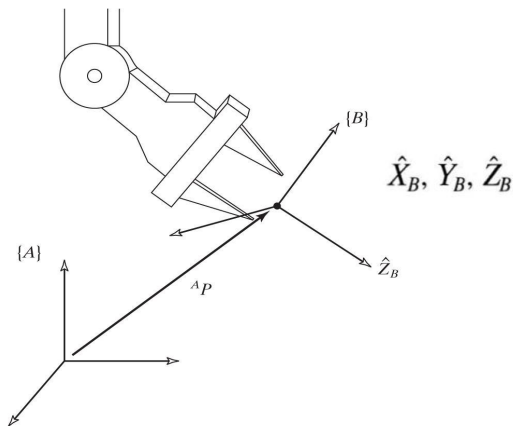
- 방위 표시: 3 x 3 회전행렬(rotation matrix) 사용

- 그림 2.2처럼 한 물체의 방위를 표시하기 위해 물체에 좌표계를 부착한 후 이 좌표계를 기준 좌표계에 대해 상대적으로 표시함. 좌표계 {B}를 물체에 부착하고 {A}를 기준으로 한 {B}의 방위를 표시함

- 좌표계 {B}를 나타내는 것임

- 회전행렬

$${}^A_B R = [{}^A\hat{X}_B \quad {}^A\hat{Y}_B \quad {}^A\hat{Z}_B] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$



**Figure 2.2**  
Locating an object in  
position and orientation.

단위 벡터의  
스칼라적  
=  $|X_B||Z_A|\cos(\theta)$

## 2.2 표시: 위치, 방위, 좌표계

- 행렬의 열은  $\{A\}$ 의 단위 벡터를 좌표계  $\{B\}$ 에서 표시한 것이므로,

$${}^A_B R = [ {}^A\hat{X}_B \quad {}^A\hat{Y}_B \quad {}^A\hat{Z}_B ] = \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix} \qquad {}^B_A R = {}^A_B R^T$$

- 회전행렬의 역은 그 행렬의 전치행렬이 되므로

$${}^A_B R^T {}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B^T \\ {}^A\hat{Y}_B^T \\ {}^A\hat{Z}_B^T \end{bmatrix} [ {}^A\hat{X}_B \quad {}^A\hat{Y}_B \quad {}^A\hat{Z}_B ] = I_3 \qquad {}^A_B R = {}^B_A R^{-1} = {}^B_A R^T$$

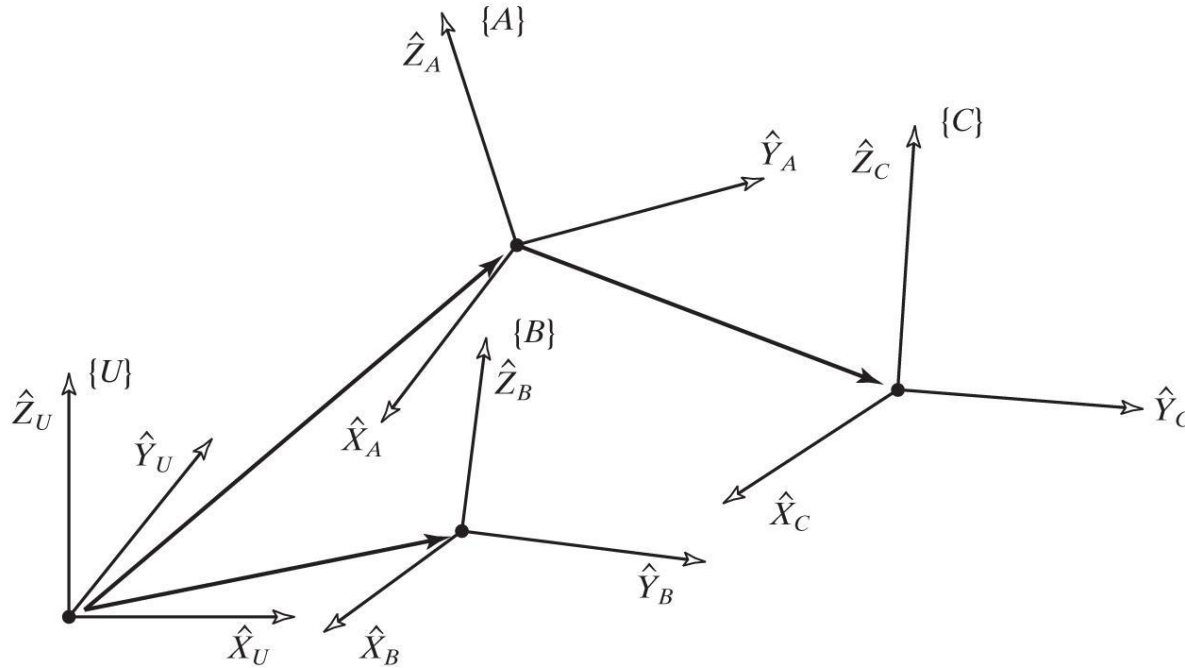
- ${}^A_B R$ 의 열은  $\{A\}$ 를 기준으로 쓴  $\{B\}$ 의 단위벡터, 행은  $\{B\}$ 를 기준으로 쓴  $\{A\}$ 의 단위벡터

## 2.2 좌표계의 표시

- 앞으로 표시하고자 하는 점의 위치는 부착된 좌표계의 원점을 선택하겠음.
- 그림 2.2에서 벡터 하나로 손끝의 위치( ${}^A\mathbf{P}$ )를 나타내고, 추가적인  ${}^B\hat{X}_B$   ${}^A\hat{Y}_B$   ${}^A\hat{Z}_B$ ) 로 손의 방위를 표시함

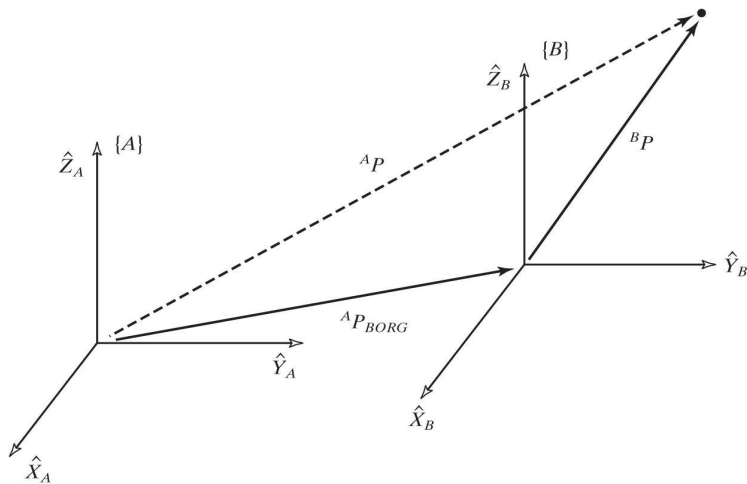
$$\{B\} = \{{}_B^A R, {}^A P_{\underline{BORG}}\}$$

**Figure 2.3**  
**Example of several frames.**



## 2.3 매핑(mapping): 한 좌표계에서 다른 좌표계로 표시 바꾸기

- 전위(translation)된 좌표계를 포함하는 매핑
  - 매핑(mapping): 한 좌표계에서 다른 좌표계로의 표시 변화
- 그림 2.4에서 좌표계 {B}에서 벡터  ${}^B P$ 로 정의된 점을 동일한 방위를 가지고 있는 좌표계 {A}에 대해 표시  ${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG}$



**Figure 2.4**  
Translational mapping.

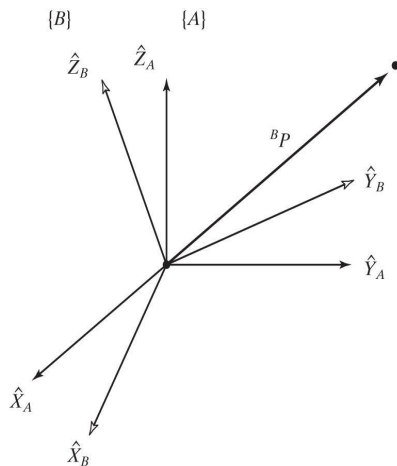


## 2.3 매핑(mapping): 한 좌표계에서 다른 좌표계로 표시 바꾸기

- 회전(rotation)된 좌표계를 포함하는 매핑

- 그림 2.5에서 두 좌표계의 원점이 일치하고, 좌표계  $\{B\}$ 에 대한 벡터  ${}^B P$ 를 알고 있을 때, 다른 좌표계  $\{A\}$ 에 대해 벡터  ${}^A P$ 의 정의를 알고 싶을 때 사용함 → 회전 행렬을 (

$${}^A R = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \hat{X}_A^T \\ {}^B \hat{Y}_A^T \\ {}^B \hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$



**Figure 2.5**  
Rotating the description of  
a vector.

## 2.3 매핑(mapping): 한 좌표계에서 다른 좌표계로 표시 바꾸기

- ${}^A P$ 의 각 성분이 좌표계의 단위 방향으로의 투영이므로,

$${}^A p_x = {}^B \hat{X}_A \cdot {}^B P$$

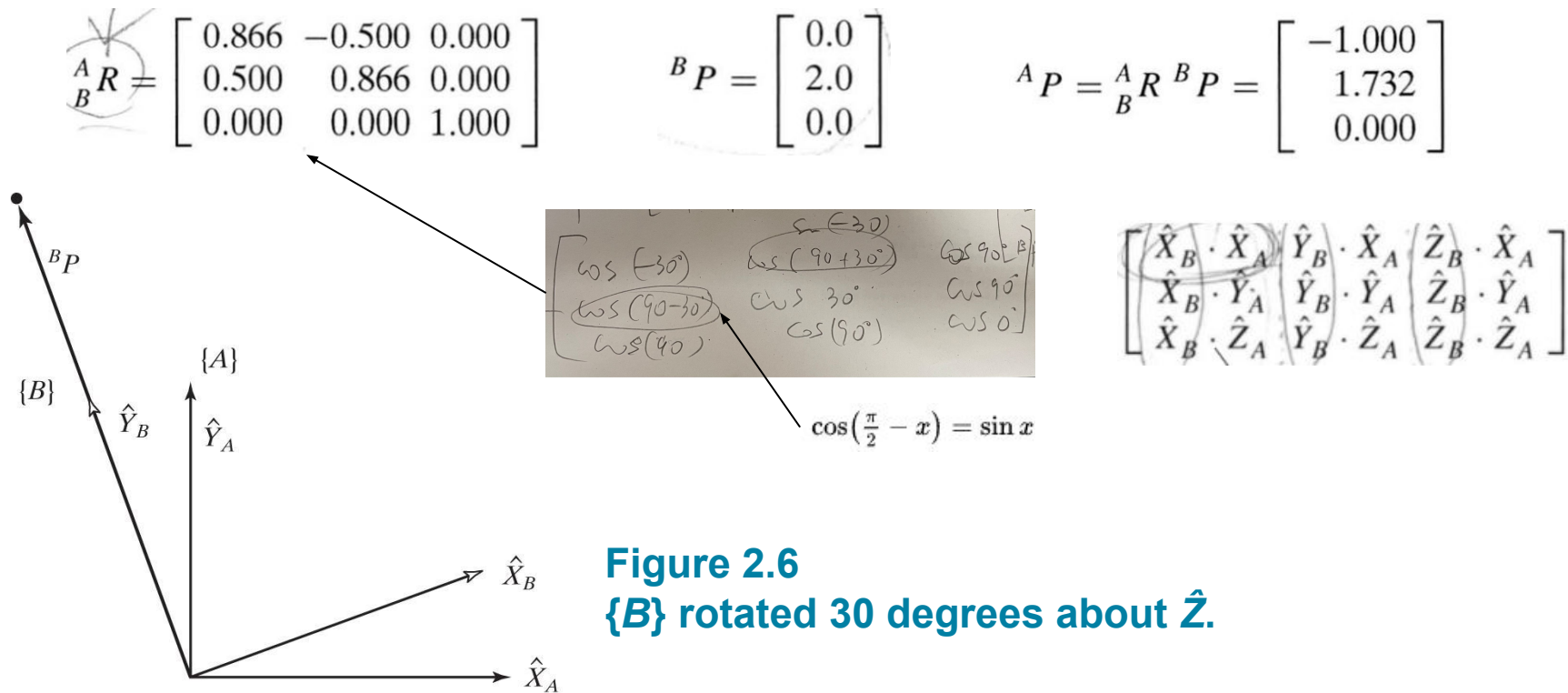
$${}^A p_y = {}^B \hat{Y}_A \cdot {}^B P$$

$${}^A p_z = {}^B \hat{Z}_A \cdot {}^B P$$

- ${}^A_B R = [ {}^A \hat{X}_B \quad {}^A \hat{Y}_B \quad {}^A \hat{Z}_B ]$  이므로,

$${}^A P = {}^A_B R {}^B P$$

예제 2.1 좌표계 {A}에 대해 Z축을 중심으로 30도 회전한 좌표계 {B}를 그림 2.6에 표시



**Figure 2.6**  
**{B} rotated 30 degrees about  $\hat{Z}$ .**

## 2.3 매핑(mapping): 한 좌표계에서 다른 좌표계로 표시 바꾸기

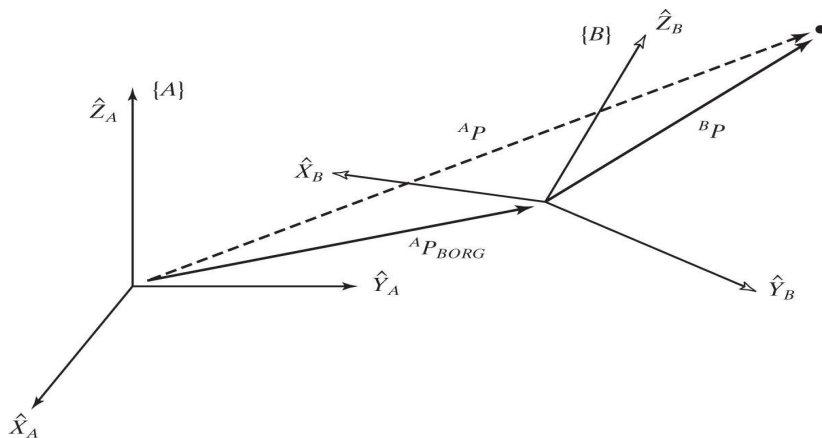
- 일반적인 좌표계를 포함하는 매핑

$${}^A P = {}^A_B R {}^B P + {}^A P_{BORG}$$

$${}^A P = {}^A_B T {}^B P$$

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} {}^A_B R & {}^A P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix}$$

: 4x4 행렬을 균질 변환(homogeneous transform)이라고 함



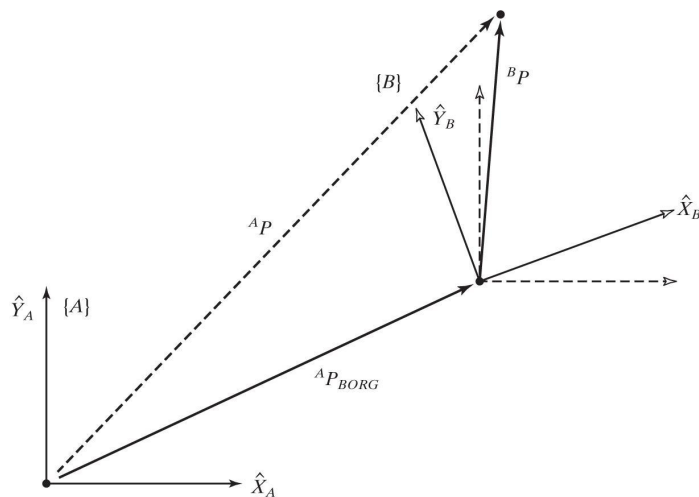
**Figure 2.7**  
General transform of a vector.

예제 2.2 좌표계 {A}에 대해 Z축을 중심으로 30도 회전하고 X축 방향으로 10단위, Y축 방향으로 5단위만큼 전위된 좌표계 {B}를 그림 2.8에 표시

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^B P = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

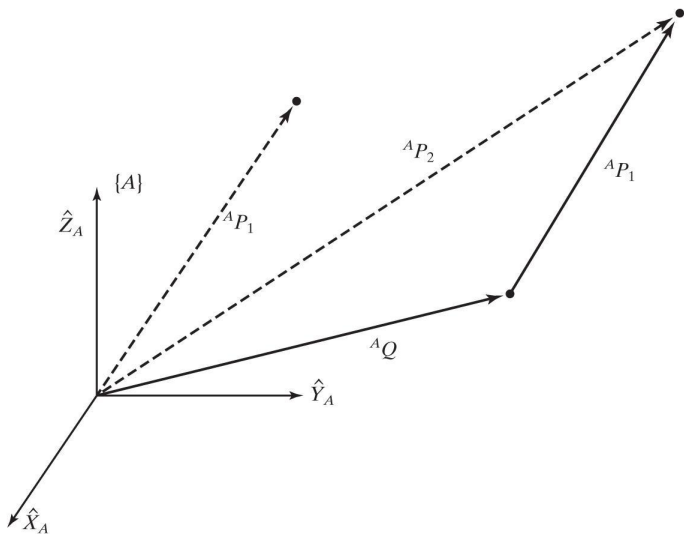
$${}^A P = {}^A_B T {}^B P = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$



**Figure 2.8**  
Frame {B} rotated and translated.

## 2.4 연산자: 전위(translate), 회전(rotate), 변환(transformation)

- 전위 연산자



$${}^A P_2 = {}^A P_1 + {}^A Q \longrightarrow {}^A P_2 = D_Q(q) {}^A P_1$$

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서  $q_x, q_y, q_z$ 는 전위벡터  $Q$ 의 성분이고,  $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$

## 2.4 연산자: 전위(translate), 회전(rotate), 변환(transformation)

- 회전 연산자: 회전  $R$ 에 의해 벡터  ${}^A P_1$ 을 벡터  ${}^A P_2$ 로 변환하는 연산자

$${}^A P_2 = R {}^A P_1$$

- 어떤 축(x? y? z?)이 회전축이 되는가를 명확히 지적하기 위해

$${}^A P_2 = R_K(\theta) {}^A P_1$$

- $R_K(\theta)$ 는 K축 주위로  $\theta$ 도 만큼 회전함. 예를 들면, Z축 주위로  $\theta$ 만큼 회전하는 연산자는

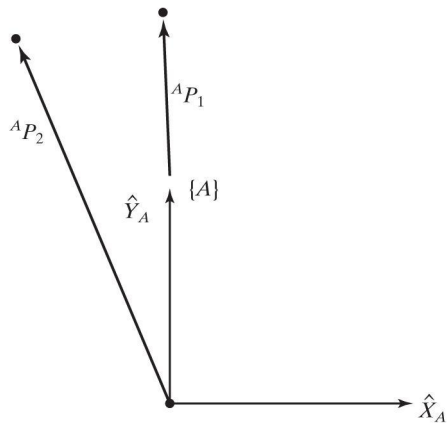
$$R_z(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.3 벡터  ${}^A P_1$ 을 Z축 주위로 30도 회전시켜서  ${}^A P_2$ 로 나타내려면,

$$R_z(30.0) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$${}^A P_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$${}^A P_2 = R_z(30.0) {}^A P_1 = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$



**Figure 2.10**  
The vector  ${}^A P_1$  rotated 30 degrees about  $\hat{Z}$ .



## 2.4 연산자: 전위(translate), 회전(rotate), 변환(transformation)

- 변환 연산자:  $R$ 만큼 회전하고  $Q$ 만큼 전위하는 변환 = 기준 좌표계에 대해  $R$ 만큼 회전하고  $Q$ 만큼 전위하는 좌표계를 표시하는 변환

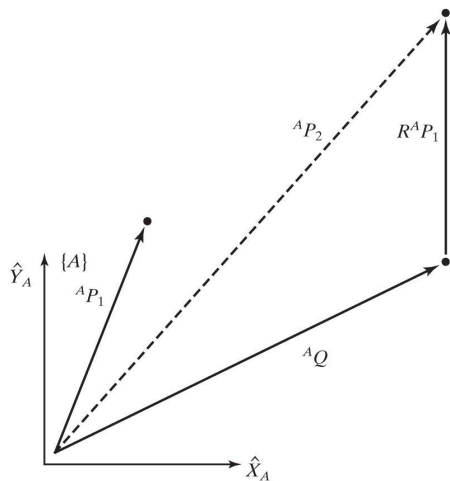
$${}^A P_2 = T {}^A P_1$$

예제 2.4 벡터  ${}^A P_1$ 을 Z축 주위로 30도 회전시켜서 X축 방향으로 10만큼, Y축으를 5만큼 전위시키면,

$$T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A P_1 = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

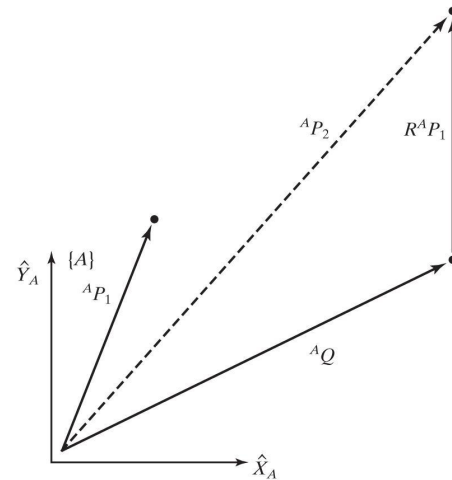
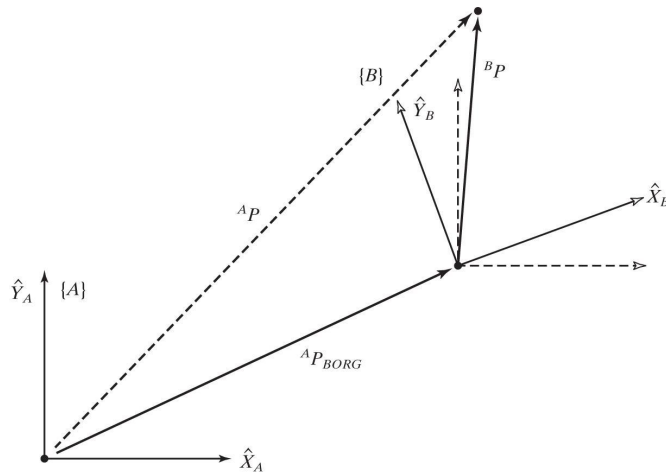
$${}^A P_2 = T {}^A P_1 = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$



**Figure 2.11**  
The vector  ${}^A P_1$  rotated and translated to form  ${}^A P_2$ .

# 중요 포인트

- 예제 2.2와 예제 2.4를 비교해보자
  - 예제 2.2는 좌표계를 회전, 전위 시킴
  - 예제 2.4는 벡터를 회전, 전위 시킴



## 2.5 해석의 요약

- 좌표계를 표현하는 4x4 균질 변환(homogeneous transformation)으로 방위와 위치 정보를 포함시킴
  1. 이것은 계의 표시이다.  ${}^A_B T$ 는 계  $\{A\}$ 에 기준한 계  $\{B\}$ 를 표시한다. 특히  ${}^A_B R$ 의 열은  $\{B\}$ 의 주축의 방향을 정의하는 단위 벡터이고,  ${}^A P_{BORG}$ 는  $\{B\}$ 의 원점의 위치를 정한다.
  2. 이것은 변환 매핑이다.  ${}^A_B T$ 는  ${}^B P$ 를  ${}^A P$ 로 매핑한다.
  3. 이것은 변환 연산자이다.  $T$ 는  ${}^A P_1$ 에 작용하여  ${}^A P_2$ 를 생성한다.

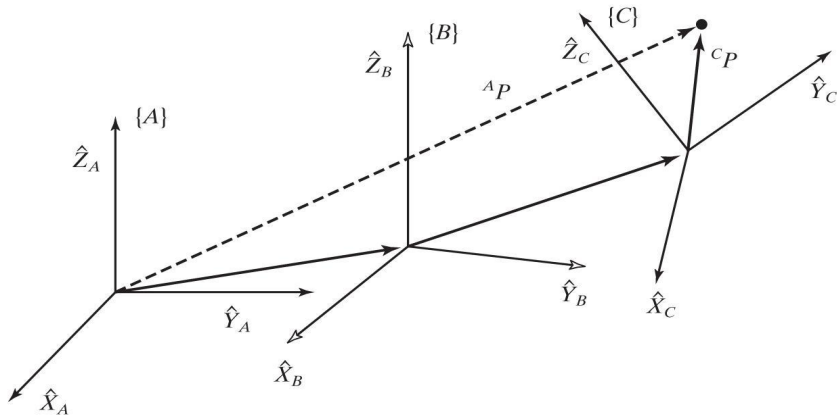
## 2.6 변환 계산

- 복합 변환

$$\begin{aligned} {}^B P &= {}^B T {}^C P \\ {}^A P &= {}^A T ({}^B P) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} {}^A P &= {}^A T {}^B T {}^C P \\ {}^A T &= {}^A T {}^B T \end{aligned}$$

식 2.17

$${}^A T = \left[ \begin{array}{ccc|c} {}^A R_B & {}^B R_C & {}^B P_{CORG} + {}^A P_{BORG} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



**Figure 2.12**

Compound frames: each is known relative to the previous one.

## 2.6 변환 계산

- 변환의 역: 좌표계 {A}에 기준하여 알려진 좌표계 {B}, 즉  ${}^A_B T$ 의 값을 아는 경우, 그 반대(역)인 좌표계 {B}에 기준하여 좌표계 {A}의 표시인, 즉  ${}^B_A T$ 의 값

$${}^B_A T = {}^A_B T^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \textcircled{{}^A_B R^T} & & & -{}^A_B R^T A P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$\swarrow$   $x$  좌표의 단위  $\swarrow$   ${}^A_B R$   
 $T = \left[ \begin{array}{ccc|c} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$$T^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} n_x & n_y & n_z & -\vec{p} \cdot \vec{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\vec{p} \cdot \vec{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\vec{p} \cdot \vec{a} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

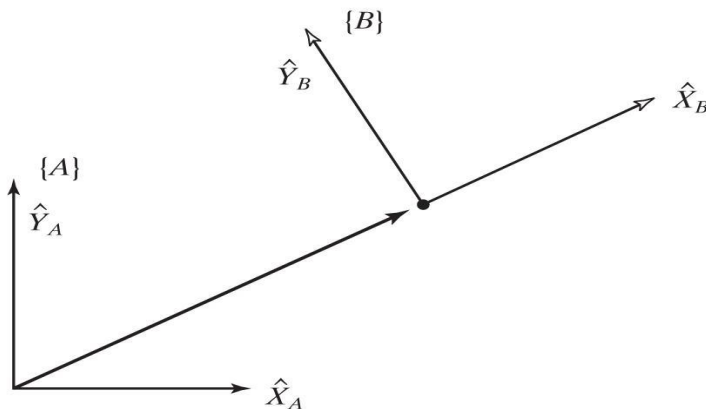
예제 2.5 좌표계 {A}에 대하여 Z축 주위로 30도 회전시켜서 X방향으로 4만큼, Y방향으로 3만큼 전위한 좌표계 {B}가 있을 때,

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 4.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 3.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Handwritten notes:  $A_R$  above the matrix,  $P_{BORG}$  with an arrow pointing to the last column, and a circle around the last column.

$${}^B_A T = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.500 & 0.000 & 4.964 \\ -0.500 & 0.866 & 0.000 & 0.598 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Handwritten notes:  $A_R T$  with an arrow pointing to the first row,  $-A_R T \cdot P_{BORG}$  with an arrow pointing to the last column, and a circle around the last column.



**Figure 2.13**  
**{B} relative to {A}.**

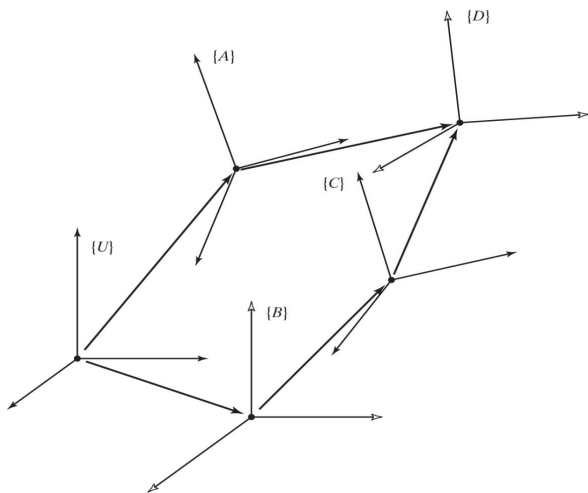
## 2.7 변환방정식

- 변환의 역: 좌표계 {A}에 기준하여 알려진 좌표계 {B}, 즉  ${}^A_B T$ 의 값을 아는 경우, 그 반대(역)인 좌표계 {B}에 기준하여 좌표계 {A}의 표시인, 즉  ${}^B_A T$ 의 값

$${}^U_D T = {}^U_A T {}^A_D T$$

$${}^U_D T = {}^U_B T {}^B_C T {}^C_D T$$

$${}^U_A T {}^A_D T = {}^U_B T \begin{bmatrix} {}^B_C T \\ {}^C_D T \end{bmatrix}$$

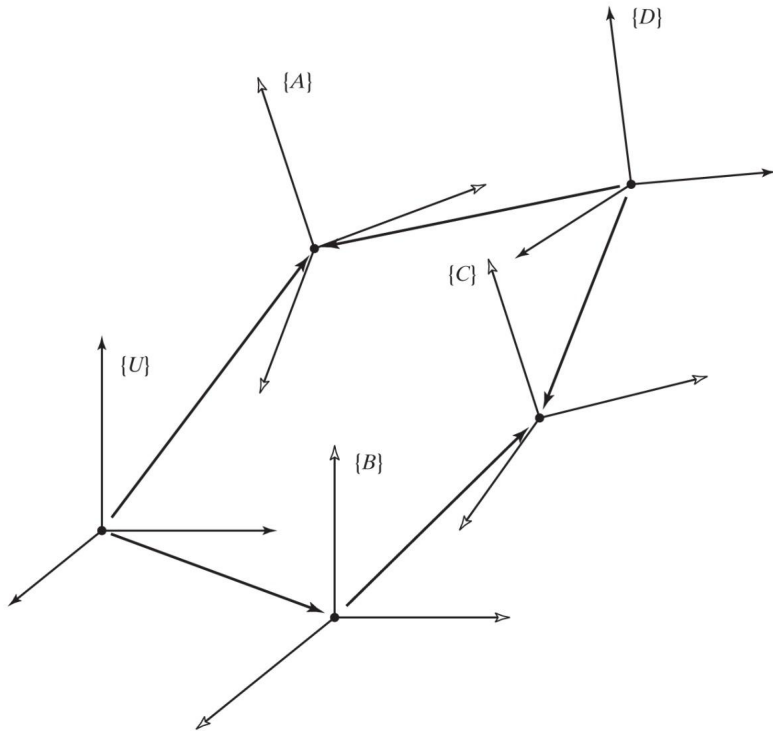


$$\begin{bmatrix} {}^B_C T \\ {}^C_D T \end{bmatrix} = \left( {}^U_B T^{-1} \right) {}^U_A T {}^A_D T {}^C_D T^{-1}$$

**Figure 2.14**  
Set of transforms  
forming a loop.



**Figure 2.15**  
**Example of a transform equation.**

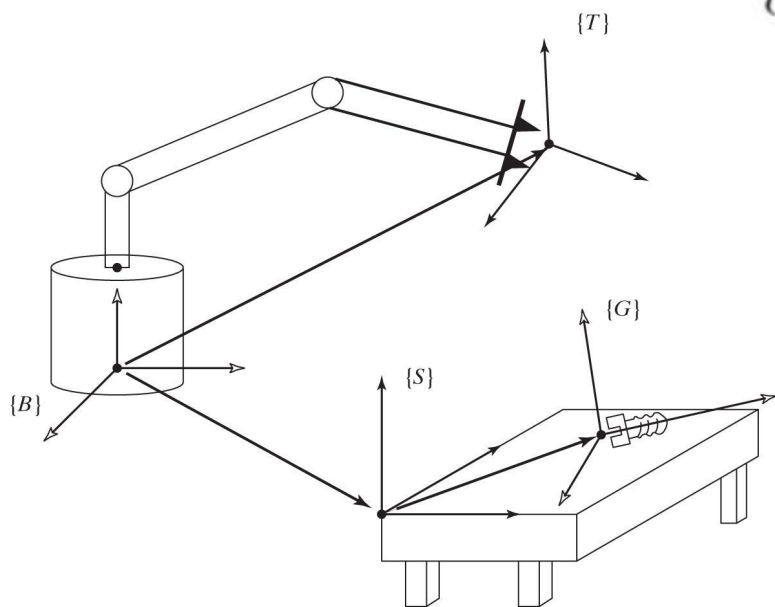


$${}^U_C T = {}^U_A T {}^A_C T^{-1} {}^D_C T$$

$${}^U_C T = {}^U_B T {}^B_C T$$

$${}^U_A T = {}^U_B T {}^B_C T {}^D_C T^{-1} {}^D_A T$$

예제 2.6  ${}^B_T T$ 의 값을 아는 경우,  ${}^T_G T$ 의 값을 구하라



$${}^T_G T = {}^B_T T^{-1} {}^B_S T {}^S_G T$$

**Figure 2.16**  
Manipulator reaching for a bolt.

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

$$R = [\hat{X} \ \hat{Y} \ \hat{Z}]$$

$$|\hat{X}| = 1 \quad \hat{X} \cdot \hat{Y} = 0$$

$$|\hat{Y}| = 1 \quad \hat{X} \cdot \hat{Z} = 0$$

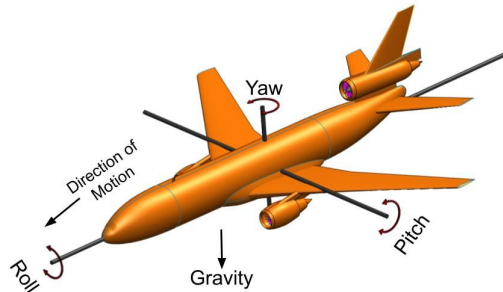
$$|\hat{Z}| = 1 \quad \hat{Y} \cdot \hat{Z} = 0$$

- 지금까지 방위를 표시하는 방법은 **3x3 회전행렬,  $R$** 을 사용했음
  - $R$ 의 특징: 모든 열이 서로 수직이고 단위 크기를 가짐. 행렬식이 1임  $\rightarrow$  고유 정규직교 행렬

- 3x3 즉 9개 보다 적은 숫자로 방위를 표시할 수 있는가? Clay[3]의 공식에 의해서 3개의 파라미터를 갖는 비대칭 행렬  $S$ 가 있고 이를 사용하면  $R$ 을 만들 수 있음
- 교환법칙 성립 안하는 걸 주의해야 함

$$R_z(30)R_x(30) \neq R_x(30)R_z(30) \quad \leftarrow \text{예제 2.7}$$

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현



- X-Y-Z 고정각 (roll-pitch-yaw)

- 좌표계 {B}의 방위를 표시하는 방법 중 대표적인 예로, 기준계 {A}와 일치하는 계로부터 시작함. 맨 처음에 {B}를  $X_A$  주위로 각도  $\gamma$ (roll)만큼 회전한 후,  $Y_A$  주위로 각도  $\beta$ (pitch)만큼 회전하고,  $Z_A$  주위로  $\alpha$ (yaw)만큼 회전함
- 3개의 회전은 각각 고정된 기준계 {A}의 축 주위로 행해짐

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma)$$

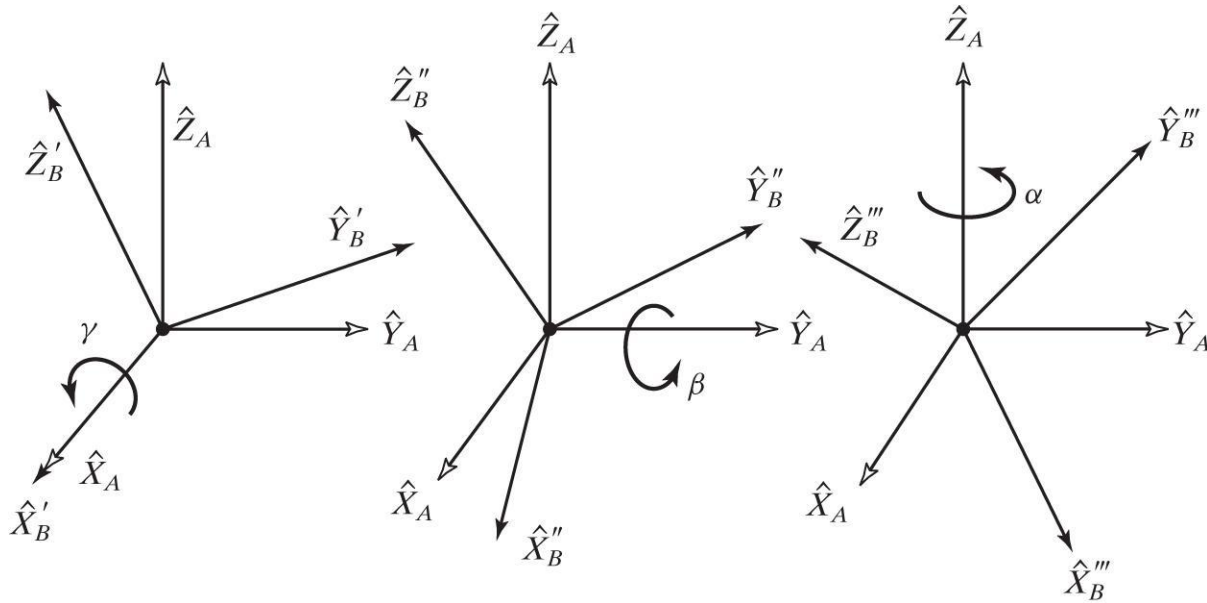
교환법칙 성립 안  
하므로 순서  
조심해야함

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

- 여기서  $c\alpha$ 는  $\cos \alpha$ 를,  $s\alpha$ 는  $\sin \alpha$ 를 간단히 쓴 것

**Figure 2.17**

**X–Y–Z fixed angles. Rotations are performed in the order  $R_X(\gamma)$ ,  $R_Y(\beta)$ ,  $R_Z(\alpha)$ .**



## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- X-Y-Z 고정각 (roll-pitch-yaw)

- 회전의 순서가(오른쪽에서부터)  $R_X(\gamma)$ ,  $R_Y(\beta)$ ,  $R_Z(\alpha)$ 인 것에 주의해야 함 = 교환법칙 성립 안하므로 순서 조심해야함

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

- 만약 회전행렬로부터 roll, pitch, yaw를 역으로 계산하는 것은 까다로움. 위 행렬의 역을 구하는 것은 아주 어려우며, 다음의 방법을 이용하는 것이 편함
- 다음의 행렬을 가정하고, 위의 행렬과 비교해서 구함

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- X-Y-Z 고정각 (roll-pitch-yaw)

$$\beta = \text{Atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})$$

$$\alpha = \text{Atan2}(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta)$$

$$\gamma = \text{Atan2}(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta)$$

$\text{Atan2}(y, x)$ 는  $\tan^{-1}(y/x)$ 를 계산하나 각도가 존재하는 4분면을 결정하기 위하여  $x, y$  2개의 부호 모두를 이용한다. 예를 들면,  $\text{Atan2}(-2.0, -2.0) = -135^\circ$ , 반면  $\text{Atan2}(2.0, 2.0) = 45^\circ$ . 이러한 구별은 한 개의 변수만을 갖는  $\text{arc tan}$  함수로는 나타낼 수가 없다. 우리는 자주 360도까지의 각도를 계산하여야 하므로  $\text{Atan2}$  함수를 자주 사용할 것이다.  $\text{Atan2}$ 는 때때로 '4-4분면 arc tangent' 라고 불리며, 어떤 프로그램 언어 라이브러리는 이것을 미리 정의하여 가지고 있다.

$\beta$ 를 구하기 위하여 양의 제곱근을 사용함으로써 2번째의 해가 존재할지라도, 항상  $-90.0 \leq \beta \leq 90.0$ 이 되는 1개의 해를 계산한다.

만약  $\beta = 90.0^\circ$ 이면,

$$\beta = 90.0^\circ$$

$$\alpha = 0.0$$

$$\gamma = \text{Atan2}(r_{12}, r_{22})$$

만약  $\beta = -90.0^\circ$ 이면,

$$\beta = -90.0^\circ$$

$$\alpha = 0.0$$

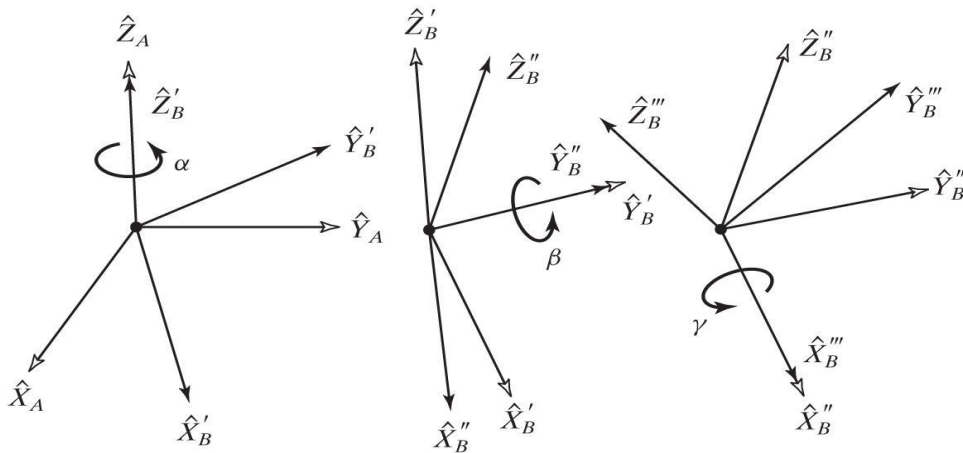
$$\gamma = -\text{Atan2}(r_{12}, r_{22})$$

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- Z-Y-X 오일러 각도

- 알려진 계  $\{A\}$ 와 일치하는 계로부터 시작한다. 처음에  $\{B\}$ 를  $Z_B$  축 주위로 각도  $\alpha$ 만큼 회전한 후, 각도  $\beta$ 만큼  $Y_B$  주위로 회전하고, 마지막으로  $X_B$  주위로 각도  $\gamma$ 만큼 회전
- 각 회전은 고정된 기준계  $\{A\}$ 축 주위로 회전하는 것이 아니라,  $\{B\}$ 축 주위로 회전한다는 것에 주의해야 함
- 각 회전은 그 전의 회전과 일치해 주는지 일치해 노는 축 주위로 해체해나가는 것을 주의해야 함

**Figure 2.18**  
Z-Y-X Euler angles.





## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- Z-Y-X 오일러 각도

$${}^A_B R = {}^A_{B'} R {}^{B'}_{B''} R {}^{B''}_B R$$

$${}^A_B R_{Z'Y'X'} = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$${}^A_B R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- Z-Y-X 오일러 각도

- 위 식의 결과는, 고정축 주위를 반대 순서로 3번의 같은 회전을 하여 얻은 결과와 똑같다는 것에 주목하라. 고정된 축 주위로 3번 회전한 결과는 움직이는 축 주위 반대 순서로 3번 회전한 것과 같은 결과가 된다.
- 식 (2.71)이 식 (2.64)와 같으므로, Z-Y-X 오일러 각을 회전행렬로부터 구하지 않아도 된다. 즉 Z-Y-Z 오일러 각도를 구하기 위하여 식 (2.66)을 사용할 수가 있다.

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- Z-Y-Z 오일러 각도

- 알려진 계  $\{A\}$ 와 일치하는 계로부터 시작한다. 처음에  $\{B\}$ 를  $Z_B$ 축 주위로 각도  $\alpha$ 만큼 회전한 후, 각도  $\beta$ 만큼  $Y_B$ 주위로 회전하고, 마지막으로  $Z_B$  주위로 각도  $\gamma$ 만큼 회전

$${}^A_B R_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

- 앞서의 방법처럼 다음 행렬을 가정하고, 비교하면  $\alpha, \beta, \gamma$ 를 구할 수 있음

$${}^A_B R_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- Z-Y-Z 오일러 각도

- 

$$\beta = \text{Atan2}(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33})$$

$$\alpha = \text{Atan2}(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta)$$

$$\gamma = \text{Atan2}(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta)$$

만약  $\beta = 0.0$ 이면,

$$\beta = 0.0$$

$$\alpha = 0.0$$

$$\gamma = \text{Atan2}(-r_{12}, r_{11})$$

만약  $\beta = 180.0^\circ$ 이면

$$\beta = 180.0^\circ$$

$$\alpha = 0.0$$

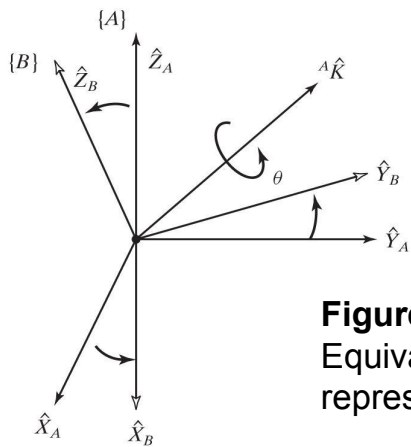
$$\gamma = \text{Atan2}(r_{12}, -r_{11})$$

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- 앞서의 3가지 방법( $X$ - $Y$ - $Z$  고정각,  $Z$ - $Y$ - $X$  오일러 각,  $Z$ - $Y$ - $Z$  오일러 각)을 포함해서 24가지 방법이 있음(교과서 부록 B 참조)

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- 등가의 각-축: 만약 축이  $X, Y, Z$  단위축이 아닌 일반적인 방향을 나타내면, 이 축과 각을 잘 선택해서 방위를 표현할 수 있음
  - 알려진 좌표계  $\{A\}$ 와 일치하는 좌표계로부터 시작해서  $\{B\}$ 를 벡터  ${}^A K$ 의 주위로 오른손 법칙에 의하여 각  $\theta$ 만큼 회전함
  - 만약 회전축 벡터  ${}^A K$ 이 일반적인 축이면, 회전형렬은 다음과 같음



**Figure 2.19**  
Equivalent angle-axis  
representation.

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$c\theta = \cos \theta, s\theta = \sin \theta, v\theta = 1 - \cos \theta$ 이고  ${}^A \hat{K} = [k_x k_y k_z]^T$

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- 다음 행렬을 가정하고 계산하면(연습문제 2.6, 2.7)

$${}^A_B R_K(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \text{Acos} \left( \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

예제 2.8 좌표계 {B}는 다음과 같이 표시된다. 처음에 {A}와 일치한 상태에서 좌표계 {B}를 벡터  ${}^A\mathbf{K} = [0.7070 \ 0.7070 \ 0]^T$  (원점을 통과하는) 주위로 30도만큼 회전한다. {B}의 표시를 나타내라.

$${}^A_T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

예제 2.9 좌표계 {B}는 다음과 같이 표시된다. 처음에 {A}와 일치한 상태에서 좌표계 {B}를 점  ${}^A\mathbf{P} = [1.0 \ 2.0 \ 3.0]$ 을 통과하는 벡터  ${}^A\mathbf{K} = [0.7070 \ 0.7070 \ 0]^T$  (원점을 통과하는) 주위로 30도만큼 회전한다. {B}의 표시를 나타내라.

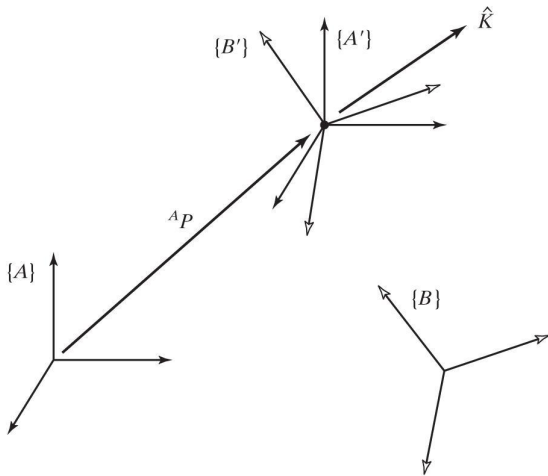


- 새로운 2개의 좌표계  $\{A'\}$ 와  $\{B'\}$ 를 정의함.  $\{A'\}$ ,  $\{B'\}$ 는 각각  $\{A\}$ 와  $\{B\}$ 와 같이 방위를 갖고 있으나,  $\{A\}$ 에 관하여 각각의 원점을 회전축에 놓게 하는 오프셋만큼 전위시킴

$${}^A_{A'}T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$${}^{B'}_BT = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$${}^{A'}_{B'}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$



$${}^A_BT = {}^A_{A'}T {}^{A'}_{B'}T {}^{B'}_BT$$

$${}^A_BT = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.05 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Figure 2.20

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- 오일러 파라미터: 4개의 숫자를 사용해서 방위를 표시하는 방법

등가축(equivalent axis)  $\hat{K} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$ 와 등각각  $\theta$ 의 항

$$\epsilon_1 = k_x \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\epsilon_2 = k_y \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\epsilon_3 = k_z \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\epsilon_4 = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = 1$$

- 오일러 파라미터를 4x1 벡터로 취급하는 방법  $\rightarrow$  unit quaternion

## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

•

$$R_{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1 - 2\epsilon_2^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3\epsilon_4) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_4) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4\epsilon_4}$$

$$\epsilon_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4\epsilon_4}$$

$$\epsilon_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4\epsilon_4}$$

$$\epsilon_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}$$

	장점	단점
오일러(Euler)	직관적이어서 사용자 입력을 받을 수 있다.	짐벌락 문제가 나타난다. 연산 속도가 느리다.
쿼터니온(Quaternion)	짐벌락 문제가 나타나지 않는다. 연산 속도가 빠르다.	직관적이지 않아 사용자 입력을 받을 수 없다.

Gimbal lock?

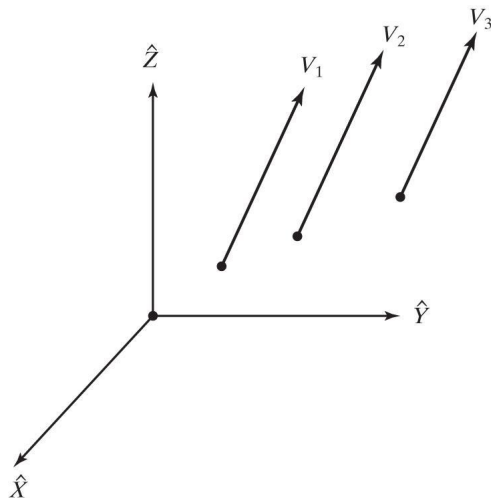
## 2.8 방위에 관한 더 많은 표현

- 교시
  - 방위와 위치를 일일이 계산해서 프로그래밍(코딩)하기 힘들 → (리모컨이나 손으로) 직접 머니플레이터의 방위와 위치를 지정(교시)하는 방법
  - **youtube** 동영상 참조

## 2.9 자유 벡터의 변환

- 동등과 등가의 차이

- 동등(equal): 같은 차원, 같은 크기, 같은 방향을 갖을 때 (아래 그림의  $v_1, v_2, v_3$ 는 동등)
- 등가: 어떤 능력 안에서 유발하는 효과가 같을 때 (아래 그림에서  $v_1, v_2, v_3$ 는 움직인 거리를 능력 기준으로 하면 등가이지만  $xy$  평면 위에서의 높이면 등가가 아님)



## 2.10 계산 시 고려 사항

- 효과적인 계산은 머니플레이션 시스템의 설계, 제어에 중요한 요소임
  - 최대한 계산을 적게 해야 됨
  - 이론과는 다르게 4x4 균질 표현을 직접 곱하거나 역을 계산하는 것보다 식 2.25, 식 2.41 이용이 효과적임

$${}^A P_2 = D_Q(q) {}^A P_1 \qquad {}^A_c T = \left[ \begin{array}{ccc|c} {}^A R_B^B R_C^C & {}^A R_B^B P_{CORG} + {}^A P_{BORG} & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- 예를 들어 2번이 치저체 나 DP를  ${}^A P$ 로 변환할 때

$${}^A P = {}^A R_B^B R_C^C R_D^D P \qquad {}^A P = {}^A R_D^D P$$

- 3번의 회전행렬을 먼저하고 DP를 곱하면 63번의 곱과 순서대로 계산하면 27번의 곱과 18번의 합만 수행하면

$${}^A P = {}^A R_B^B R_C^C R_D^D P \quad \text{그런데, 오른쪽부터}$$

$${}^A P = {}^A R_B^B R_C^C P$$

$${}^A P = {}^A R_B^B P$$